Universités Bordeaux
Master 1 MIMSE 21/12/2011

EXAMEN TERMINAL PROBABILITÉS

Durée 1h30

PROBLÈME I

11 points

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre α (notée $\mathcal{E}(\alpha)$) dont la densité est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

On pose

$$R_n = \min\{X_1, ..., X_n\}, \quad M_n = \max\{X_1, ..., X_n\}, \quad Z_n = \alpha M_n - \ln(n).$$

1. Calculer la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(\alpha)$.
2. (a) Calculer $\mathbb{P}(R_n > t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.
   (b) Montrer que R_n suit une loi exponentielle dont on déterminera le paramètre.
   (c) Montrer que $R_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ p.s..
3. (a) Calculer la fonction de répartition de Z_n.
   (b) Montrer que Z_n converge en loi vers une variable aléatoire de fonction de répartition $g(x) = e^{-e^{-x}}$.

PROBLÈME II

4 points

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(1,1)$. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ avec $a^2 + b^2 = 1$ et $c^2 = 1$. On pose

$$U = cX, \quad V = aY - bZ, \quad W = bY + aZ.$$

Montrer que les variables aléatoires U, V et W sont indépendantes et calculer leur loi.

PROBLÈME III

7 points

On rappelle que si X est une variable aléatoire de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$. On rappelle également que la loi exponentielle de paramètre α (notée $\mathcal{E}(\alpha)$) est une loi de probabilité dont la densité est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

Enfin la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{E}(\alpha)$ est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi(t) = \frac{\alpha}{\alpha - it}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x.

1. Soient $\theta > 0$ et $X \sim \mathcal{E}(1)$. Montrer que la variable aléatoire $Y = \lfloor \theta X \rfloor + 1$ suit une loi géométrique $\mathcal{G}(1 - e^{-1/\theta})$.
2. Soit $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que $Z_n \sim \mathcal{G}(\lambda/n)$. Montrer que Z_n/n converge en loi vers une variable aléatoire $Z \sim \mathcal{E}(\lambda)$.