Université de Bordeaux
Master 1, TD3

Probabilités et statistique
2020/21

Variables aléatoires continues

Exercice 1. Soit (Z_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Soit Y une variable aléatoire géométrique $\mathcal{G}(p)$ indépendante de (Z_n). Montrer que la variable aléatoire $X = \sum_{k=1}^{Y} Z_k$ suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda p)$.

Exercice 2.

1. Soit X une v.a. de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Calculer la fonction caractéristique de X. En déduire l'espérance et la variance de X.
2. Soient X et Y deux v.a. indépendantes de lois de Poisson respectives $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$. Donner la loi de probabilité de $X + Y$.

Exercice 3. Il est facile de générer des variables aléatoires à partir de la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Si $X = -\log(U)/\lambda$ avec $\lambda > 0$, montrer que X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.
2. Soit $Y = \lfloor 1 + nU \rfloor$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et où $\lfloor \rfloor$ désigne la partie entière. Donner la loi de Y.

Exercice 4. Soit ε une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et soit X une variable aléatoire à densité f. On suppose que ε et X sont indépendantes.

1. Montrer que $Y = \varepsilon X$ possède une densité et la calculer.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Y et X aient la même loi.

Exercice 5. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi Gamma $\mathcal{G}(a, \lambda)$ avec $a, \lambda > 0$, si sa densité de probabilité est donnée par

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \lambda^a x^{a-1} \exp(-\lambda x) \mathbb{1}_{x>0}$$

avec

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} \exp(-x) dx.$$

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de lois $\mathcal{G}(a, \lambda)$ et $\mathcal{G}(b, \lambda)$ avec $a, b, \lambda > 0$. Si
$$U = X + Y \qquad \text{et} \qquad V = \frac{X}{X+Y},$$
montrer que U et V sont indépendantes et trouver leurs lois marginales.
2. En déduire que
$$B(a, b) := \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$
3. Si $X_1, ..., X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, donner la loi de $S_n = X_1 + ... + X_n$ et trouver son espérance et sa variance.
4. Si $Y_1, ..., Y_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$, donner la loi de $T_n = Y_1^2 + ... + Y_n^2$ et trouver son espérance et sa variance.

Exercice 6. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[-a, a]$ avec $a > 0$. On pose

$$U = \frac{X+Y}{2} \quad \text{et} \quad V = \frac{X-Y}{2}.$$

1. Soient $\mathcal{D}$ le carré $[-a, a]^2$ et Δ le losange de base $[-a, a]$ et de hauteur $[-a, a]$. Soit h l'application de $\mathcal{D}$ dans Δ définie, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, par

$$h(x, y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right).$$

   Montrer que $(U, V) = h(X, Y)$ est un vecteur aléatoire à densité et calculer sa densité.
2. Montrer que U et V suivent la loi triangulaire symétrique dont la densité est donnée par

$$f(w) = \frac{1}{a^2}(a - |w|)\mathbb{1}_{\{|w| \leqslant a\}}.$$

3. Les variables aléatoires U et V sont elles indépendantes ?

Exercice 7. Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F. On suppose que F est inversible, d'inverse F^{-1}.

1. Si U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$, montrer que la variable aléatoire $F^{-1}(U)$ a même loi que X.
2. Si F est continue, montrer que $F(X)$ suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 8. Sam et Max ont rendez-vous à 14h00 mais ils sont peu ponctuels : les instants S et M de leurs arrivées sont deux variables aléatoires indépendantes uniformément réparties dans $[14, 15]$. Calculer les fonctions de répartition des variables T_1 durée d'attente du premier arrivé et T_2 durée d'attente de Sam.

Exercice 9. Calculer la fonction de répartition de la loi $\mathcal{U}([0, 2])$. Même question avec la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

Exercice 10. On considère $X_1, ..., X_n$ n v.a. i.i.d.

1. On suppose que $X_i \sim \mathcal{U}([0, \theta])$ avec $\theta \in \mathbb{R}_+^*$ inconnu. Donner l'E.M.V. de θ.
2. On suppose que $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ inconnus. Donner l'E.M.V. de (μ, σ).
3. On suppose que $X_i \sim \mathcal{U}([\theta, \theta + 1])$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ inconnu. Donner l'E.M.V. de θ.

Exercice 11. On s'intéresse à la durée de vie de n composants électroniques. On note leurs durée de vie $X_1, ..., X_n$ n v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. On observe ces composants électroniques pendant un temps T et l'on observe les variables $Y_1, ..., Y_n$ définies par $Y_i = \min(X_i, T)$.

1. Donner la loi de $(Y_1, ..., Y_n)$,
2. Calculer l'E.M.V. de λ.