MASTER 2, 2015 12/01/16

TERMINAL CORRECTION

Exercice 1

1) $E = \{P, NY, S\}$. En conservant cet ordre on a

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Conditionnellement à $(X_0 = P)$, $T_1 \sim \mathcal{E}(1)$,

____________ $(X_0 = NY)$, $T_1 \sim \mathcal{E}(1/2)$,

____________ $(X_0 = S)$, $T_1 \sim \mathcal{E}(2)$,

d'après l'énoncé (car si $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $\mathbb{E}[T] = 1/\lambda$).

Donc $$Q = \begin{pmatrix} -1 & 2/3 & 1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

3) On a $P \to S \to NY \to P$ donc il y a une seule classe récurrente $\{P, NY, S\}$.
$\hookrightarrow$ une seule classe récurrente irréductible positive (E est fini).

4) Comme on est dans le cadre irréductible recurrent positif, il existe une unique probabilité invariante ν qui vérifie $\nu Q = 0$:

$$\begin{cases} -\nu_1 + \frac{\nu_2}{2} + \nu_3 = 0 \\ \frac{2\nu_1}{3} - \frac{\nu_2}{2} + \nu_3 = 0 \\ \frac{\nu_1}{3} - 2\nu_3 = 0 \\ \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \nu_1 = 6\nu_3 \\ \nu_2 = 10\nu_3 \\ 17\nu_3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \nu_1 = \frac{6}{17} \\ \nu_2 = \frac{10}{17} \\ \nu_3 = \frac{1}{17} \end{cases}$$

5) Soit $t \in \mathbb{R}$,

$P(M>t) = 1$ si $t \leq 0$,

sinon $P(M>t) = P(\min(R,S)>t) = P(R>t \text{ et } S>t) = P(R>t)P(S>t)$ car $R \perp\!\!\!\perp S$.

$$= e^{-\lambda t} e^{-\mu t} \quad \text{car } R \sim \mathcal{E}(\lambda) \text{ et } S \sim \mathcal{E}(\mu)$$

donc $P(M>t) = e^{-(\lambda+\mu)t} \mathbb{1}_{t>0} + \mathbb{1}_{t \leq 0}$ fonction de survie de la loi $\mathcal{E}(\lambda+\mu)$

Ainsi $M \sim \mathcal{E}(\lambda+\mu)$.

$$\mathbb{P}(M=R) = P(R \leq S) = \iint_{A} f_{(R,S)}(r,s)\,dr\,ds \quad \text{avec } A = \{(r,s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ / r \leq s\}$$

$$= \int_0^{+\infty} \int_0^{s} e^{-\lambda r} e^{-\mu s} \lambda\mu \, dr\, ds \quad \text{car } R \perp\!\!\!\perp S \text{ et } R \sim \mathcal{E}(\lambda), S \sim \mathcal{E}(\mu).$$

$$= \int_0^{+\infty} \mu e^{-\mu s}\left(1 - e^{-\lambda s}\right) ds = 1 - \left[\frac{-\mu}{\mu+\lambda} e^{-(\lambda+\mu)s}\right]_0^{+\infty} = 1 - \frac{\mu}{\mu+\lambda}$$

$$= \frac{\lambda}{\mu+\lambda}.$$

6) Nouvel espace d'état $\tilde{E} = \{P, NY, S, V\}$

Conditionnellement à $(\tilde{X}_0 = P)$, le premier temps de saut T_1 est le minimum entre le temps de mort T et le temps que reste Rastopoulos à Paris S_P (sans décès),

$T \perp\!\!\!\perp S_P$ d'après l'énoncé, $T \sim \mathcal{E}(1/6)$, $S_P \sim \mathcal{E}(1)$

donc $T_1 \sim \mathcal{E}(7/6)$.

de plus $\mathbb{P}(\tilde{Z}_1 = V / \tilde{Z}_0 = P) = \mathbb{P}(T < S_P / \tilde{Z}_0 = P) = \dfrac{1/6}{7/6} = \dfrac{1}{7}$ d'après 5)

et $P(\tilde{Z}_1 = NY / \tilde{Z}_0 = P) = P(\tilde{Z}_1 = NY, T \geq S_P / \tilde{Z}_0 = P)$

$$= P(\tilde{Z}_1 = NY / \tilde{Z}_0 = P, T \geq S_P)\, P(T \geq S_P / \tilde{Z}_0 = P)$$

$$= P(Z_1 = NY / Z_0 = P)\frac{6}{7} = \frac{4}{7}$$

D'après l'énoncé et la question 5)

7) Par le même raisonnement que pour la question 6, on obtient

$$\tilde{\Pi} = \begin{pmatrix} 0 & 4/7 & 2/7 & 1/7 \\ 3/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ \frac{6}{13} & 6/13 & 0 & 1/13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ avec $\tilde{E} = \{P, NY, S, V\}$

et $$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} -7/6 & 4/6 & 2/6 & 1/6 \\ 1/2 & -2/3 & 0 & 1/6 \\ 1 & 1 & -13/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8) $\{V\}$ est un état absorbant, $P \to S \to NY \to P$ donc $\{P, NY, S\}$ est une classe transiente car $P \to V$.

