CORRECTION PARTIEL
PROBABILITÉS & STATISTIQUE

Problème I

1) $\{X=k\} = \{$ les k premiers jetons portent le même numero et le tirage $k+1$ porte un numero différent$\}$

$$= \left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i \cap \overline{A}_{k+1}\right) \dot{\cup} \left(\bigcap_{i=1}^{k} \overline{A}_i \cap A_{k+1}\right)$$

X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$

$$\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i \cap \overline{A}_{k+1}\right) + \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} \overline{A}_i \cap A_{k+1}\right) \quad \text{(union disjointe)}$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_i)\, \mathbb{P}(\overline{A}_{k+1}) + \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(\overline{A}_i)\, \mathbb{P}(A_{k+1}) \quad \text{(indépendance)}$$

$$= p^k(1-p) + (1-p)^k p$$

on remarque que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) = p(1-p)\sum_{k=0}^{+\infty} p^k + p(1-p)\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)$

$$= p + 1 - p = 1$$

Donc X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

2) Y est une v.a discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ (mais pour la même raison que précédemment on aura Y à valeurs dans $\mathbb{N}^*$)

Donc (X,Y) est un vecteur discret à valeurs dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

$k, k' \in \mathbb{N}^*$

$$P(X=k, Y=k') = P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i \bigcap_{j=k+1}^{k+k'} \overline{A}_j \cap A_{k+k'+1}\right) \dot{\cup} \left(\bigcap_{i=1}^{k} \overline{A}_i \bigcap_{j=k+1}^{k+k'} A_j \cap \overline{A}_{k+k'+1}\right)\right)$$

$$= p^k (1-p)^{k'} p + (1-p)^k p^{k'} (1-p)$$

(On peut vérifier que la somme sur k et k' donne 1).

<u>Loi de Y:</u> $k' \in \mathbb{N}^*$

$$P(Y=k') = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k, Y=k') = p^2(1-p)^{k'} \sum_{k=0}^{+\infty} p^k + (1-p)^2 p^{k'} \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k$$

$$= p^2 (1-p)^{k'-1} + (1-p)^2 p^{k'-1}$$

3) $P(X=Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=Y=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[p^k (1-p)^k p + (1-p)^k p^k (1-p)\right]$

$$= \frac{p^2(1-p)}{1-p(1-p)} + \frac{p(1-p)^2}{1-p(1-p)} = \frac{p(1-p)}{1-p(1-p)} \quad \text{car } |p(1-p)| < 1$$

<u>Problème II</u>

1) $x \in \mathbb{R}$ $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} 2e^{-(x+y)} \mathbb{1}_{0 \le x \le y}\,dy$

$$= 0 \text{ si } x < 0$$

Si $x \geq 0$, $f_X(x) = \int_x^{+\infty} 2e^{-(x+y)}\,dy = 2e^{-x} e^{-x} = 2e^{-2x}$

donc $f_X(x) = 2e^{-2x} \mathbb{1}_{x \geq 0}$ $X \sim \mathcal{E}(2)$

$y \in \mathbb{R}$, $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} 2e^{-(x+y)} \mathbb{1}_{0 \le x \le y}\,dx = 0$ si $y < 0$

Si $y \geq 0$, $\quad f_Y(y) = \int_0^y 2e^{-(x+y)} dx = 2e^{-y}(1-e^{-y})$

Donc $f_Y(y) = 2e^{-y}(1-e^{-y}) \mathbb{1}_{y>0}$

2) $F_Y(t) = 0$ si $t<0$

si $t \geq 0$ $\quad F_Y(t) = \int_0^t 2e^{-y}(1-e^{-y}) dy = \left[-2e^{-y} + e^{-2y}\right]_0^t = 1 - 2e^{-t} + e^{-2t}$

$\mathbb{E}[Y]$ existe car Y à valeurs positives.

$\mathbb{E}[Y] = \int_0^{+\infty} 2y e^{-y}(1-e^{-y}) dy = 2\int_0^{+\infty} y e^{-y} dy - \int_0^{+\infty} y 2e^{-2y} dy$

$= 2\mathbb{E}[A] - \mathbb{E}[B]$ avec $A \sim \mathcal{E}(1)$ et $B \sim \mathcal{E}(2)$

$= 2 - 1/2 = 3/2$

3) On a pas $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ donc non X et Y ne sont pas indépendantes.

