Université de Bordeaux
Master 2 2014/15

Compléments sur les processus markoviens de saut

Tous les résultats et preuves présents dans ce polycopié sont adaptés de [1] et [2].

1 Propriété de Markov forte

Propriété 1.1 (Propriété de Markov forte) *Soit τ un temps d'arrêt pour le processus markovien de saut $(X_t)_{t\geqslant 0}$. Alors conditionnellement à $(\tau < +\infty)$ et $(X_\tau = x)$, le processus $(Y_t = X_{\tau+t})_{t\geqslant 0}$ est indépendant de $\mathcal{F}_\tau^X$ et de même loi que $(X_t)_{t\geqslant 0}$ sachant $X_0 = x$.*

Preuve. On commence par montrer le résultat pour un temps d'arrêt constant $\tau = s$. pour tous $0 \leqslant s_1 < s_2 < ... < s_k < s$, $0 < t_1 < ... < t_l$ et $x, x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_k$ dans l'espace d'états E, on a

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(Y_{t_1} = y_1, ..., Y_{t_l} = y_l | X_{s_1} = x_1, ..., X_{s_k} = x_k, X_s = x) \\
&\quad = \frac{\mathbb{P}(X_{s_1} = x_1, ..., X_{s_k} = x_k, X_s = x, X_{t_1+s} = y_1, ..., X_{t_l+s} = y_l)}{\mathbb{P}(X_{s_1} = x_1, ..., X_{s_k} = x_k, X_s = x)} \\
&\quad = \frac{P_{x_1x_2}(s_2 - s_1)...P_{x_kx}(s - t_k)P_{xy_1}(t_l + s - s)...P_{y_{l-1}y_l}(t_k + s - t_{k-1} - s)}{P_{x_1x_2}(s_2 - s_1)...P_{x_kx}(s - t_k)} \\
&\quad = P_{xy_1}(t_l)...P_{y_{l-1}y_l}(t_k - t_{k-1}) \\
&\quad = \mathbb{P}(X_{t_1} = y_1, ..., X_{t_l} = y_l | X_0 = x).
\end{aligned}
$$

Passons maintenant au cas où τ prend ses valeurs dans une suite croissante $(s_j)_{j\geqslant 1}$ de réels positifs. Comme τ est un temps d'arrêt, on a

$$(\tau = s_j) = (\tau \leqslant s_j) \cap \overline{(\tau \leqslant s_{j-1})} \in \mathcal{F}_{s_j}^X.$$

Soit $A \in \mathcal{F}_\tau^X$, $0 < t_1 < ... < t_l$ et $x_1, ..., x_l$ dans E. En utilisant le résultat précédent on obtient

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A \cap \bigcap_{k=1}^{l} (Y_{t_k} = x_k) | X_{\tau=x}) \\
&\quad = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}((\tau = s_j) \cap A \cap \bigcap_{k=1}^{l} (X_{t_k+s_j} = x_k) | X_{s_j} = x) \\
&\quad = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}((\tau = s_j) \cap A | X_{s_j} = x) \mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{l} (X_{t_k} = x_k) | X_0 = x) \\
&\quad = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{l} (X_{t_k} = x_k) | X_0 = x).
\end{aligned}
$$

Pour le cas général, on rappelle que tout temps d'arrêt peut être approché par une suite décroissante de temps d'arrêts à valeurs dans une suite croissante

$$\tau_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\frac{k-1}{2^n} < \tau \frac{k}{2^n}},$$

de sorte que $\tau \leqslant \tau_n$ et τ_n tend vers τ lorsque n tend vers l'infini. On utilise le résultat précédent et la continuité à droite des trajectoires de X pour obtenir le résultat. $\square$

2 Équation de Kolmogorov rétrograde et progressive

Soit E un espace d'état dénombrable (pas nécessairement fini).

Théorème 2.1 (Équation de Kolmogorov rétrograde) *Pour tous x, y dans E, la fonction $t \mapsto P_{xy}(t)$ est dérivable et $P'_{xy}(t) = (QP(t))_{xy}$.*

Preuve. Conditionnellement à $X_0 = x$ on a $T_1 \sim \mathcal{E}(q_x)$, donc

$$\mathbb{P}(X_t = y, t < T_1 | X_0 = x) = \mathbb{P}(t < T_1 | X_0 = x)\delta_{xy} = e^{-q_x t}\delta_{xy}.$$

On note R la loi conditionnelle de (Z_1, T_1) sachant $X_0 = Z_0$: pour tous x, y dans E et tout borélien B de $\mathbb{R}$ on pose

$$R(x; y, B) = \mathbb{P}(Z_1 = y, T_1 \in B | Z_0 = x).$$

On sait que, conditionnellement à $Z_0 = x$, T_1 et Z_1 sont indépendantes, $T_1 \sim \mathcal{E}(q_x)$ et $Z_1 \sim (Q_{xy}/q_x, x \neq y)$, donc

$$R(x; y, B) = \mathbb{1}_{x \neq y} \frac{Q_{xy}}{q_x} \int_B q_x e^{-q_x t} dt.$$