<u>Exercice 2</u>

1) $\sup_{x\in E} -Q_{xx} = \sup_{x\in E} q_x < 1 < +\infty$ car $p<1$ et $(\lambda)^x = \left(\frac{p}{q}\right)^x < 1$ $(p<q)$

c'est une condition suffisante pour avoir non explosion.

De même $\sup_{x\in E} -\tilde{Q}_{xx} = \sup_{x\in E} \tilde{q}_x = 1 < +\infty$

2) on note Π^X et Π^Y les matrices incluses des processus $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$

On a

$$\Pi^X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ q & 0 & p & & 0 \\ & q & 0 & p & \\ 0 & & q & 0 & p \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Pi^Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ q & 0 & p & 0 \\ & q & 0 & p \\ 0 & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = \Pi^X$$

Considérons $(Y_t)_{t\geq 0}$

Pour tout entier x, on a $x \to x-1 \to x-2 \to \dots \to 0 \to 1 \to 2 \to \dots \to x-1 \to x$

Donc on a une seule classe $\to$ processus irréductible.

On admet que la chaîne incluse de X est récurrente, donc $(X_t)_{t\geq 0}$ est irréductible récurrent.

Par le même raisonnement et parce que $\Pi^X = \Pi^Y$, $(Y_t)_{t\geq 0}$ est également irréductible récurrent.

3) D'après le cours il existe une mesure invariante ν pour X (unique à renormalisation près).

ν vérifie $\nu Q = 0$, i.e.

$-p\nu_0 + \lambda q \nu_1 = 0 \Leftrightarrow \nu_0 = \nu_1$

$p\nu_0 - \lambda\nu_1 + \lambda^2 q \nu_2 = 0 \Leftrightarrow p\left(1-\frac{1}{q}\right)\nu_0 = -\frac{p^2}{q}\nu_2 \Rightarrow \nu_0 = \nu_2$

$p\nu_1 - \lambda\nu_2 + \lambda^2 q \nu_3 = 0 \Rightarrow \nu_3 = \nu_1 = \nu_0$

...

on trouve donc $\nu = (\nu_0 \;\; \nu_0 \;\; \nu_0 \;\; \dots)$

Le processus X est récurrent positif si et seulement si il possède une probabilité invariante.

Or ν ne peut pas être renormalisée pour obtenir une probabilité (car il y a une infinité d'états)

Donc X est récurrent nul.

4) D'après le cours il existe une mesure invariante ν pour Y. ν vérifie $\nu\tilde{Q} = 0$, i.e.

$-p\nu_0 + q\nu_1 = 0 \Rightarrow \nu_1 = \frac{p}{q}\nu_0 = \lambda\nu_0$

$p\nu_0 - \nu_1 + q\nu_2 = 0 \Rightarrow \nu_2 = \frac{1}{q}(\nu_1 - p\nu_0) = \frac{p}{q}\left(\frac{1}{q} - 1\right)\nu_0 = \left(\frac{p}{q}\right)^2\nu_0 = \lambda^2\nu_0$

$p\nu_1 - \nu_2 + q\nu_3 = 0 \Rightarrow \nu_3 = \frac{1}{q}(\nu_2 - p\nu_1) = \left(\frac{p}{q}\right)^3\nu_0 = \lambda^3\nu_0$

...

on trouve $\nu_x = \lambda^x \nu_0$ pour $x \in \mathbb{N}$.

on a $\sum_{x\in E} \nu_x = \sum_{x\in E} \lambda^x \nu_0 = \nu_0 \frac{1}{1-\lambda}$ car $|\lambda| < 1$

Donc en prenant $\nu_0 = 1-\lambda$, on a que

$(1-\lambda\ ,\ (1-\lambda)\lambda\ ,\ (1-\lambda)\lambda^2,\ \dots)$ est une probabilité invariante pour le processus $(Y_t)_{t\geq 0}$ et ainsi, ce processus est récurrent positif.

5) Puisque $(Y_t)_{t\geq 0}$ est irréductible récurrent positif, on a le théorème de convergence vers la mesure invariante qui ~~nous~~ dit que

$$\cancel{P_{x,y}(t)}\quad P(Y_t = y) \xrightarrow{t\to+\infty} \nu_y \quad \text{avec } \nu \text{ la probabilité invariante.}$$

donc $P(Y_t \leq 10) \xrightarrow{t\to+\infty} \sum_{y=0}^{10} \nu_y = \sum_{y=0}^{10} (1-\lambda)\lambda^y = 1-\lambda\left(\frac{1-\lambda^{11}}{1-\lambda}\right) = 1-\lambda^{11}$

6) X et Y ont la même chaîne incluse qui est soit récurrente positive, soit récurrente nulle (pas les deux !) or X est récurrent ~~positif~~ nul et Y est récurrent positif !

Donc le type de récurrence pour le processus en temps continu ne peut pas se ~~~~ déduire du type de récurrence de sa chaîne incluse.