Mots clés : Fractions continues, réseaux, convexité.

Le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury demande que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur. Il est souhaitable que vous organisiez votre présentation comme si le jury n'avait pas connaissance du texte. Le jury aura néanmoins le texte sous les yeux pendant votre exposé.

Détermination du convexe intérieur d'un polygone en géométrie discrète

1. Introduction

L'implémentation informatique d'objets géométriques impose leurs approximations par des objets discrets (ne contenant qu'un nombre fini de points). Par exemple, pour représenter le plan euclidien , une grille $[-a,a]\times[-b,b]\cap\mathbb{Z}^2$ sera utilisée. Ces objets discrets n'ont pas les mêmes propriétés que leurs homologues continus et c'est le but de la *géométrie discrète* d'étudier théoriquement leurs spécificités. On présente ici la méthode utilisée pour déterminer les sommets du convexe intérieur d'un polygone discret.

2. Développement d'un réel en fractions continues

Définition : Soit $(a_0,a_1,...,a_n)$ une famille d'entiers de cardinal $n+1$, où $a_1,...,a_n$ sont strictement positifs. On note $[a_0,a_1,...,a_n]$ le rationnel

$$[a_0,a_1,...,a_n]=a_0+\cfrac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+\cdots}}}=a_0+\frac{1}{[a_1,...,a_n]}.$$

Un tel rationnel est appelé une *fraction continue* finie.

Proposition 1 *Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille infinie d'entiers où les a_i sont strictement positifs, dés que $i\geqslant 1$. Alors la suite $([a_0,a_1,...,a_n])_{i\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.*

Définition : Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille infinie d'entiers où les a_i sont strictement positifs, dés que $i\geqslant 1$ et soit x la limite de la suite $([a_0,a_1,...,a_n])_{n\in\mathbb{N}}$ On dit alors que x admet $[a_0,a_1,a_2,...]$ comme *développement en fraction continue*. Si n est un entier naturel, on appelle $[a_0,a_1,...,a_n]$ la *réduite* de rang n de x.

Théorème 1 *Tout nombre réel admet un développement en fractions continues.*

On montre plus précisément qu'un tel développement est unique sauf lorsque le nombre est rationnel. Dans ce cas, il admet deux développements en fractions continues, l'un court $[a_0, a_1, ..., a_n]$ avec $a_n > 1$, l'autre long alors égal à $[a_0, a_1, ..., a_n - 1, 1]$.

L'algorithme pour déterminer le développement en fractions continues (`DFC`) d'un réel x peut se décrire informellement de la façon suivante :

Développement en fractions continues du rationnel x

$a_0 := E(x)$
$y := E(\frac{1}{x-a_0})$
$z := \frac{1}{x-a_0} - E(\frac{1}{x-a_0})$
$\texttt{DFC}(x) := [a_0, y, \texttt{DFC}(\frac{1}{z})]$

Pour déterminer les fractions rationnelles correspondant aux réduites qui approchent une fraction rationnelle $\frac{a}{b}$ (avec a et b premiers entre eux), on peut utiliser l'algorithmme suivant :

Liste des fractions rationnelles réduites du rationnel $x = \frac{a}{b}$

```
po:=0 ; q0:=1 ;
p1:= 1 ; q1:=0 ;
Liste := [(p0,q0), (p1,q1)] ;
u:=a ; v:=b ; r:=1 ;            ♯ Initialisation

Tant que (r ≠ 0) faire
                                Effectuer la division euclidienne de u par v u := vx + r
                                p:= p1x + p0
                                q:= q1x + q0
                                Liste := [élémentsListe, (p, q)]
                                p0 := p1; q0:= q1;
                                p1:= p; q1 := q:
                                u:= v;
                                v:= r ;
                                fin faire

retourner Liste
```

3. Pointillés de Bezout

Proposition 2 *Soit D une droite du plan euclidien ; les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) *D admet une infinité de points de $\mathbb{Z}^2$;*

ii) *D passe par deux points de $\mathbb{Z}^2$.*

iii) *D admet une équation $ax + by + c = 0$ avec a, b, c entiers et $\texttt{pgcd}(a, b) = 1$.*

