(*C01-public*)

Résumé : On étudie mathématiquement la rythmique des canons musicaux, dans lesquels plusieurs instruments jouent la même mélodie de manière décalée.

Mots clefs : arithmétique des entiers, arithmétique des polynômes.

► *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. La présentation, bien que totalement libre, doit être organisée et le jury apprécie qu'un plan soit annoncé en préliminaire. L'exposé doit être construit en évitant la paraphrase et mettant en lumière les connaissances, à partir des éléments du texte. Il doit contenir des illustrations informatiques réalisées sur ordinateur, ou, à défaut, des propositions de telles illustrations. Des pistes de réflexion, indicatives et largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte.*

1. Introduction aux canons musicaux

Ce texte étudie, d'un point de vue mathématique, les canons musicaux. Le principe d'un tel canon repose sur le fait de chanter (ou jouer) une même mélodie, mais avec plusieurs voix ou instruments décalés les uns par rapport aux autres. Nous nous intéresserons exclusivement au côté rythmique, sans tenir compte de la mélodie. On peut par exemple imaginer un rythme repris en canon par différents instruments de percussion.

On appelle *motif (rythmique)* une succession finie de sons et de silences, tous de même durée. On peut représenter un tel motif par l'ensemble (fini) des temps pour lesquels un son est joué (les autres temps correspondant aux silences). Quitte à translater, on peut toujours se ramener à des motifs qui commencent par 0. Finalement :

Définition 1. *Un motif rythmique est une partie finie et non vide de* $\mathbb{N}$.

Exemple 2. $A = \{0, 1, 3, 6\}$ *est un motif correspondant à la succession*

"note / note / silence / note / silence / silence / note"

Pour créer un canon, il faut un motif rythmique et les décalages avec lesquels les différents instruments vont jouer ce même motif.

Exemple 3. *Quatre instruments peuvent jouer respectivement les motifs* $\{0,2\}$, $\{1,3\}$,$\{4,6\}$ *et* $\{5,7\}$. *Il est plus pratique de considérer que le motif* $\{0,2\}$ *est joué quatre fois par des instruments commençant respectivement aux temps* 0, 1, 4 *et* 5.

Ainsi, un canon est déterminé par la donnée d'un motif et d'un ensemble de décalages pour le début de l'exécution par chacun des instruments. Pour résumer :

Définition 4. *On appelle* canon (rythmique) *la donnée de deux sous-ensembles non vides* $A \subset \mathbb{N}$ *fini (le motif) et* $B \subset \mathbb{Z}$, *éventuellement infini (le décalage). Un tel canon est noté* (A, B).

Comme pour les motifs, si le décalage est fini, on peut toujours supposer qu'il commence par 0.

Exemple 5. *Le canon de l'exemple 3 est donc déterminé par le motif* $\{0,2\}$ *et le décalage* $\{0,1,4,5\}$.

Définition 6. *Soient A et B deux parties non vides de* $\mathbb{N}$. *On appelle* somme *de A et B, et l'on note $A+B$, l'ensemble*

$$A+B=\{a+b \mid (a,b)\in A\times B\}. \tag{1}$$

On dira que la somme est directe*, et l'on écrira $A\oplus B$ lorsque :*

$$\forall c\in A+B, \exists!(a,b)\in A\times B, c=a+b. \tag{2}$$

Si A est un motif et B un décalage, $A+B$ représente l'ensemble des temps sur lesquels un son est joué lors de l'exécution du canon. Si la somme est directe, on dira que le canon *est direct.*

Exemple 7. $A=\{0,1,3,6\}$, $B=\{0,4,8,12\}$ *est un canon direct, alors que* $A=\{0,1,3,6\}$, $B=\{0,2,4\}$ *ne l'est pas.*

2. Représentation polynomiale

2.1. *Polynôme associé à une partie finie de* $\mathbb{N}$

Définition 8. *Soit A une partie finie (non vide) de* $\mathbb{N}$. *On appelle* polynôme associé à *A le polynôme, noté P_A, suivant :* $P_A(X)=\sum_{k\in A}X^k$.

Théorème 9. *Soient $A,B\subset\mathbb{N}$ deux parties finies et non vides.*
La somme $A+B$ est directe si et seulement si $P_A(X)P_B(X)=P_{A+B}(X)$.

Démonstration. Si le canon n'est pas direct, alors $P_A(X)P_B(X)$ n'est pas à coefficients dans $\{0,1\}$. Pour la réciproque, il suffit d'écrire la formule donnant les coefficients du produit $P_A(X)P_B(X)$. □

2.2. *Canons infinis*

On s'intéresse maintenant à la façon de générer des canons infinis pour lesquels un son (et un seul) serait joué sur chaque temps.

