TD & TP I
SIMULATION DE VARIABLES ALÉATOIRES

1 Méthode d'inversion.

Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F. On appelle inverse généralisée de F, la fonction F^{-1} définie pour tout $y \in]0,1]$ par

$$F^{-1}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} \,/ F(x) \geqslant y\}.$$

Exercice 1. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$.

1) Montrer que la variable aléatoire $F^{-1}(U)$ a même loi que X.

2) Si F est continue sur $\mathbb{R}$, montrer que $F(X)$ suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 2. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$.

1) Si $X = -\log(U)/\lambda$ avec $\lambda > 0$, montrer que X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de densité de probabilité
$$f_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x)\mathrm{I}_{(x \geqslant 0)}.$$

2 Si $Y = \lambda \tan(\pi(U - 1/2))$ avec $\lambda > 0$, montrer que Y suit la loi de Cauchy $\mathcal{C}(\lambda)$ de densité de probabilité
$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2 + y^2}.$$

3) Si $Z = -\log(-\log(U))$, montrer que Z suit la loi de Gumbel de densité de probabilité
$$f_Z(z) = \exp(-z - \exp(-z)).$$

2 Méthode par troncature.

Exercice 4. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$.

1) Si $X = [nU] + 1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que X suit la loi uniforme discrète sur l'ensemble $\{1, 2, \cdots, n\}$ donc pour tout $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $\mathbb{P}(X = k) = 1/n$.

2) Si $Y = [-\log(U)/\lambda] + 1$ avec $\lambda > 0$, montrer que Y suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ avec $p = 1 - \exp(-\lambda)$ et $\lambda > 0$ donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y = k) = p(1-p)^{k-1}$.

3 Lois discrètes à support fini.

Exercice 5. Soit $0 < p < 1$ et soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que la variable aléatoire $\mathrm{I}_{\{U<p\}}$ suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ tandis que la variable aléatoire $2\mathrm{I}_{\{U<p\}} - 1$ suit la loi de Rademacher $\mathcal{R}(p)$.

Exercice 6. Soit $p_1, \ldots, p_n$ des nombres dans $[0, 1]$ tels que $p_1 + \cdots + p_n = 1$ et soit $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ avec $x_1 < \cdots < x_n$. Soit X la variable aléatoire de loi discrète donnée par $\mathbb{P}(X = x_1) = p_1, \ldots, \mathbb{P}(X = x_n) = p_n$. Si U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$, montrer que la variable aléatoire

$$Y = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathrm{I}_{\{s_{k-1} \leqslant U \leqslant s_k\}}$$

a même loi que X avec $s_0 = 0$ et pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, $s_k = p_1 + \cdots + p_k$.

Exercice 7. Soit $U_1, \ldots, U_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$ et soit $0 < p < 1$. Si

$$X = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{I}_{\{U_k<p\}},$$

montrer que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Exercice 8. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Si

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} n \mathrm{I}_{\{S_n \leqslant 1 < S_{n+1}\}},$$

montrer que Z suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

4 Méthode par conditionnement.

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. Si le problème de la simulation est résolu pour la loi de Y ainsi que pour toutes les lois conditionnelles $\mathcal{L}(X|Y = y)$, alors il est résolu pour la loi du couple (X, Y) ainsi que pour la loi de X.

Exercice 9. Soit (Z_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $0 < p < 1$. Soit Y une variable aléatoire discrète à support dans $\mathbb{N}$, indépendante de (Z_n). On pose

$$X = \sum_{k=1}^{Y} Z_k.$$

1) Si $\mathcal{L}(Y) = \mathcal{B}(n, \pi)$, montrer que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p\pi)$.

2) Si $\mathcal{L}(Y) = \mathcal{P}(\lambda)$, montrer que X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda p)$.

Exercice 10. Soit (Z_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Soit Y une variable aléatoire de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ indépendante de (Z_n). Montrer que la variable aléatoire

$$X = \sum_{k=1}^{Y} Z_k$$

suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda p)$.