Enfin on note π la loi conditionnelle de X_t sachant (Z_1, T_1, X_0) : pour tout x, y, z dans E et tout $s \geqslant 0$,

$$\pi(z, s, x; y) = \mathbb{P}(X_t = y | X_{T_1} = z, T_1 = s, X_0 = x).$$

D'après la propriété de Markov, on a

$$\begin{aligned}
\pi(z, s, x; y) &= \delta_{xy}\mathbb{1}_{s>t} + \mathbb{P}(X_t = y | X_s = z)\mathbb{1}_{s \leqslant t} \\
&= \delta_{xy}\mathbb{1}_{s>t} + P_{zy}(t-s)\mathbb{1}_{s \leqslant t}.
\end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(t \geqslant T_1, X_{T_1} = z, X_t = y | X_0 = x) \\
&\quad = \int_0^t \mathbb{P}(X_t = y | X_0 = x, X_s = z, T_1 = s)\mathbb{P}(Z_1 = z, T_1 \in ds | Z_0 = x) \\
&\quad = \int_0^t \pi(z, s, x; y) R(x; z, ds) \\
&\quad = \int_0^t P_{zy}(t-s) \frac{Q_{xz}}{q_x} q_x e^{-q_x s} ds.
\end{aligned}$$

Ainsi, on arrive à réexprimer $P_{xy}(t)$ de la façon suivante

$$\begin{aligned} P_{xy}(t) &= \mathbb{P}(X_t = y, t < T_1 | X_0 = x) + \sum_{z \neq x} \mathbb{P}(X_t = y, t \geqslant T_1, X_{T_1} = z | X_0 = x) \\ &= e^{-q_x t}\delta_{xy} + \sum_{z\neq x} \int_0^t P_{zy}(t-s) \frac{Q_{xz}}{q_x} q_x e^{-q_x s} ds \\ &= e^{-q_x t}\delta_{xy} + \sum_{z\neq x} \int_0^t P_{zy}(u) \frac{Q_{xz}}{q_x} q_x e^{q_x (u-t)} du, \end{aligned}$$

en faisant le changement de variable $u = t - s$. En multipliant l'égalité précédente par $e^{q_x t}$ et en intervertissant la somme et l'intégrale (les fonctions sont positives donc on peut le faire), on obtient

$$e^{q_x t} P_{xy}(t) = \delta_{xy} + \int_0^t \sum_{z \neq x} P_{zy}(u) \frac{Q_{xz}}{q_x} q_x e^{q_x u} du. \tag{1}$$

On en déduit directement que $P_{xy}(t)$ est continue en t pour tous $x, y \in E$. De plus

$$0 \leqslant P_{zy}(u) \frac{Q_{xz}}{q_x} q_x e^{q_x u} \leqslant Q_{xz} e^{q_x t},$$

or Q_{xz} est une série convergente (en z, à x fixé) donc d'après le théorème de continuité sous le signe somme, $u \mapsto P_{zy}(u) \frac{Q_{xz}}{q_x} q_x e^{q_x u}$ est continue et donc $P_{xy}(t)$ est de classe C^1. De plus

$$e^{q_x t}(q_x P_{xy}(t) + P'_{xy}(t)) = \sum_{z \neq x} e^{q_x t} Q_{xz} P_{zy}(t) \tag{2}$$

ce qui implique

$$P'_{xy}(t) = Q_{xx} P_{xy}(t) + \sum_{z \neq x} Q_{xz} P_{zy}(t) = \sum_{z \in E} Q_{xz} P_{zy}(t).$$

$\square$

Théorème 2.2 (Équation de Kolmogorov progressive) *Pour tous x, y dans E, la fonction $t \mapsto P_{xy}(t)$ est dérivable et $P'_{xy}(t) = (P(t)Q)_{xy}$.*

Pour montrer l'équation de Kolmogorov rétrograde, l'idée était de conditionner par rapport au premier saut du processus. Pour l'équation de Kolmogorov progressive, nous allons conditionner par rapport au dernier saut avant t ce qui entraîne quelques difficultés supplémentaires par rapport au cas rétrograde. Avant de prouver ce théorème, on commence par prouver le lemme suivant.

Lemme 2.1 *On a*

$$\begin{aligned} &q_{x_n} \mathbb{P}(T_n \leqslant t < T_{n+1} | Z_0 = x_0, Z_1 = x_1, ..., Z_n = x_n) \\ &\quad = q_{x_0} \mathbb{P}(T_n \leqslant t < T_{n+1} | Z_0 = x_n, ..., Z_{n-1} = x_1, Z_n = x_0). \end{aligned}$$