Définition 10. *On dit qu'un motif A* pave $\mathbb{Z}$ *s'il existe $B\subset\mathbb{Z}$ tel que $\mathbb{Z}=A\oplus B$.*
On dira alors que le canon (A,B) est un canon mosaïque*, et que B est un* complément *de A.*

Parmi les canons mosaïques, on s'intéressera aux canons *périodiques*, au sens suivant :

Définition 11. *Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. On dit qu'un motif (fini) A pave $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ s'il existe $B\subset\mathbb{N}$ fini tel que*

$$\mathbb{Z}=A\oplus B\oplus n\mathbb{Z}. \tag{3}$$

On dira alors que le canon (A,B) est périodique de période n.

En fait, on a le résultat suivant, difficile (et que l'on ne cherchera donc pas à démontrer) :

Théorème 12. *Tout motif A qui pave $\mathbb{Z}$ pave aussi $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour une certaine période $n \in \mathbb{N}^\star$.*

On a alors la caractérisation suivante, en termes polynomiaux :

Théorème 13. *Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Un motif A pave $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement s'il existe $B \subset \mathbb{N}$ fini tel que*

$$P_A(X)P_B(X) \equiv \sigma_n(X) \mod (X^n - 1), \tag{4}$$

où l'on a noté $\sigma_n(X) = 1 + X + \cdots + X^{n-1}$. En particulier, $P_A(1)P_B(1) = n$.

Démonstration. Posons $U = A \oplus B$. Comme $\mathbb{Z} = U \oplus n\mathbb{Z}$, pour tout $j \in \{0, \dots, n-1\}$, on a $|\{u \in U \mid u \equiv j \mod n\}| = 1$. On en déduit que $P_U \equiv \sigma_n \mod (X^n - 1)$ et on conclut grâce au théorème 9. □

Exemple 14. $A = \{0, 3, 6, 12, 23, 27, 36, 42, 47, 48, 51, 71\}$ *pave $\mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$ (on pourra considérer $B = \{0, 8, 10, 18, 26, 64\}$ et utiliser un logiciel de calcul formel).*

Corollaire 15. *Si un canon (A, B) est périodique de période n, alors pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, le canon $(\hat{A}, \hat{B})$ associé aux polynômes $P_{\hat{A}}(X) = (1 + X + \cdots + X^{k-1})P_A(X^k)$ et $P_{\hat{B}}(X) = P_B(X^k)$ est lui aussi périodique.*

3. Condition d'existence d'un canon périodique

3.1. *Polynômes cyclotomiques*

Définition 16. *Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on appelle $n^{\text{ième}}$ polynôme cyclotomique, noté Φ_n, le polynôme*

$$\Phi_n(X) = \prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ \mathrm{pgcd}(k,n)=1}} \left(X - e^{2ik\pi/n}\right). \tag{5}$$

On rappelle le théorème suivant, que l'on ne cherchera pas à redémontrer :

Théorème 17. *Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.*

(i) $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$

(ii) Φ_n *est irréductible dans* $\mathbb{Q}[X]$

(iii) $X^n - 1 = \prod_{d \mid n} \Phi_d(X)$

Le lemme suivant sera également utile par la suite :

Lemme 18. *Si $d \geqslant 2$ est une puissance d'un nombre premier p, alors $\Phi_d(1) = p$.*

3.2. *Une condition nécessaire (et suffisante ?)*

Proposition 19. *Si un canon (A, B) est périodique de période n, alors chaque polynôme cyclotomique $\Phi_d(X)$ tel que $d \geqslant 2$ et $d \mid n$ divise $P_A(X)$ ou $P_B(X)$.*

Démonstration. La preuve utilise le théorème 13 et le fait que $X^n - 1 = (X - 1)\sigma_n(X)$. □

Si on ne connaît que A, le résultat précédent est difficile à utiliser en pratique pour montrer par exemple que A ne pave pas $\mathbb{Z}$. Le théorème suivant est beaucoup plus maniable.

On introduit les notations suivantes, à propos d'un motif A :

— $R_A = \{d \in \mathbb{N}^\star \mid \Phi_d \text{ divise } P_A\}$

— $S_A = \{p^\alpha \mid p \text{ premier}, \alpha \in \mathbb{N}^\star\} \cap R_A$.

Théorème 20. *Si un motif A pave $\mathbb{Z}$, alors $P_A(1) = \prod_{p^\alpha \in S_A} p$ (avec éventuellement des répétitions d'un même facteur p dans le produit).*

Démonstration. Supposons que A pave $\mathbb{Z}$. D'après le théorème 12, $\mathbb{Z} = A \oplus B \oplus n\mathbb{Z}$ pour un certain $B \subset \mathbb{N}$ (fini) et un certain $n \in \mathbb{N}^\star$. On note $n = \prod_p p^{\alpha_p}$ la décomposition en facteurs premiers (distincts) de n.

