MASTER 1, 2011

16/11/11

PARTIEL
CORRECTION

PROBLEME 1

1) On pose $q = 1-p$.

$s \in \mathbb{R}$,

$$G_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k=1}^{\infty} s^k \mathbb{P}(X=k) = sp \sum_{k=1}^{\infty} (sq)^{k-1} = sp \sum_{k=0}^{\infty} (sq)^k = \frac{sp}{1-sq}$$

Ce calcul n'est valable que si $|sq| < 1$, c'est à dire $|s| < 1/q$.

Si $|s| \geq 1/q$, $G_X(s)$ n'est pas définie.

2) On a $\mathbb{E}[X] = G_X'(1) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$

De plus $\mathbb{E}[X^2] = G_X''(1) + G_X'(1) = \frac{2pq}{(1-q)^3} + \frac{1}{p} = \frac{2q+p}{p^2} = \frac{2-p}{p^2}$

Donc $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X] = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$

3) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{P}(X>k) = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=k+1}^{\infty} pq^{n-1} = p \sum_{l=0}^{\infty} q^{k+l} = \frac{pq^k}{1-q} = q^k$$

Ainsi, pour tout $k, n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(X>k+n \mid X>n) = \frac{\mathbb{P}(X>k+n)}{\mathbb{P}(X>n)} = \frac{q^{k+n}}{q^n} = q^k = \mathbb{P}(X>k)$$

4) Si $p = \mathbb{P}(X=1)$ et $q = 1-p$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$\mathbb{P}(X>k+1 \mid X>1) = \frac{1}{q}\mathbb{P}(X>k+1) = \mathbb{P}(X>k)$, donc $\mathbb{P}(X>k+1) = q\,\mathbb{P}(X>k)$

On a donc $\mathbb{P}(X>k) = q^{k-1}\mathbb{P}(X>1) = q^k$.

De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(X>k-1) - \mathbb{P}(X>k) = q^{k-1} - q^k = q^{k-1}(1-q) = p\,q^{k-1}$$

Ainsi $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Conclusion : la seule loi à valeur dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant la propriété d'absence de mémoire est la loi géométrique.

PROBLÈME II

1) On a $\dfrac{\ln U}{\ln(1-p)} \geq 0$ donc Z est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Z=k) = \mathbb{P}\left(\left\lfloor \frac{\log U}{\log(1-p)} \right\rfloor = k-1\right) = \mathbb{P}\left(k-1 \leq \frac{\log U}{\ln(1-p)} < k\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(k\log(1-p) < \log U \leq (k-1)\log(1-p)\right) = \mathbb{P}\left((1-p)^k < U \leq (1-p)^{k-1}\right)$$

$$= (1-p)^{k-1} - (1-p)^k = (1-p)^{k-1}\left[1-(1-p)\right] = p\,(1-p)^{k-1}$$

donc $Z \sim \mathcal{G}(p)$.

2) Si $S = c\tan(\pi(U-1/2))$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$F_S(t) = \mathbb{P}(S \leq t) = \mathbb{P}(c\tan(\pi(U-1/2)) \leq t) = \mathbb{P}(\tan(\pi(U-1/2)) \leq t/c)$$

$$= \mathbb{P}(\pi(U-1/2) \leq \operatorname{Arctan}(t/c)) \quad \text{car} \quad \pi(U-1/2) \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[\ \text{p.s.}$$

$$= \mathbb{P}\left(U \leq \frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{c}\right) + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{c}\right) + \frac{1}{2}$$

F_S est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f_S(t) = F_S'(t) = \dfrac{1}{\pi c}\,\dfrac{1}{1+(t/c)^2} = \dfrac{c}{\pi(c^2+t^2)}$

donc $S \sim \mathcal{C}(c)$.

PROBLÈME III

1) Pour avoir m succès, il faut un minimum de m essais, donc

$$X(\Omega) = \{m, m+1, m+2, \dots\}$$

2) ~~Pour avoir $X = m+k$ a~~ Soit $k \in \mathbb{N}$,

On a $X = m+k$ si et seulement si :

→ on a effectué $m+k$ essais

→ le $(m+k)^{\text{ième}}$ essai est un succès

→ dans les $m+k-1$ premiers essais, on a obtenu $m-1$ succès et k échecs.

Comme il y a au total C_{m+k-1}^{m-1} façons d'obtenir $m-1$ succès et k échecs en $m+k-1$ essais, et que les essais successifs sont indépendants, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$P(X = m+k) = \left[C_{m+k-1}^{m-1} p^{m-1} (1-p)^k\right] \times \left[p\right]$$

$$= C_{m+k-1}^{m-1} p^m (1-p)^k$$

PROBLÈME IV

1) $\forall (x,y) \in \mathcal{D}$, $\forall (u,v) \in \Delta$

$$h(x,y) = (u,v) \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{x+y}{2} \\ v = \frac{x-y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u+v \\ y = u-v \end{cases} \Leftrightarrow h^{-1}(u,v) = (u+v, u-v)$$

h et h^{-1} sont $\mathcal{C}^1$, donc h est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme.

$$J_h(x,y) = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}, \quad J_h \text{ ne s'annule pas sur } \mathcal{D}.$$

2) La densité du couple (U,V) est donnée, $\forall (u,v) \in \Delta$, par

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{X,Y}(h^{-1}(u,v)) \, |J_h(h^{-1}(u,v))|^{-1}$$
$$= f_{X,Y}(u+v, u-v) \times 2$$

or $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ car X et Y sont indépendantes

$$= \frac{1}{2a} \mathbb{1}_{|x| \leq a} \frac{1}{2a} \mathbb{1}_{|y| \leq a} = \frac{1}{4a^2} \mathbb{1}_{|x| \leq a, |y| \leq a} = \frac{1}{4a^2} \mathbb{1}_{(x,y) \in \mathcal{D}}$$

Donc $f_{(U,V)}(u,v) = \frac{1}{2a^2} \mathbb{1}_{(u,v) \in \Delta}$

$$= \frac{1}{2a^2} \mathbb{1}_{|u| \leq a} \mathbb{1}_{|v| \leq a - |u|}$$

3) La loi marginale de U est donnée par $f_U(u) = \int_{\mathbb{R}} f_{(U,V)}(u,v) \, dv$

$$f_U(u) = \frac{1}{2a^2} \mathbb{1}_{|u| \leq a} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{|v| \leq a - |u|} \, dv = \frac{1}{a^2}(a - |u|) \mathbb{1}_{|u| \leq a}$$

Donc $f_U = f$: U suit la loi triangulaire symétrique.

De même (par symétrie), on a $f_V(v) = \frac{1}{a^2}(a - |v|) \mathbb{1}_{|v| \leq a}$

4) U et V ne sont pas indépendantes car $f_{(U,V)}(u,v) \neq f_U(u) f_V(v)$