Preuve du lemme. Conditionnellement à $Z_0 = x_0, ..., Z_n = x_n$, les temps d'attente $S_1, ..., S_{n+1}$ sont indépendants et $S_k \sim \mathcal{E}(q_{x_{k-1}})$. Ainsi le membre de droite est donné par

$$\int_{\delta(t)} q_{x_n} \exp\left(-q_{x_n}(t - s_1 - ... - s_n)\right) \prod_{k=1}^{n} q_{x_{k-1}} \exp(-q_{x_{k-1}} s_k) ds_k$$

avec $\Delta(t) = \{(s_1, ..., s_n) : s_1 + ... + s_n \leqslant t \text{ et } s_1, ..., s_n \geqslant 0\}$. En faisant le changement de variable $u_1 = t - s_1 - ... - s_n$ et $u_k = s_{n-k+2}$ pour $k = 2, ..., n$, on obtient

$$\begin{aligned} & q_{x_n} \mathbb{P}(T_n \leqslant t < T_{n+1} | Z_0 = x_0, Z_1 = x_1, ..., Z_n = x_n) \\ & \quad = \int_{\delta(t)} q_{x_0} \exp\left(-q_{x_n}(t - u_1 - ... - u_n)\right) \prod_{k=1}^{n} q_{x_{n-k+1}} \exp(-q_{x_{n-k+1}} u_k) du_k \\ & = q_{x_0} \mathbb{P}(T_n \leqslant t < T_{n+1} | Z_0 = x_n, ..., Z_{n-1} = x_1, Z_n = x_0). \end{aligned}$$

□

Preuve du théorème. On a

$$P_{xy}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{z \neq y} \mathbb{P}(T_n \leqslant t < T_{n+1}, Z_{n-1} = z, Z_n = y | Z_0 = x). \tag{3}$$

Or le lemme précédent nous donne

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(T_n \leqslant t < T_{n+1} | Z_0 = x, Z_{n-1} = z, Z_n = y) \\ & \quad = \frac{q_x}{q_y} \mathbb{P}(T_n \leqslant t < T_{n+1} | Z_0 = y, Z_1 = z, Z_n = x). \end{aligned}$$

En utilisant la propriété de Markov, on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(T_n \leqslant t < T_{n+1} | Z_0 = x, Z_{n-1} = z, Z_n = y) \\ & \quad = \frac{q_x}{q_y} \int_0^t \mathbb{P}(T_n \leqslant t < T_{n+1} | Z_0 = y, Z_1 = z, Z_n = x, T_1 = s) \mathbb{P}(T_1 \in ds | Z_0 = y, Z_1 = z, Z_n = x) ds \\ & \quad = \frac{q_x}{q_y} \int_0^t \mathbb{P}(T_n - s \leqslant t - s < T_{n+1} - s | X_s = z, Z_n = x, T_1 = s) \mathbb{P}(T_1 \in ds | Z_0 = y) \\ & \quad = \frac{q_x}{q_y} \int_0^t \mathbb{P}(T_{n-1} \leqslant t - s < T_n | Z_0 = z, Z_{n-1} = x) q_y e^{-q_y s} ds. \end{aligned}$$

On réapplique alors une nouvelle fois le lemme pour obtenir

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(T_n \leqslant t < T_{n+1} | Z_0 = x, Z_{n-1} = z, Z_n = y) \\ & \quad = q_x \int_0^t e^{-q_y s} \frac{q_z}{q_x} \mathbb{P}(T_{n-1} \leqslant t - s < T_n | Z_0 = x, Z_{n-1} = z) ds. \end{aligned}$$

Ainsi, on peut réinjecter la dernière égalité dans (3) ce qui nous donne, en utilisant le théorème d'interversion des signes intégrale et somme pour des fonctions positives,

$$
\begin{aligned}
& P_{xy}(t) \\
= \;& \delta_{xy} e^{-q_x t} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{z \neq y} \mathbb{P}(T_n \leqslant t < T_{n+1} | Z_0 = x, Z_{n-1} = z, Z_n = y) \mathbb{P}(Z_{n-1} = z, Z_n = y | Z_0 = x) \\
= \;& \delta_{xy} e^{-q_x t} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{z \neq y} \int_0^t \mathbb{P}(T_{n-1} \leqslant t - s < T_n | Z_0 = x, Z_{n-1} = z) \mathbb{P}(Z_{n-1} = z, Z_n = y | Z_0 = x) q_z e^{-q_y s} ds \\
= \;& \delta_{xy} e^{-q_x t} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{z \neq y} \int_0^t \mathbb{P}(T_{n-1} \leqslant t - s < T_n, Z_{n-1} = z | Z_0 = x) \mathbb{P}(Z_n = y | Z_0 = x, Z_{n-1} = z) q_z e^{-q_y s} ds \\
= \;& \delta_{xy} e^{-q_x t} + \int_0^t \sum_{z \neq y} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_{n-1} \leqslant t - s < T_n, Z_{n-1} = z | Z_0 = x) Q_{zy} e^{-q_y s} ds \\
= \;& \delta_{xy} e^{-q_x t} + \int_0^t \sum_{z \neq y} P_{xz}(t-s) Q_{zy} e^{-q_y s} ds.
\end{aligned}
$$

En multipliant par $e^{q_y t}$ et en faisant le changement de variable $u = t - s$, l'égalité précédente devient

$$e^{q_y t} P_{xy}(t) = \delta_{xy} + \int_0^t \sum_{z \neq y} P_{xz}(u) Q_{zy} e^{q_y u} du. \tag{4}$$

