UNIVERSITÉ DE BORDEAUX **MASTER 1, 2016/2017**
OUTILS DE SIMULATION

TD & TP VI
MÉTHODE DE MONTE CARLO

1 Méthode de Monte Carlo.

La méthode de Monte-Carlo permet le calcul de valeurs approchées d'intégrales multiples dont le calcul purement algébrique est impossible ou très difficile. Le fondement de la méthode repose sur la loi des grands nombres et le calcul de l'erreur associée à la méthode s'obtient à partir du théorème limite centrale. On cherche à évaluer une intégrale multiple de la forme

$$I = \int_A f(x)\,dx$$

où A est un pavé de $\mathbb{R}^d$ avec $d \geqslant 1$ de mesure de Lebesgue connue $a = |A|$ et f est une fonction mesurable de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, intégrable sur A. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur A. On a par la LGN

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) = I_A \qquad \text{p.s.}$$

avec $I_A = I/a$. De plus, si f est de carré intégrable sur A, on a par le TLC

$$\sqrt{n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) - I_A\Big) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\sigma^2)$$

avec

$$\sigma^2 = \frac{1}{a}\int_A f^2(x)\,dx - I_A^2.$$

Un intervalle de confiance asymptotique pour I_A, au niveau de confiance $1-\alpha$ avec $0 < \alpha < 1$, est donné par

$$I_A \in \left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) - \frac{q_\alpha \sigma}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) + \frac{q_\alpha \sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

où q_α est le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Ce résultat n'a d'intérêt que si l'on sait majorer convenablement σ^2. Toutefois, si σ^2 est difficile à majorer, on peut l'estimer par la variance empirique

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\big(f(X_k) - \overline{f(X)}\big)^2 \qquad \text{avec} \qquad \overline{f(X)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k).$$

On peut montrer que S_n^2 converge en probabilité vers σ^2. L'intervalle de confiance ci-dessus reste encore valable en remplaçant σ par S_n et en passant à la loi de Student. Finalement, on obtient un erreur d'approximation de l'ordre de $1/\sqrt{n}$. Cette vitesse est assez lente, comparée aux méthodes déterministes classiques, en particulier pour $d = 1$. En effet, si $d = 1$, alors l'erreur d'approximation de la méthode des rectangles ou du point central est de l'ordre de $1/n$. Pour la méthode des trapèzes, elle est en $1/n^2$ et pour la méthode de Simpson en $1/n^4$. La méthode de Monte-Carlo est intéressante si $d \geqslant 3$ ou bien si f est très irrégulière car on peut observer qu'elle ne demande aucune hypothèse de régularité sur f, mise à part l'intégrabilité sur le pavé A.

2 Réduction de la variance.

Soit U un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$ de loi uniforme sur le pavé A et soit $X = f(U)$. On a $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[f(U)] = I_A$. Par suite, si f_X est la densité de la variable aléatoire X,

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx = I_A.$$

On peut donc approximer I_A par

$$\widehat{I}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

où $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. Soit f_Y une densité strictement positive d'une variable aléatoire Y. On a

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} y f_X(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{y f_X(y)}{f_Y(y)} F_Y(y) dy = \int_{\mathbb{R}} h(y) f_Y(y) dy = \mathbb{E}[h(Y)]$$

avec $h(y) = y f_X(y)/f_Y(y)$. Si $\mathrm{Var}(h(Y))$ est très inférieure à $\mathrm{Var}(X)$, il sera plus efficace d'approximer I_A par

$$\widetilde{I}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{Y_k f_X(Y_k)}{f_Y(Y_k)}$$

où $Y_1, \ldots, Y_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi que Y.

Exercice 1. On cherche à évaluer, pour tout $a > 0$, l'intégrale

$$I(a) = \int_0^a \exp(-x^2)\, dx.$$

Créer un code Scilab permettant d'évaluer $I(a)$ par les méthodes déterministes des rectangles, du point central, des trapèzes et de Simpson. Evaluer $I(a)$ par la méthode de Monte-Carlo puis grace à la fonction `cdfnor` de Scilab. Dresser, pour différentes valeurs de a et pour $n = 10^2, 10^3, 10^4, 10^5$, un tableau

Exercice 2. Effectuer le même exercice sur $I(a)$ définie, pour tout $a > 0$, par

$$I(a) = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}} \exp(-x)\, dx$$

en comparant vos évaluations à celle obtenue grace à la fonction `cdfchi` de Scilab.

Exercice 3. Evaluer la valeur de π par la méthode de Monte-Carlo via les intégrales

$$\int_{[-1,+1]} 4\sqrt{1-x^2}\, dx$$

$$\int_{[-1,+1]^2} \mathrm{I}_{(x^2+y^2 \leqslant 1)}\, dxdy \qquad \text{et} \qquad \int_{[-1,+1]^3} \frac{3}{4} \mathrm{I}_{(x^2+y^2+z^2 \leqslant 1)}\, dxdydz.$$

Comparer vos 3 résultats avec les évaluations obtenues grace aux fonctions `integrate`, `int2d`, et `int3d`, de Scilab.

Exercice 4. Soit f_a la fonction définie, sur l'intervalle $[0, 1]$, par

$$f_a(x) = x(1-x)\sin^2(ax(1-x))$$

avec $a > 0$. Pour $a = 1, 10, 50, 100$, créer un code Scilab permettant d'évaluer l'intégrale

$$I(a) = \int_0^1 f_a(x)\, dx$$

par les méthode déterministes classiques, par la méthode de Monte-Carlo sur l'intervalle $[0, 1]$ et par la méthode de Monte-Carlo avec rejet sur le rectangle $[0, 1] \times [0, 1/4]$.