Soient A et B deux points distincts de $\mathbb{Z}^2$. On note D_{AB} la droite passant par A et par B et $ax + by = c = 0$ une équation de D_{AB} avec a, b, c entiers et $\texttt{pgcd}(a, b) = 1$ (on peut remarquer qu'il existe deux telles équations opposées l'une de l'autre). Si $M = (u, v) \in \mathbb{Z}^2$, la distance de M à D_{AB} est

$$d(M, D_{AB}) = \frac{au + bv + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Les points de $\mathbb{Z}^2$ qui ne sont pas sur D_{AB} mais le plus près possible sont donc les points $M = (u, v)$ tels que $au + bv + c = \pm 1$.

Définition : Soient A et B deux points distincts de $\mathbb{Z}^2$. On note D_{AB} la droite passant par A et par B et $ax+by+c = 0$ une équation de D_{AB} avec a, b, c entiers et $\texttt{pgcd}(a, b) = 1$. Les points $M = (u, v)$ de $\mathbb{Z}^2$ tels que $au + bv + c = \pm 1$ sont appelés *pointillés de Bezout* de la droite D_{AB}.

Définition : Soient A et B deux points distincts de $\mathbb{Z}^2$. On dit que B est visible depuis A si le segment $]A, B[$ ne contient aucun point de $\mathbb{Z}^2$.

Proposition 3 *Soient A et B deux points distincts de $\mathbb{Z}^2$; on note (c, d) les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$; les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) *B est visible depuis A ;*

ii) *$\texttt{pgcd}(c, d) = 1$;*

iii) *il existe une matrice à coefficients entiers et de déterminant égal à 1 dont la première ligne est égale à (c, d) .*

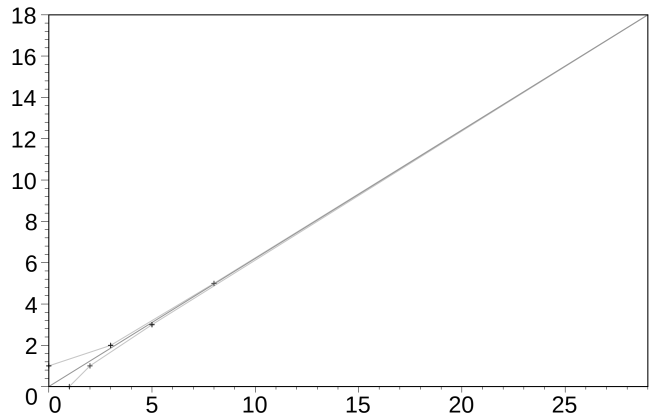
Remarque : Plus généralement, le nombre de points de $\mathbb{Z}^2 \cap [A, B]$ est $1 + \texttt{pgcd}(c, d)$.

4. Entonnoir de Klein

Soit x un rationnel strictement positif et soient a et b deux entiers naturels premiers entre eux tels que $x = \frac{a}{b}$; on considère le développement en fraction continue **court** de x, $[a_0, ..., a_n]$. Pour i dans $\{0, ..., n\}$, soient p_i et q_i deux entiers naturels premiers entre eux tels que $[a_0, ..., a_i] =\texttt{DFC}(\frac{p_i}{q_i})$. Soient $I, J, M_0, ..., M_n$ la famille de points $I = (1, 0), J = (0, 1), M_i = (q_i, p_i), i \in \{0, ..., n\}$.

Théorème 2 *La ligne polygonale $I, M_0, M_2, M_4, ..., M_{2E(\frac{n}{2})}, M$ est concave et située au dessous de la droite D_{OM}, la ligne polygonale $J, M_1, M_3, M_5, ..., M_{2E(\frac{n-1}{2})+1}, M$ est convexe et située au dessus de la droite D_{OM}. La région du plan délimitée par ces deux lignes et les deux axes ne contient pas d'autre point à coordonnées entières. Les points $O, I, J, M_0, M_1, ..., M_n = M$ sont ses points extremaux.*

Définition : La région ainsi délimitée est appelée *entonnoir de Klein* du segment $[O, M]$.



