15/12/17

1

Correction Examen

Outils de Simulation

Exercice 1 :

1) Pour $x \leq 0$, $P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|t|} dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{\lambda}{2} e^{\lambda t} dt = \frac{e^{\lambda x}}{2}$

Pour $x \geq 0$, $P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{0} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|t|} dt + \int_{0}^{x} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|t|} dt = \frac{1}{2} + \int_{0}^{x} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{2} + \left[-\frac{e^{-\lambda t}}{2} \right]_{0}^{x}$

$$= 1 - \frac{e^{-\lambda x}}{2}$$

2) Soit $u \in]0, 1/2]$, $u = \frac{e^{\lambda x}}{2} \iff x = \frac{1}{\lambda} \log(2u)$

Soit $u \in [1/2, 1[$, $u = 1 - \frac{e^{-\lambda x}}{2} \iff x = -\frac{1}{\lambda} \log(2(1-u))$

donc $F^{-1}(u) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \log(2u) & \text{si } u \in]0, 1/2] \\ -\frac{1}{\lambda} \log(2(1-u)) & \text{si } u \in]1/2, 1[\end{cases}$

code Scilab :

```
U = rand( )
Lambda = ...
if U>(1/2) then
    X = -1/Lambda * log (2*(1-U))
else
    X = 1/Lambda * log (2*U)
end
```

3) a) On applique la méthode de la fonction muette : Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée

$$\mathbb{E}[\phi(Y-Z)] = \iint_{\mathbb{R}^2} \phi(y-z) \lambda e^{-\lambda y} \lambda e^{-\lambda z} \mathbb{1}_{y \geq 0} \mathbb{1}_{z \geq 0} \, dy \, dz$$

$$\mathbb{E}[\phi(Y-Z)] = \iint_{(\mathbb{R}^{+*})^2} \phi(y-z)\lambda^2 e^{-\lambda(y+z)}\,dy\,dz$$

On fait ensuite un changement de variable $\begin{cases} u = y-z \\ v = y+z \end{cases}$ et on arrive à la fin à

$\mathbb{E}[\phi(Y-Z)] = \int_{\mathbb{R}} \phi(u) f(u)\,du$ ce qui permet de conclure.

b) Y à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, donc $G(t) = 0$ pour $t \leq 0$.

Pour $t \geq 0$, $G(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 1 - e^{-\lambda t}$

~~Pour~~ Donc $G(t) = (1-e^{-\lambda t})\mathbb{1}_{t\geq 0}$

Pour $u \in]0,1[$, $u = 1-e^{-\lambda t} \iff t = -\frac{1}{\lambda}\log(1-u)$

Donc $G^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda}\log(1-u)$

Code Scilab:

```
U = rand()
Lambda = ...
Y = -1/Lambda * log(1-U)        // On peut également prendre log(U)
```

c) Code Scilab:

```
U=rand()
V=rand()
Lambda=...
Y=-1/Lambda * log(U)
Z=-1/Lambda * log(V)
X=Y-Z
```

4) Soit $t \in \mathbb{R}$, $\tilde{F}(t) = P(\varepsilon Y \leq t) = P(Y \leq t \mid \varepsilon = 1)P(\varepsilon = 1) + P(-Y \leq t \mid \varepsilon = -1)P(\varepsilon = -1)$

$= \frac{1}{2}(1-e^{-\lambda t})\mathbb{1}_{t\geq 0} + \frac{1}{2}\left(1-(1-e^{\lambda t})\mathbb{1}_{t<0}\right)$

$= F(t)$

Donc $\varepsilon Y \sim \mathcal{L}(\lambda)$

Code Scilab :

```
eps = 2*(rand()<(1/2))-1
Lambda = ...
Y = -1/Lambda * log(rand())
X = eps*Y
```

Exercice II :

D'après la figure 1, $(Y_n)_n$ converge presque-sûrement vers une variable aléatoire non constante.