Problème III

1) $V(a; x_1, \dots x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{a}{x_i^{a+1}} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x_i)$

$= \frac{a^n}{\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{a+1}}$

$\ln V(a; x_1, \dots x_n) = n \ln a - (a+1) \sum_{i=1}^n (\ln x_i)$ fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

$$\frac{\partial \ln V(a;x_1,\dots x_n)}{\partial a} = \frac{n}{a} - \sum_{i=1}^{n}(\ln x_i)$$

$$\frac{\partial \ln V}{\partial a}(a^*;x_1,\dots x_n) = 0 \iff a^* = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i)}$$

De plus $\frac{\partial \ln V}{\partial a} = -\frac{n}{a^2} < 0$ Donc l'E.M.V. est donné par

$$\hat{a}_n^{MV} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(X_i)}$$

2) $Z = \ln X$ Z à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ car X à valeurs dans $[1,+\infty[$.

$F_Z(t) = 0$ si $t \leq 0$

si $t \geq 0$, $F_Z(t) = P(Z \leq t) = P(\ln(X) \leq t) = P(X \leq e^t)$

$$= \int_1^{e^t} \frac{a}{x^{a+1}}\,dx = \left[-x^{-a}\right]_1^{e^t} = 1 - e^{-at}$$

donc $Z \sim \mathcal{E}(a)$

Problème IV

1) X, Y à densité, X et Y indépendantes $\Rightarrow$ (X,Y) à densité

et $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = e^{-x-y}\,\mathbb{1}_{x\geq 0}\,\mathbb{1}_{y \geq 0}$

2) $(U,V) = \phi(X,Y)$

avec $\phi : (\mathbb{R}^{+*})^2 \longrightarrow (\mathbb{R}^{+*})^2$

$(x,y) \longmapsto \left(\frac{x}{y}, y\right)$

on a $\phi^{-1} : (\mathbb{R}^{+*})^2 \longrightarrow (\mathbb{R}^{+*})^2$

$(u,v) \longmapsto (uv, v)$

ϕ et ϕ^{-1} $\mathcal{C}^\infty$ donc en particulier ϕ est un $\mathcal{C}^1$-difféo

Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ ~~mesurable~~

$$\mathbb{E}[h(U,V)] = \iint_{(\mathbb{R}^{+*})^2} h(\phi(x,y)) f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy = \iint_{(\mathbb{R}^{+*})^2} h(\phi(x,y)) e^{-(x+y)}\,dx\,dy$$

$$= \iint_{(\mathbb{R}^{+*})^2} h(u,v) e^{-(uv+v)} |\mathrm{Jac}\,\phi^{-1}(u,v)|\,du\,dv$$

$$|\mathrm{Jac}\,\phi^{-1}(u,v)| = \left|\det\left(\begin{pmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\right| = |v|$$

$$\mathbb{E}[h(U,V)] = \iint_{(\mathbb{R}^{+*})^2} h(u,v)\, v\, e^{-v(u+1)}\,du\,dv$$

donc (U,V) à densité et $f_{(U,V)}(u,v) = v e^{-v(u+1)} \mathbb{1}_{u \geq 0} \mathbb{1}_{v \geq 0}$

3) $f_V(v) = 0$ si $v < 0$

si $v \geq 0$
$$f_V(v) = \int_0^{+\infty} v e^{-v(u+1)}\,du = v e^{-v}\left[-\frac{e^{-vu}}{v}\right]_0^{+\infty} = e^{-v}$$

donc $V \sim \mathcal{E}(1)$.

$f_U(u) = 0$ si $u < 0$

si $u > 0$ $\quad f_U(u) = \int_0^{+\infty} v e^{-v(u+1)} dv \overset{IPP}{=} \left[-\frac{v e^{-v(u+1)}}{u+1} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-v(u+1)}}{u+1} dv$

$$= 0 + \left[\frac{-e^{-v(u+1)}}{(u+1)^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(u+1)^2}$$

Donc $f_U(u) = \frac{1}{(u+1)^2} \mathbb{1}_{u \geq 0}$

4) $f_{U,V}(u,v) \neq f_U(u) f_V(v)$ donc U et V ne sont pas indépendantes

5) $\mathbb{E}[U]$ existe car U positive

$$\mathbb{E}[U] = \int_0^{+\infty} \frac{u}{(u+1)^2} du = +\infty \quad \text{car } \frac{u}{(u+1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{u} \text{ non intégrable en } +\infty.$$

(on peut aussi remarquer que $\int_0^{+\infty} \frac{u\,du}{(u+1)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u+1} - \frac{1}{(u+1)^2} du = \left[\ln(u+1) + \frac{1}{u+1} \right]_0^{+\infty}$

$= +\infty$)