On a alors, en termes de polynômes associés, $P_A(1)P_B(1) = n$. Or, d'après la proposition 19, $P_A(1)P_B(1)$ est divisible par tous les $\Phi_d(1)$ tels que $d \geqslant 2$ et $d \mid n$. Ceux-ci valent p lorsque d est une puissance d'un nombre premier p. Ainsi, n est divisible par $\prod_{\substack{p \\ 1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_p}} \Phi_{p^\alpha}(1) = \prod_p p^{\alpha_p}$.

Puisque $n = \prod_p p^{\alpha_p}$, les autres facteurs (cyclotomiques ou pas) de $P_A(X)P_B(X)$ contribuent seulement pour la valeur 1 quand $X = 1$.

La valeur de $P_A(1)$ est donc égale au produit des facteurs premiers p tels que $\Phi_{p^\alpha}(X)$ soit un facteur de $P_A(X)$: c'est la condition du théorème. □

On admettra par la suite la conjecture suivante :

Conjecture 21. *La réciproque du théorème précédent est vraie.*

Exemple 22. *Soit $A = \{0, 1, 8, 9, 17, 28\}$. Alors $R_A = \{2, 3, 6, 12, 18\}$ et $S_A = \{2, 3\}$, donc A pave $\mathbb{Z}$.*

Exemple 23. *Le motif $\{1, 4, 9, 16\}$ ne pave pas $\mathbb{Z}$.*

4. Recherche de compléments

On suppose dans cette partie qu'un motif A pave $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (n fixé), et l'on cherche B tel que $\mathbb{Z} = A \oplus B \oplus n\mathbb{Z}$. En d'autres termes, on cherche un polynôme $P_B(X)$ à coefficients dans $\{0, 1\}$ tel que $P_A(X)P_B(X) = \sigma_n(X) \mod (X^n - 1)$. Le principal problème est que $\{0, 1\}$ n'est pas un anneau.

4.1. *Recherche dans* $\mathbb{Q}[X]/(X^n - 1)$

D'après le théorème chinois, $\mathbb{Q}[X]/(X^n - 1)$ est isomorphe à $\prod_{d \mid n} \mathbb{Q}[X]/(\Phi_d(X))$. L'image de $\sigma_n(X)$ par cet isomorphisme est $(n, 0, \ldots, 0)$. On note $\left(A_d\right)_{d \mid n}$ l'image de $P_A(X)$ par cet isomorphisme. Remarquons que $A_1 = P_A(1)$. On a donc $A_1 \mid n$.

Soit B un motif tel que $\mathbb{Z} = A \oplus B \oplus n\mathbb{Z}$, et $\left(B_d\right)_{d \mid n}$ son image par l'isomorphisme du théorème chinois. On a alors $B_1 = \frac{n}{\#A}$, et, si $A_d \neq 0$, alors $B_d = 0$.

On note, si $d \mid n$, $\Psi_d = \frac{X^n-1}{\Phi_d} \in \mathbb{Q}[X]$. Si E_d est un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ tel que $E_d \equiv 1 \mod (\Phi_d)$ et $E_d \equiv 0 \mod (\Psi_d)$, que l'on peut déterminer *via* l'algorithme d'Euclide étendu appliqué à Φ_d et Ψ_d, alors $P_B = \sum_{d \mid n} B_d E_d$.
La seule condition restante sur les B_d est que le polynôme $P_B(X)$ soit à coefficients dans $\{0,1\}$.

Exemple 24. *On considère le motif $A = \{0,1,3,6\}$. Montrons que A pave $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$. Retrouvons par le calcul un complément de A pour $n = 16$. Soit B un motif tel que $\mathbb{Z} = A \oplus B \oplus 16\mathbb{Z}$. Puisque $P_A(1) = 4$, on a $P_B(1) = 4$.De plus, l'image de $P_A(X)$ par l'isomorphisme chinois*

$$\mathbb{Q}[X]/(X^{16}-1) \simeq \mathbb{Q}[X]/(\Phi_1) \times \mathbb{Q}[X]/(\Phi_2) \times \mathbb{Q}[X]/(\Phi_4) \times \mathbb{Q}[X]/(\Phi_8) \times \mathbb{Q}[X]/(\Phi_{16}) \tag{6}$$

est $(4, 0, 0, 1 + X - X^2 + X^3, 1 + X + X^3 + X^6)$. Celle de $P_B(X)$ est donc de la forme $(4, B_2, B_4, 0, 0)$.