D'après (2), $u \mapsto e^{q_x u} P_{xz}(u)$ est croissante pour tous $x, z \in E$. Ainsi, $P_{xz}(u) Q_{zy} \leqslant P_{xz}(t) Q_{zy} e^{q_x t}$ pour tous $u \in [0, t]$. De plus $\sum_{z \neq y} P_{xz}(t) Q_{zy} < +\infty$ car sinon $\sum_{z \neq y} P_{xz}(s) Q_{zy} = +\infty$ pour tous $s \geqslant t$ ce qui est contradictoire avec (4). On peut donc appliquer le théorème de continuité sous le signe intégrale pour pouvoir dériver (4) et obtenir

$$P'_{xy}(t) + q_y P_{xy}(t) = \sum_{z \neq y} P_{xz}(t) Q_{zy}.$$

$\square$

3 Définitions équivalentes des processus markoviens de saut

Théorème 3.1 *Soit Q une matrice vérifiant $Q_{xy} \leqslant 0$ pour tous $x \neq y$ et $Q_{xx} = \sum_{y \neq x} Q_{xy} \leqslant 0$. On pose $q_x = -Q_{xx}$ et on définit la matrice Π par $\Pi_{xy} = q_x^{-1} Q_{xy} \mathbb{1}_{x \neq y}$ si $q_x > 0$ et $\Pi_{xy} = \mathbb{1}_{x=y}$ si $q_x = 0$. Alors Π est une matrice stochastique. Soit $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de matrice de transition Π et $(N_t)_{t \geqslant 0}$ un processus de Poisson d'intensité 1 indépendant de $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont les instants de sauts sont notés $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On pose*

$$S_n = \frac{V_n - V_{n-1}}{q_{Z_{n-1}}} \mathbb{1}_{q_{Z_{n-1}} \neq 0} + (+\infty) \mathbb{1}_{q_{Z_{n-1}} = 0}$$

pour tout $n \geqslant 1$ et $T_0 = 0$, $T_n = S_1 + ... + S_n$. Alors, si la condition de non explosion $\lim T_n = +\infty$ est satisfaite, le processus

$$X_t = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n \mathbb{1}_{T_n \leqslant t < T_{n+1}}$$

est un processus markovien de saut de générateur infinitésimal Q.

Preuve. On commence par montrer que la propriété de Markov faible est vérifiée par X.

Lemme 3.1 *Conditionnellement à $(X_s = x)$, $(X_{t+s})_{t\geqslant 0}$ est indépendant de $\mathcal{F}_s^X$ et à même loi que $(X_t)_{t\geqslant 0}$ sachant $X_0 = x$.*

On définit $\tilde{X}_t = X_{t+s}$ et on note $(\tilde{Z}_n)_{n\geqslant 0}$ la suite des valeurs de $(\tilde{X})$ et $(\tilde{S}_n)_{n\geqslant 0}$ les temps d'attente de $(\tilde{X})$. On doit montrer que pour tout $A \in \mathcal{F}_s^X$, tous $x_1, ..., x_n \in E$ et tous $s_1, ..., s_n \geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}((\tilde{Z}_1 = x_1, ..., \tilde{Z}_n = x_n, \tilde{S}_1 > s_1, ..., \tilde{S}_n > s_n) \cap A \cap (X_s = x))\\ &\quad = \mathbb{P}(Z_1 = x_1, ..., Z_n = x_n, S_1 > s_1, ..., S_n > s_n | X_0 = x)\mathbb{P}(A \cap (X_s = x)). \qquad (5)\end{aligned}$$

On peut remarquer que

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}((\tilde{Z}_1 = x_1, ..., \tilde{Z}_n = x_n, \tilde{S}_1 > s_1, ..., \tilde{S}_n > s_n) \cap A \cap (X_s = x))\\ &\quad = \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}((\tilde{Z}_1 = x_1, ..., \tilde{Z}_n = x_n, \tilde{S}_1 > s_1, ..., \tilde{S}_n > s_n) \cap A \cap (X_s = x) \cap (T_m \leqslant s < T_{m+1})). \qquad (6)\end{aligned}$$

De plus on a, pour tous $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}((\tilde{Z}_1 = x_1, ..., \tilde{Z}_n = x_n, \tilde{S}_1 > s_1, ..., \tilde{S}_n > s_n) \cap A \cap (X_s = x) \cap (T_m \leqslant s < T_{m+1}))\\ &\quad = \mathbb{P}((Z_m = x, Z_{m+1} = x_1, ..., Z_{m+n} = x_n, S_{m+1} > (s_1 + (s - T_m)), S_{m+2} > s_2, ..., S_{m+n} > s_n)\\ &\qquad \cap A \cap (0 \leqslant s - T_m < S_{m+1}))\\ &\quad = \mathbb{P}((Z_{m+1} = x_1, ..., Z_{m+n} = x_n, S_{m+1} > (s_1 + (s - T_m)), S_{m+2} > s_2, ..., S_{m+n} > s_n)|(Z_m = x)\\ &\qquad \cap A \cap (0 \leqslant s - T_m < S_{m+1})) \times \mathbb{P}((X_s = x) \cap A \cap (T_m \leqslant s < T_{m+1})). \qquad (7)\end{aligned}$$

