Université de Bordeaux
Master 2 MIMSE

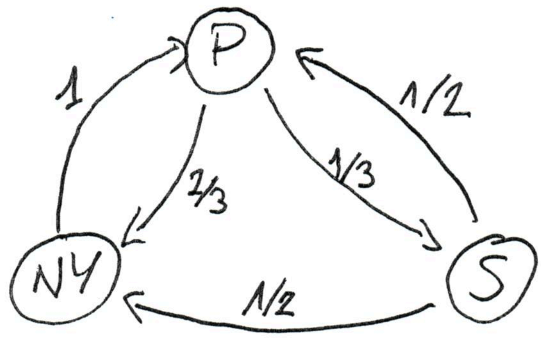
23/01/2015

Examen terminal
Processus de Markov

Durée 1h30

Exercice 1

Le célèbre milliardaire R. Rastapopoulos passe sa vie à voyager entre New-York, Paris et Sydney. Lorsqu'il arrive à Paris, il y reste en moyenne 1 mois. De même il reste en moyenne 2 mois à New-York et 1/2 mois à Sydney. Dues aux limitations techniques de son jet privé et à ses préférences de voyage, les transitions possibles entre ces trois villes et leurs probabilités sont données dans le graphe suivant (on suppose négligeables les temps de voyages entre ces villes) :



On note X_t la ville dans laquelle se trouve Rastapopoulos au temps t (en mois) et on suppose que $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus markovien de saut, homogène, d'espace $E = \{P, NY, S\}$ et de loi initiale $X_0 = P$. Notons que le temps $t = 0$ est arbitraire et, en particulier, ne correspond pas à sa date de naissance. On rappelle que si Y est une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, alors $\mathbb{E}[Y] = 1/\lambda$.

1. Donner la matrice de transition Π de la chaîne induite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Donner le générateur infinitésimal du processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$.
3. Donner les classes d'équivalence et leur nature.
4. Existe-t-il une probabilité invariante ? Si oui la calculer.

On sait maintenant que ce milliadaire est atteint d'une maladie incurable et que la date T de sa mort (en mois) suit une loi exponentielle de paramètre $1/6\,\text{mois}^{-1}$. Comme stipulé dans son testament, à sa mort sa dépouille sera transférée à Vesoul où elle sera enterrée. On suppose que tant que la mort n'est pas intervenue, Rastapopoulos continue à voyager avec la même dynamique que précédemment. On suppose également que T est indépendant de la ville où il se situe. On note $\tilde{X}_t$ la ville dans laquelle se trouve Rastapopoulos au temps t (en mois) et on admet que $(\tilde{X}_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus markovien de saut, homogène, d'espace $\tilde{E} = \{P, NY, S, V\}$ et de loi initiale $\tilde{X}_0 = P$.

5. Soient R et S deux variables aléatoires indépendantes de lois $\mathcal{E}(\lambda)$ et $\mathcal{E}(\mu)$. On note $M = \min(R, S)$. Montrer que M est une loi exponentielle de paramètre à déterminer et montrer que
$$\mathbb{P}(M = R) = \mathbb{P}(R \leqslant S) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$
6. Soit $(\tilde{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la chaîne incluse de $\tilde{X}$ et T_1 son premier temps de saut. Montrer que
$$T_1 \sim \mathcal{E}(7/6), \quad \mathbb{P}(\tilde{Z}_1 = V | \tilde{Z}_0 = P) = 1/7 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\tilde{Z}_1 = NY | \tilde{Z}_0 = P) = 4/7.$$
7. Donner la matrice de transition $\tilde{\Pi}$ de la chaîne induite $(\tilde{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et le générateur infinitésimal du processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ (on ne détaillera pas les calculs).
8. Donner les classes d'équivalence et leurs natures.

Exercice 2

Soient $p \in]0, 1[$, $q = 1 - p$ et $\lambda = p/q$. On suppose que $p < q$ (i.e. $\lambda < 1$). On considère deux processus markovien de saut homogènes $(X_t)_{t\geqslant 0}$ et $(Y_t)_{t\geqslant 0}$, d'espace d'état $\mathbb{N}$, de lois initiales $X_0 = 0$, $Y_0 = 0$ et de générateurs infinitésimaux Q et $\tilde{Q}$ donnés par

$$Q_{xy} = \begin{cases} -p & \text{si } x = y = 0 \\ -\lambda^x & \text{si } x = y \neq 0 \\ \lambda^x p & \text{si } y = x + 1 \\ \lambda^x q & \text{si } x \neq 0 \text{ et } y = x - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \tilde{Q}_{xy} = \begin{cases} -p & \text{si } x = y = 0 \\ -1 & \text{si } x = y \neq 0 \\ p & \text{si } y = x + 1 \\ q & \text{si } x \neq 0 \text{ et } y = x - 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que $(X_t)_{t\geqslant 0}$ et $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ vérifient la condition de non explosion.
2. Donner les matrices de transition des chaînes incluses des processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ et $(Y_t)_{t\geqslant 0}$. Montrer que ces processus sont irréductibles et récurrents (on admet que la chaîne incluse du processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est récurrente).
3. Calculer une mesure invariante du processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ et en déduire le type de récurrence (nulle ou positive) de ce processus.
4. Montrer que $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ possède une probabilité invariante, la calculer et en déduire le type de récurrence (nulle ou positive) de ce processus.
5. Donner une approximation, lorsque t est grand, de $\mathbb{P}(Y_t \leqslant 10)$.
6. Déduire des questions précédentes que la propriété « un processus markovien de saut homogène est récurrent positif si et seulement si sa chaîne incluse est récurrente positive » est fausse.