Université de Bordeaux
Master 2 MIMSE

23/01/2015

Examen terminal
Processus de Markov

Durée 1h30

Questions de cours

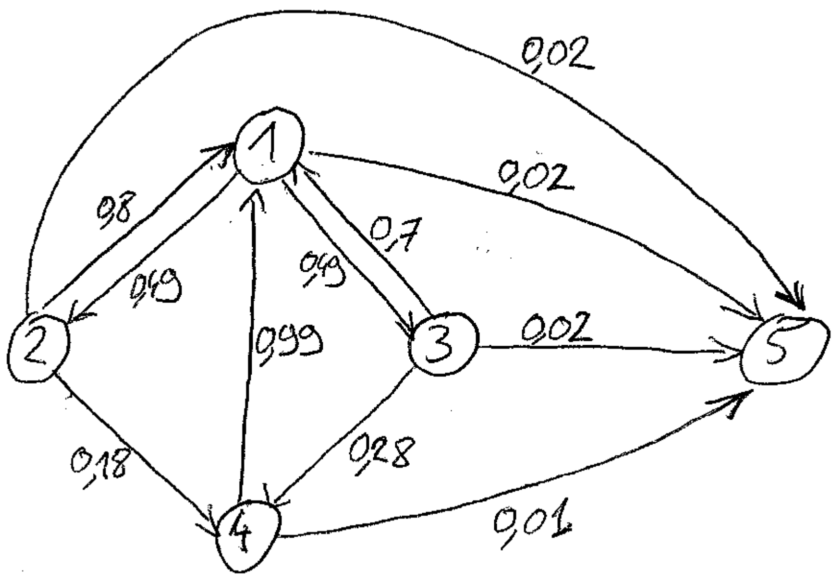
1. Donner la définition d'un processus markovien de saut.
2. Donner un lien entre les matrices de transition et le générateur infinitésimal d'un processus markovien de saut.
3. Donner la définition d'un état transient pour un processus markovien de saut.

Problème

On considère un distributeur de billets qui ne peut fournir que des billets de 10 euros et de 20 euros. Le distributeur peut être dans l'un des états suivants :

1. Le distributeur fonctionne correctement et il reste des billets de 10 et 20 euros.
2. Il n'y a plus de billets de 10 euros mais il reste des billets de 20 euros.
3. Il n'y a plus de billets de 20 euros mais il reste des billets de 10 euros.
4. Il n'y a plus de billets de 10 et 20 euros.
5. Le distributeur est hors-service et doit être remplacé.

Les transitions possibles et leurs probabilités sont données dans le graphe suivant.



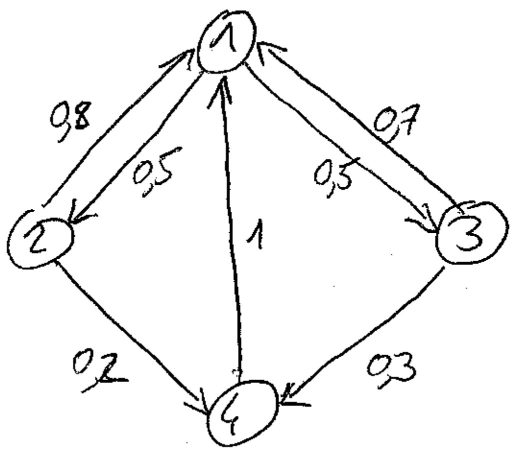
On suppose par ailleurs que le temps moyen passé dans chaque état est de 100 heures pour l'état 1, 2 heures pour l'état 2, 1 heure pour les états 3 et 4 et 10 heures pour l'état 5. On appelle X_t l'état de la machine au temps t et on suppose que $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus markovien de saut, homogène, d'espace $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et de loi initiale $X_0 = 1$.

1. Donner la matrice de transition Π de la chaîne induite (Z_n).
2. Soit Y une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. On rappelle que Y est une variable aléatoire à densité et sa densité est donnée par

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x>0}.$$

   Montrer que $\mathbb{E}[Y] = 1/\lambda$. En déduire la loi du premier temps de saut T_1 conditionnellement à $X_0 = x$ pour tout x dans E.
3. Donner le générateur infinitésimal du processus.
4. Donner les classes d'équivalence et leur nature.
5. Quelle est la probabilité que le processus atteigne un jour l'état 5 ? Même question avec l'état 4.

On suppose maintenant qu'un nouveau modèle de distributeur plus robuste est arrivé sur le marché et que dorénavant l'état 5 n'existe plus. Les transitions possibles et leurs probabilités sont données dans le graphe suivant.



1. Donner le générateur infinitésimal du nouveau processus sur l'espace d'état $E' = \{1, 2, 3, 4\}$.
2. Donner les classes d'équivalence et leur nature.
3. Existe-t-il une mesure invariante ? Si oui, la calculer.
4. Au bout d'un temps « long », quelle est la probabilité que je puisse obtenir un billet de 20 euros à ce distributeur.

Exercice

On considère une population d'organismes asexuées. On note X_t le nombre d'individus au temps $t \geqslant 0$ et on suppose que $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus markovien de saut, homogène, d'espace $\mathbb{N}$, de loi initiale $X_0 = 10$ et de générateur infinitésimal

$$Q_{xy} = \begin{cases} \lambda x & \text{si } y = x+1 \\ \nu x & \text{si } y = x-1 \\ \alpha & \text{si } y = x \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour $x \neq 0$, avec $\lambda > 0$ et $\nu > 0$ deux paramètres donnés. On pose également $Q_{00} = 0$.

1. Que vaut α ?
2. On note $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la chaîne induite. On pose $q_x = -Q_{xx}$ pour tous $x \in \mathbb{N}$. Montrer que $q_{Z_n} \leqslant (\lambda + \nu)(n+10)$ et en déduire que la condition de non explosion est satisfaite.
3. Donner les classes d'équivalences et leur nature.
4. On pose $\mu_x(t) = \mathbb{P}(X_t = x)$. Quel système d'équations différentielles est vérifié par la famille des lois $(\mu(t))_{t\geqslant 0}$? On ne demande pas de résoudre ce système.
5. $\mu_0(t)$ est appelée probabilité d'extinction. Il est possible de résoudre le système d'équations différentielles de la question précédente afin d'obtenir

$$\mu_0(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{\nu e^{(\lambda-\nu)t} - \nu}{\lambda e^{(\lambda-\nu)t} - \nu}\right)^{X_0} & \text{si } \lambda \neq \nu, \\ \left(\dfrac{\lambda t}{1+\lambda t}\right)^{X_0} & \text{si } \lambda = \nu. \end{cases}$$

Calculer la probabilité d'extinction asymptotique, c'est-à-dire $\lim_{t\to+\infty} \mu_0(t)$.