Si on note $A_m = A \cap (T_m \leqslant s < T_{m+1})$ alors on peut remplacer A par A_m dans l'équation précédente et $A_m \in \sigma(Z_0, ..., Z_m, S_1, ..., S_m))$. De plus, conditionnellement à $Z_m = x$, S_{m+1} est indépendante de $(Z_{m+1}, ..., Z_{m+n}, S_{m+2}, ..., S_{m+n})$, T_m et A_m. Donc

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}((Z_{m+1} = x_1, ..., Z_{m+n} = x_n, S_{m+1} > (s_1 + (s - T_m)), S_{m+2} > s_2, ..., S_{m+n} > s_n)|(Z_m = x)\\ &\qquad \cap A_m \cap (0 \leqslant s - T_m < S_{m+1}))\\ &\quad = \mathbb{P}((Z_{m+1} = x_1, ..., Z_{m+n} = x_n, S_{m+2} > s_2, ..., S_{m+n} > s_n)|(Z_m = x)\\ &\qquad \cap A_m \cap (0 \leqslant s - T_m < S_{m+1}))\\ &\qquad \times \mathbb{P}((S_{m+1} > (s_1 + (s - T_m))|(Z_m = x) \cap A_m \cap (0 \leqslant s - T_m < S_{m+1})). \qquad (8)\end{aligned}$$

En appliquant la propriété de Markov pour la chaîne $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nous obtenons

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}((Z_{m+1} = x_1, ..., Z_{m+n} = x_n, S_{m+1} > s_1, ..., S_{m+n} > s_n)|(Z_m = x) \cap A_m \cap (0 \leqslant s - T_m < S_{m+1}))\\ &\quad = \mathbb{P}((Z_1 = x_1, ..., Z_n = x_n, S_1 > s_1, ..., S_n > s_n)|(X_0 = x)).\end{aligned}$$

De plus, d'après la propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle et comme on a toujours que S_{m+1} est indépendante de T_m et A_m, on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}((S_{m+1} > (s_1 + (s - T_m))|(Z_m = x) \cap A_m \cap (0 \leqslant s - T_m < S_{m+1})) \\
&\quad = \mathbb{P}((S_{m+1} > (s_1 + (s - T_m))|(Z_m = x) \cap (0 \leqslant s - T_m < S_{m+1})) \\
&\quad = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}((S_{m+1} > (s_1 + (s - t))|(Z_m = x) \cap (0 \leqslant s - t < S_{m+1}))f_{T_m}(t)dt \\
&\quad = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(S_{m+1} > s_1|Z_m = x)f_{T_m}(t)dt \\
&\quad = \mathbb{P}(S_{m+1} > s_1|Z_m = x).
\end{aligned}$$

En réinjectant les deux dernières égalités dans (8), puis (7), puis (6), nous obtenons (5) ce qui prouve le lemme.

Il suffit maintenant d'appliquer le lemme pour montrer le théorème : D'après la propriété de Markov du lemme, on a, pour tous $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant t_0 < t_1 < ... < t_n < s < t$, $x_0, ..., x_n, x, y \in E$,

$$\mathbb{P}(X_t = y|X_{t_0} = x_0, ..., X_{t_n} = x_n, X_s = x) = \mathbb{P}(X_t = y|X_s = x) = \mathbb{P}(X_{t-s} = y|X_0 = x),$$

Donc $(X_t)_{t \geqslant 0}$ est un processus markovien de saut homogène. On note $\tilde{Q}$ son générateur infinitésimal. Pour conclure il faut montrer que le générateur infinitésimal de X est donné par Q. Si $Q_{xx} \neq 0$, on sait que, conditionnellement à $(X_0 = x)$, le premier temps de saut T_1 suit une loi $\mathcal{E}(-\tilde{Q}_{xx})$ et la position après le premier saut Z_1 a pour loi $(-\tilde{Q}_{xy}/\tilde{Q}_{xx}, y \neq x)$. Or, par définition on a $T_1 \sim \mathcal{E}(-Q_{xx})$ et Z_1 a pour loi $(-Q_{xy}/Q_{xx}, y \neq x)$. Idem si $Q_{xx} = 0$. Ainsi on peut conclure que $\tilde{Q} = Q$. □