4. Raccord de Klein

Soient A, B deux points distincts de $\mathbb{Z}^2$, non alignés avec l'origine O et tous deux visibles depuis 0. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points **distincts de** O dans $\mathbb{Z}^2$ et dans l'enveloppe convexe des points O, A, B. L'enveloppe convexe de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}^2$ est un polygone convexe dont les points extrémaux sont A, B et une suite finie de points $M_1, ..., M_n$.
Définition : La ligne polygonale $A, M_1, ..., M_n, B$ est appelée raccord de Klein de O, A, B.

Dans le cas où $A = I = (1, 0)$ et où $B = (u, v)$ avec u et v strictement positifs, cette ligne polygonale est le bord concave de l'entonnoir de Klein du segment $[O, B]$. Les points $M_1, ..., M_n$ se construisent en calculant les réduites d'ordre pair du rationnel $\frac{d}{c}$.

Un raccord de Klein, dans le cas général, se calcule en utilsant une matrice à coefficients entiers et de déterminant égal à 1 qui envoie le point A sur le point I (si le point O n'est pas l'origine, on s'y ramène par translation).

5. Polygone convexe intérieur

Définition : Un polygone convexe $\mathcal{P}$ dont les sommets sont dans $\mathbb{Z}^2$ est dit *minimal* si l'intérieur de $\mathcal{P}$ et $\mathbb{Z}^2$ ne se rencontrent pas ($\text{Int}(\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^2 = \emptyset$.

Notation : Soit $\mathcal{P}$ un polygone convexe de sommets les points $A_0, ..., A_{n-1}$ à coordonnées entières. On suppose que $n \geqslant 3$, les A_i sont tous distincts et non alignés, de façon à assurer que $\mathcal{P}$ n'est pas un polygone aplati. On a numéroté les sommets dans le sens trigonométrique direct en partant de A_0 ; de plus par commodité, la numérotation est faite modulo n.

Soit $i \in \{0, ..., n-2\}$. Soient $a_i x + b_i y + c_i = 0$ l'équation de la droite $D_{A_i A_{i+1}}$ avec a_i, b_i, c_i entiers, $\mathtt{pgcd}(a_i, b_i) = 1$ et le polygone $\mathcal{P}$ contenu dans le demi-plan d'inéquation $a_i x + b_i y + c_i \geqslant 0$. On remarque qu'alors le vecteur de coordonnées (a_i, b_i) normal à la droite $D_{A_i A_{i+1}}$ tourne dans le sens direct lorsque i augmente.

Théorème 3 *Soit $\mathcal{P}$ un polygone convexe de sommets les points $A_0, ..., A_{n-1}$ à coordonnées entières. On suppose que $\mathcal{P}$ n'est pas un polygone aplati (en particulier $n \geqslant 3$). Pour $i \in \{0, ..., n-2\}$, soit $a_i x + b_i y + c_i = 0$ l'équation de la droite $D_{A_i A_{i+1}}$ avec a_i, b_i, c_i entiers, $\mathtt{pgcd}(a_i, b_i) = 1$ et le polygone $\mathcal{P}$ contenu dans le demi-plan d'inéquation $a_i x + b_i y + c_i \geqslant 0$; on note $\mathcal{B}_i^1$ le pointillé de Bezout trace de la droite d´équation $a_i x + b_i y + c_i = 1$ sur $\mathbb{Z}^2$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathcal{P}$ n'est pas minimal*
2. *il existe un indice i dans $\{0, ..., n-2\}$ tel que $\mathcal{B}_i^1 \cap \mathcal{P}$ est non vide,*
3. *pour tout indice i dans $\{0, ..., n-2\}$, $\mathcal{B}_i^1 \cap \mathcal{P}$ est non vide.*

Soient A_{i-1}, A_i, A_{i+1} trois points consécutifs du polygone supposé non minimal. Déterminons les points de $(\text{Int}(\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^2$ les plus proches de A_i.