D'après la figure 3, la limite presque sûre de $(Y_n)_{n\geq 0}$ a une loi uniforme sur $[0,1]$.

D'après la figure 2, $(Z_n)_n$ ne converge pas presque sûrement lorsque $n \to +\infty$.

D'après la figure 4, $(Z_n)_n$ semble converger en loi vers la loi $\mathcal{U}([0,1])$.

Exercice III :

Ce code permet de simuler ~~le tirage de~~ $N = 10\,000$ tirages indépendants de la variable aléatoire $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1/12}}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{2}\right)$ avec $n = 10$ et $X_i \sim \mathcal{U}([0,1])$ i.i.d

D'après le théorème central limite, cette variable aléatoire doit être proche de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
Pour le vérifier, le code affiche un histogramme des tirages (avec 50 classes) et superpose la densité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice IV :

1) $h :]0,1[\to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^{a-1}(1-x)^{b-1}$

h est $\mathcal{C}^\infty$, $h'(x) = x^{a-2}(1-x)^{b-2}\left[(a-1)(1-x) - (b-1)x\right]$

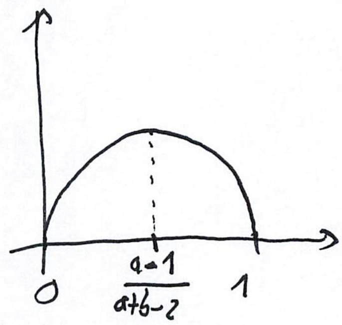
$$= x^{a-2}(1-x)^{b-2}\left[(a-1) - x(a+b-2)\right]$$

$$\begin{cases} h'(x^*)=0 \iff x^* = \dfrac{a-1}{a+b-2} \\ x^* \in]0,1[\end{cases}$$

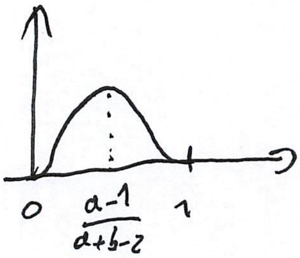
On remarque également que $h'(0^+)=0$ si $a>2$
et $h'(1^-)=0$ si $b>2$

x	0	$\frac{a-1}{a+b-2}$	1
h'	$+$	0	$-$
h	$\nearrow$		$\searrow$

Courbe pour $1<a\leq 2, 1<b\leq 2$:



Courbe pour $a>2, b>2$:



2) L'étude des variations, nous donne directement que

$$h(x) \leq h\left(\frac{a-1}{a+b-2}\right) = M$$

3) Code Scilab:

```
a=...; b=...; M=((a-1)^(a-1)*(b-1)^(b-1))/((a+b-2)^(a+b-2));
U=rand(); V=M*rand();
while V>((U^(a-1))*((1-U)^(b-1)))
    U=rand(); V=M*rand();
end;
X=U; // X suit la loi Beta(a,b).
```

4) On appelle Beta(a,b) la fonction qui génère un tirage de la loi Beta(a,b) à l'aide du code de la question 3).

Code Scilab :

```
a=2;  b=4;  n=2000
X=[];
for i=1:n
    X(i)=Beta(a,b);
end
histplot(20,X);
t=linspace(0,1,1000);
y=(t.^(a-1)).*((1-t).^(b-1))/B(a,b);
plot2d(t,y)
```

Question subsidiaire :

$$B(a,b) = \mathbb{E}\left[U^{a-1}(1-U)^{b-1} \right] \quad \text{avec } U \sim \mathcal{U}([0,1])$$

on peut donc approcher $B(a,b)$ à l'aide de la loi forte des grands nombres

on pose $\overline{Y}_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$ avec $Y_i = U_i^{a-1}(1-U_i)^{b-1}$ et (U_i) iid de loi $\mathcal{U}([0,1])$.

Alors $\overline{Y}_n \xrightarrow{n \to +\infty} B(a,b)$ p.s.