4 Condition nécessaire et suffisante de non explosion

Théorème 4.1 *On conserve les notations du théorème précédent. La condition de non explosion* $\lim_{n \to +\infty} T_n = +\infty$ *est satisfaite si et seulement si*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{q_{Z_n}} = +\infty \quad p.s.$$

preuve. Le critère de non explosion est équivalent à $\sum_{n=1}^{+\infty} S_n = +\infty$ p.s. On a vu que les v.a. S_n peuvent se réécrire comme $S_n = U_n/q_{Z_{n-1}}$ avec $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{E}(1)$ indépendantes de $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On doit donc montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{U_{n+1}}{q_{Z_n}} = +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{q_{Z_n}} = +\infty \qquad p.s.$$

pour une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{E}(1)$. Comme $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des v.a. indépendantes, il suffit de montrer que pour toute suite réelle positive $(\lambda_n)_{n \geqslant 0}$ on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{U_{n+1}}{\lambda_n} = +\infty \quad p.s. \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n} = +\infty.$$

Tout d'abord, on a

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{U_{n+1}}{\lambda_n}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{U_{n+1}}{\lambda_n}<+\infty \quad p.s. \Leftarrow \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\lambda_n}<+\infty.$$

On suppose maintenant que $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\lambda_n}=+\infty$. En utilisant l'indépendance des $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et leur loi, on obtient par des calculs standards (cf feuille TD1)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{U_{n+1}}{\lambda_n}}\right] &= \mathbb{E}\left[\prod_{n=0}^{+\infty}e^{-\frac{U_{n+1}}{\lambda_n}}\right]=\prod_{n=0}^{+\infty}\mathbb{E}\left[e^{-\frac{U_{n+1}}{\lambda_n}}\right]\\ &= \prod_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda_n}{\lambda_n+1}=\prod_{n=0}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{\lambda_n}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Si $1/\lambda_n\to 0$ alors $\log(1+1/\lambda_n)\sim 1/\lambda_n$ est une série divergente à termes positifs. Donc

$$\log\left(\prod_{n=0}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{\lambda_n}\right)^{-1}\right)=-\sum_{n=0}^{+\infty}\log\left(1+\frac{1}{\lambda_n}\right)=-\infty$$

et ainsi

$$\mathbb{E}\left[e^{-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{U_{n+1}}{\lambda_n}}\right]=0$$

ce qui implique que $\sum_{n=0}^{+\infty}U_{n+1}/\lambda_n=+\infty$ p.s.

Sinon, à une sous-suite près $1/\lambda_n\geqslant 1/c>0$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Alors on a

$$\prod_{n=0}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{\lambda_n}\right)^{-1}\leqslant\prod_{n=0}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{c}\right)^{-1}=0$$

et ainsi

$$\mathbb{E}\left[e^{-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{U_{n+1}}{\lambda_n}}\right]=0$$

ce qui implique encore une fois que $\sum_{n=0}^{+\infty}U_{n+1}/\lambda_n=+\infty$ p.s. □

5 Existence d'une probabilité invariante

Théorème 5.1 *Soit $(X_t)_{t\geqslant 0}$ un processus markovien de saut irréductible. Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes.*

1. *Il existe un état x de E récurrent positif.*
2. *Tous les états de E sont récurrents positifs.*
3. *Il existe une probabilité invariante ν.*

Dans ce cas, on a pour tout x dans E,

$$\mathbb{E}_x[R_x]=\frac{1}{q_x\nu_x},$$

avec R_x le premier temps de retour de $(X_t)_{t\geqslant 0}$ en x donné par

$$R_x=\inf\{t\geqslant T_1|X_t=x\}.$$

Preuve. Pour démontrer le résultat on commence par rappeler une propriété des chaînes de Markov en temps discret.

Propriété 5.1 *Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de matrice de transition Π irréductible et récurrente sur l'espace d'état dénombrable E. Soit x un état de E et R_x^Z le premier temps de retour en x*

$$R_x^Z = \inf\{n \geqslant 1; Z_n = x\}.$$

Soit la mesure γ^x définie par

$$\gamma_y^x = \mathbb{E}_x[\sum_{n=1}^{R_x^Z} \mathbb{1}_{Z_n=y}]$$

et représentant le nombre moyen de visites à l'état y lors d'une excursion de $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ partant de x et revenant en x. Alors γ^x est une mesure invariante strictement positive pour Π, et toute autre mesure invariante μ est égale à $\mu(x)\gamma^x$.

On prouve maintenant le théorème. Il est évident que $2 \Rightarrow 1$. Supposons maintenant que 1 est vraie et montrons 3. Comme x est récurrent positif pour $(X_t)_{t\geqslant 0}$ il est en particulier récurrent pour $(X_t)_{t\geqslant 0}$ et donc pour $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit α_y^x le nombre moyen de visites à l'état y lors d'une excursion de $(X_t)_{t\geqslant 0}$ partant de x et revenant en x

$$\alpha_y^x = \mathbb{E}_x[\sum_{T_n\leqslant R_x} \mathbb{1}_{X_{T_n}=y}] = \mathbb{E}_x[\sum_{T_n\leqslant R_x} \mathbb{1}_{Z_n=y}] = \mathbb{E}_x[\sum_{n=1}^{R_x^Z} \mathbb{1}_{Z_n=y}] = \gamma_y^x.$$

