Universités Bordeaux
Master 1 MIMSE

07/01/2013

EXAMEN TERMINAL
PROBABILITÉS

Durée 1h30

PROBLÈME I

8 points

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. Rappelons que la loi exponentielle $\mathcal{E}(\mu)$ est une loi continue de densité

$$f(x) = \mu e^{-\mu x} \mathbb{1}_{x \geqslant 0}.$$

Soient U et V les variables aléatoires réelles définies par

$$U = X + Y \quad \text{et} \quad V = \frac{X+Y}{Y}.$$

1. Le vecteur aléatoire (X, Y) est il un vecteur aléatoire à densité ? Si oui, donner sa densité $f_{(X,Y)}$.
2. Montrer que la densité de probabilité du couple (U, V) est donnée par

$$f_{(U,V)}(u, v) = \frac{u}{v^2} \exp(-u) \mathbb{1}_{u \geqslant 0} \mathbb{1}_{v \geqslant 1}.$$

3. En déduire les lois marginales de U et V.
4. Les variables aléatoires U et V sont elles indépendantes ?

PROBLÈME II

4 points

Soient X, Y et Z trois v.a. telles que

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

1. Donner les lois de X, Y et Z. Sont-elles indépendantes ?
2. Le vecteur (X, Y, Z) possède-t-il une densité ?

3. On pose
$$U = X, \quad V = X + Z - Y, \quad W = Z.$$
Montrer que les variables aléatoires U, V et W sont indépendantes et calculer leur loi.

PROBLÈME III

8 points

La loi de Paréto, encore appelée loi de puissance, est utilisée pour modéliser les dépassements d'un seuil. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Paréto $\mathcal{P}(a, \theta)$ avec $a > 0$ et $\theta > 0$ si $X = \theta e^Y$ où Y suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(a)$. Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X, on peut estimer la valeur θ par
$$\hat{\theta}_n = \min_{1\leqslant k\leqslant n} X_k.$$

1. Montrer que la fonction de répartition de X est donnée par
$$F_X(x) = \left(1 - \left(\frac{\theta}{x}\right)^a\right) \mathbb{1}_{x\geqslant\theta}.$$
2. Vérifier que $\hat{\theta}_n$ suit la loi de Paréto $\mathcal{P}(na, \theta)$. (On pourra calculer la fonction de répartition de $\hat{\theta}_n$.)
3. Montrer que $\hat{\theta}_n$ converge presque sûrement vers θ.
4. Montrer également que $n\left(\hat{\theta}_n - \theta\right)$ converge en loi vers une v.a. Z qui suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ à déterminer.