- Le point A_i est l'intersection des droites $a_{i+1}x + b_{i+1}y + c_{i+1} = 0$ et $a_{i-1}x + b_{i-1}y + c_{i-1} = 0$.
- Les points du pointillé de Bezout $\mathcal{B}_{i-1}^1$ véifient $a_{i-1}x + b_{i-1}y + c_{i-1} = 1$. Si on choisit deux entiers u et v tels que $a_{i-1}u + b_{i-1}v = 1$, alors les points du pointillé de Bezout $\mathcal{B}_{i-1}^1$ sont les points M_k de coordonnées (respectivement) $(u_k, v_k) = (u(1-c_{i-1}) + kb_{i-1}, v(1-c_{i-1}) - ka_{i-1})$, pour $k \in \mathbb{Z}$.
- On cherche à minimiser parmi ces points les plus proches de la droite d'équation $a_i x + b_i y + c_i = 0$.

$$\begin{aligned}
d(M_k, D_{A_i A_{i+1}}) &= \tfrac{a_i u_k + b_i v_k + c_i}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}} \\
&= \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{a_i^2+b_i^2}}((1-c_{i-1})(a_i u + b_i v) + k(a_i b_{i-1} - a_{i-1} b_i) + c_i \\
&= \\
&= \alpha - k\beta
\end{aligned}$$

avec $\beta > 0$ (pourquoi?). Donc cette distance est minimale pour k tel que

$$k = F(\frac{\alpha}{\beta} - 1) = F(\frac{(1 - c_{i-1})(a_i u + b_i v) + c_i - 1}{a_{i-1}b_i - a_i b_{i-1}}).$$

Ce point est noté P_i.

- De même, on cherche à à minimiser parmi ces points les plus proches de la droite d'équation $a_i x + b_i y + c_i = 0$ on obtient

$$l = E(\frac{\alpha}{\beta} - 1) = E(\frac{(1 - c_{i-1})(a_i u + b_i v) + c_i}{a_{i-1}b_i - a_i b_{i-1}}).$$

Ce point est noté Q_i.

On obtient ainsi deux points (éventuellement confondus).

On peut alors décrire de façon très informelle un algorithme qui détermine la liste des sommets du convexe intérieur d'un polygone convexe non mimimal dans $\mathbb{Z}^2$.

Sommets du convexe intérieur

`Entrée` : Sommets du polygone $A_0, ..., A_{n-1}$

Vérifier que le polygone n'est pas minimal
Vérifier que les sommets sont correctement numérotés (orientation)

Pour chaque triplet $(A_{i-1}, A_i, A_{i+1}$ calculer les deux points P_i, Q_i

Si $P_i \neq Q_i$, remplacer A_i par un raccord de Klein de (P_i, A_i, Q_i)
Si $P_i = Q_i$, remplacer A_i par Q_i

Suggestions de développements
Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pourrez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécessairement dans l'ordre et d'une façon plus ou moins fouillée. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées plus bas. Il est très vivement conseillé que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats.

- On pourra justifier les résultats introduits dans le texte sans démonstration
- On pourra expliquer précisément comment le théorème 2 peut être adapté pour déterminer l'entonnoir de Klein d'un segment $[AB]$ avec A et B dans $\mathbb{Z}^2$ et A visible de B.

- On pourra établir des figures de chacune des situations décrites par le texte :
  - Pointillés de Bezout d'une droite passant par deux points de $\mathbb{Z}^2$.
  - Entonnoir de Klein d'un segment $[OM]$ avec M visible de O.
  - Un exemple de raccord de Klein
- Un algorithme qui détermine si un polygone dicret est minimal.
- Un algorithme qui détermine le convexe intérieur d'un polygone discret.