Conditionnellement à $(Z_n = y)$ on sait que le temps de séjour S_{n+1} en y de $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est indépendant de Z_n et de loi exponentielle de paramètre q_y. On a donc

$$\mathbb{E}_x[R_x] = \mathbb{E}[\sum_{y\in E}\sum_{T_n\leqslant R_x} \mathbb{1}_{Z_n=y}S_{n+1}] = \sum_{y\in E}\frac{\gamma_y^x}{q_y}.$$

On pose $\nu_y^x = \gamma_y^x q_y^{-1}$ pour tous $x, y \in E$, donc $\nu = D^{-1}\gamma^x$ où D est la matrice diagonale des (q_x). Alors, d'après le rappel, γ^x est invariante pour Π donc $\nu = D^{-1}\gamma^x$ est invariante pour Q. Finalement, on a

$$\sum_{y\in E}\nu_y^x = \sum_{y\in E}\frac{\gamma_y^x}{q_y} = \mathbb{E}_x[R_x] < +\infty$$

par hypothèse puisque x est récurrent positif. Donc $\frac{1}{\mathbb{E}_x[R_x]}\nu^x$ est une probabilité invariante pour Q. On a donc bien montré que $1 \Rightarrow 3$.

Supposons enfin que 3 est vraie et montrons 2. Soit ν une probabilité invariante, donc $\nu Q = 0$. Alors $D\nu$ est invariante par Π, donc d'après le rappel, on a

$$\gamma_y^x = \frac{q_y\nu_y}{q_x\nu_x},$$

d'où

$$\mathbb{E}_x[R_x] = \sum_{y\in E}\frac{\gamma_y^x}{q_y} = \sum_{y\in E}\frac{\nu_y}{q_x\nu_x} = \frac{1}{q_x\nu_x} < +\infty$$

car une loi invariante est toujours strictement positive (le processus est irréductible et récurrent). Donc tous les états de E sont récurrents positifs. Ainsi on a montré que $3 \Rightarrow 2$ et on a obtenu la caractérisation de la loi invariante. $\square$

6 Théorème ergodique

Théorème 6.1 (Théorème ergodique) *Soit $(X_t)_{t\geqslant 0}$ un processus markovien de saut irréductible et récurrent positif, Q son générateur infinitésimal et ν son unique probabilité invariante. Alors pour toute fonction $f : E \to \mathbb{R}$ positive ou bornée on a*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(X_s)ds = \sum_{x\in E} f(x)\nu_x \quad p.s.$$

Preuve. Remarquons tout d'abord que

$$\frac{1}{t}\int_0^t f(X_s)ds = \frac{1}{t}\int_0^t \sum_{x\in E} f(x)\mathbb{1}_{X_s=x}ds = \sum_{x\in E} f(x)\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{1}_{X_s=x}ds$$

car f est bornée ou positive. Il suffit donc de montrer que pour tout $x \in E$,

$$\frac{1}{t}\int_0^t f(X_s)ds = \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{1}_{X_s=x}ds = \nu_x \quad p.s.$$

On note $H_{\{x\}}$ le premier temps d'atteinte de x qui est fini car le processus est récurrent, $N_x(t)$ le nombre de visites en x jusqu'à l'instant t

$$N^x(t) = \sum_{T_n\leqslant t} \mathbb{1}_{Z_n=x},$$

et S_k^x le temps passé dans l'état x au cours de sa k-ième visite. Comme la $N^x(t)$-ième visite en x n'est pas forcément terminée en t, on a

$$\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{N^x(t)-1} S_k^x < \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{1}_{X_s=x}ds \leqslant \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{N^x(t)} S_k^x. \tag{9}$$

De plus, les variables aléatoires (S_n^x) sont indépendantes de loi exponentielle de paramètre q_x. On peut remarquer que l'on a

$$\frac{S_{N^x(t)}^x}{t} = \frac{S_{N^x(t)}^x}{N^x(t)} \times \frac{N^x(t)}{t}.$$

Or, puisque le processus est récurrent, $N^x(t) \to +\infty$ lorsque $t \to +\infty$. Donc une application directe du lemme de Borel-Cantelli nous donne $S_{N^x(t)}^x/N^x(t) \to 0$ p.s. et on verra dans la suite de la preuve que $\frac{N^x(t)}{t}$ tend vers une constante p.s. ce qui implique que $S_{N^x(t)}^x/t \to 0$ p.s. Les deux termes de gauche et de droite dans (9) ont donc la même limite p.s.(si elle existe) lorsque t tend vers l'infini. Par ailleurs, la loi forte des grands nombres pour $(S_n^x)_{n\in\mathbb{N}^*}$ donne

$$\frac{1}{N^x(t)}\sum_{k=1}^{N^x(t)} S_k^x \to \mathbb{E}_x[S_1^x] = \frac{1}{q_x}, \qquad t \to +\infty.$$

De plus, si on note R_x^k la durée de la k-ième excursion partant de x : les $(R_x^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont des temps d'arrêt et par la propriété de Markov forte ils sont indépendants entre eux, indépendants de $H_{\{x\}}$ et de même loi. Par ailleurs on a

$$H_{\{x\}} + R_x^1 + ... + R_x^{N^x(t)-1} \leqslant t \leqslant H_{\{x\}} + R_x^1 + ... + R_x^{N^x(t)}$$

donc

$$\frac{H_{\{x\}}}{N^x(t)} + \frac{N^x(t)-1}{N^x(t)} \frac{R_x^1 + ... + R_x^{N^x(t)-1}}{N^x(t)-1} \leqslant \frac{t}{N^x(t)} \leqslant \frac{H_{\{x\}}}{N^x(t)} + \frac{R_x^1 + ... + R_x^{N^x(t)}}{N^x(t)}$$

lorsque $N^x(t) > 0$ (i.e. t assez grand). On a facilement que $H_{\{x\}}/N^x(t)$ tend vers 0 p.s. et $\frac{N^x(t)-1}{N^x(t)}$ tend vers 1 p.s. quand t tend vers l'infini. La loi forte des grands nombres nous permet de conclure que $t/N^x(t)$ tend vers $\mathbb{E}_x[R_x]$ p.s. Donc finalement on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{1}_{X_s=x} ds &= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{N^x(t)} S_k^x = \lim_{t\to+\infty} \frac{N^x(t)}{t} \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{N^x(t)} \sum_{k=1}^{N^x(t)} S_k^x \\ &= \frac{1}{\mathbb{E}_x[R_x]}\frac{1}{q_x} = \frac{\nu_x q_x}{q_x} = \nu_x \qquad p.s.\end{aligned}$$

□

7 Convergence vers la mesure invariante

Théorème 7.1 *Soit $(X_t)_{t\geqslant 0}$ un processus markovien de saut à valeurs dans E, irréductible et récurrent positif et ν son unique probabilité invariante. Alors $\forall (x,y) \in E^2$,*

$$P_{xy}(t) \to \nu_y, \qquad t \to +\infty.$$

Preuve. Soit $h > 0$ fixé. On échantillonne le processus aux instants $(nh)_n \geqslant 0$: soit $Y_n = X_{nh}$ $\forall n \geqslant 0$. Alors, comme X est un processus de Markov, on a

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = x_{n+1} | Y_n = x_n, ..., Y_0 = x_0) = \mathbb{P}(Y_{n+1} = x_{n+1} | Y_n = x_n) = P_{x_n x_{n+1}}(h).$$

Donc $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition $P(h)$. Comme $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est irréductible, on a $P_{xy}(h) > 0$ $\forall x, y \in E$. La matrice $P(h)$ est donc irréductible et apériodique, donc

$$P_{xy}(nh) = P_{xy}^{(n)}(h) \to \nu_y, \quad n \to +\infty,$$

car ν est aussi l'unique loi invariante de $P(h)$.

De plus, $\forall x, y \in E$, $\forall t \geqslant 0$,

$$|P_{xy}(t) - \nu_y| \leqslant |P_{xy}(t) - P_{xy}(nh)| + |P_{xy}(nh) - \nu_y|.$$

Or, $\forall t, s \geqslant 0$, $\forall x, y \in E$,

$$\begin{aligned}|P_{xy}(t) - P_{xy}(s)| &= |\sum_{z\in E} P_{xz}(t-s)P_{zy}(s) - P_{xz}(s)| \\ &= |\sum_{z\neq x} P_{xz}(t-s)P_{zy}(s) - (1 - P_{xx}(t-s))P_{xz}(s)| \\ &\leqslant \max\{\sum_{z\neq x} P_{xz}(t-s)P_{zy}(s); (1 - P_{xx}(t-s))P_{xz}(s)\} \\ &\leqslant \max\{\sum_{z\neq x} P_{xz}(t-s); (1 - P_{xx}(t-s))\} \\ &= 1 - P_{xx}(t-s) \\ &= \mathbb{P}_x(X_{t-s} \neq x | X_0 = x) \\ &\leqslant \mathbb{P}_x(T_1 \leqslant t-s) = 1 - e^{-q_x(t-s)}.\end{aligned}$$

Soit $x, y \in E$ et $\varepsilon > 0$ fixés quelconques. Alors il existe $h > 0$ tel que $(1 - e^{-q_x s}) \leqslant \varepsilon/2$ pour tous $s \in [0, h]$. De plus il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|P_{xy}(nh) - \nu_y| \leqslant \varepsilon/2$ pour tous $n \geqslant N$. Alors, pour tous $t \geqslant Nh$, on pose $n = \lfloor t/h \rfloor$ (i.e. $nh \leqslant t < (n+1)h$) et on a

$$\begin{aligned} |P_{xy}(t) - \nu_y| &\leqslant |P_{xy}(t) - P_{xy}(nh)| + |P_{xy}(nh) - \nu_y| \\ &\leqslant 1 - e^{-q_x(t-nh)} + \varepsilon/2 \leqslant \varepsilon, \end{aligned}$$

car $n \geqslant N$ et $t - nh \leqslant h$. □

Références

[1] Norris, J.R., *Markov chains*, vol. 2 of *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1998. Reprint of 1997 original.

[2] Pardoux, E., *Processus de Markov et applications* Dunod, 2007.