Vus les degrés de Φ_2 et Φ_4, on cherche donc $P_B(X)$ sous la forme $P_B(X) = 4E_1 + aE_2 + (bX + c)E_4$, avec $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Il suffit de trouver $a, b, c \in \mathbb{Q}$ tels que $P_B(X)$ soit à coefficients dans $\{0,1\}$. Après calculs (menés par exemple à l'aide d'un logiciel de calcul formel) et suppression de certaines équations redondantes, cela revient à résoudre un système de seulement 4 équations de la forme

$$\begin{cases} -\frac{a}{16} - \frac{b}{8} \qquad + \frac{1}{4} = c_1 \\ \frac{a}{16} \qquad - \frac{c}{8} + \frac{1}{4} = c_2 \\ -\frac{a}{16} + \frac{b}{8} \qquad + \frac{1}{4} = c_3 \\ \frac{a}{16} \qquad + \frac{c}{8} + \frac{1}{4} = c_4 \end{cases}, \tag{7}$$

où les $c_i \in \{0,1\}$. Le système précédent admet une solution si et seulement si $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 1$, i.e. *un et un seul des c_i vaut 1 (les autres valant 0). Si par exemple $c_4 = 1$, alors l'unique solution du système est $(a, b, c) = (4, 0, 4)$, ce qui permet d'obtenir le complément $B = \{0,4,8,12\}$, associé à $P_B(X) = 1 + X^4 + X^8 + X^{12}$. Les différents choix des c_i permettent en fait d'obtenir les motifs associés aux polynômes $X^k(1 + X^4 + X^8 + X^{12})$ pour $k \in \{0,1,2,3\}$, ce qui s'interprète facilement musicalement.*

4.2. *Recherche dans* $\mathbb{F}_2[X]/(X^n+1)$

Afin d'obtenir des coefficients dans $\{0,1\}$, on peut également penser à chercher un complément dans $\mathbb{F}_2[X]/(X^n+1)$. En effet, si on note $\widetilde{P_A}$ et $\widetilde{P_B}$ la réduction de P_A et de P_B modulo 2, on a encore $\widetilde{P_A}\widetilde{P_B} = \sigma_n(X)$ dans $\mathbb{F}_2[X]/(X^n+1)$. Parmi les compléments de $\widetilde{P_A}$ dans $\mathbb{F}_2[X]/(X^n+1)$, on cherchera ensuite ceux qui se relèvent en un complément de P_A. Pour trouver un complément dans $\mathbb{F}_2[X]/(X^n+1)$, la démarche est la même, mais les polynômes cyclotomiques ne sont plus forcément irréductibles dans $\mathbb{F}_2[X]$.

Reprenons le motif $A = \{0,1,8,9,17,28\}$ de l'exemple 22. Montrons qu'il existe un motif $B \subset \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{Z} = A \oplus B \oplus 36\mathbb{Z}$. On peut supposer, sans perte de généralité, que $P_B(0) = 1$.

Dans $\mathbb{F}_2[X]$, on a la factorisation en irréductibles suivante :

$$X^{36} + 1 = (1+X)^4(1+X+X^2)^4(1+X^3+X^6)^4. \tag{8}$$

L'anneau $\mathbb{F}_2[X]/(X^{36}+1)$ est donc isomorphe (théorème chinois) à :

(9) $$\mathbb{F}_2[X]/(X^{36}+1) \simeq \mathbb{F}_2[X]/\left((1+X)^4\right) \times \mathbb{F}_2[X]/\left((1+X+X^2)^4\right) \times \mathbb{F}_2[X]/\left((1+X^3+X^6)^4\right).$$

L'image de $\widetilde{P_A}(X) = 1+X+X^8+X^9+X^{17}+X^{28}$ par cet isomorphisme est $(1+X, 0, 1+X+X^4+X^8+X^9+X^{16}+X^{17})$. On cherche donc l'image de $\widetilde{P_B}(X)$ sous la forme $(1+X^2, B_2, 0)$ où $B_2 \in \mathbb{F}_2[X]$ est de degré inférieur ou égal à 7. De même que dans la partie précédente, on peut donc écrire, dans $\mathbb{F}_2[X]$:

(10) $$\widetilde{P_B}(X) = (1+X^2)E_1 + B_2E_2,$$

avec $E_1 = (1+X+X^2)^4(1+X^3+X^6)^4$ et $E_2 = X^4(1+X)^4(1+X^3+X^6)^4$.

Il reste maintenant à faire en sorte que $P_B(1) = 6$, *i.e.* que $P_B(X)$ ne contienne que 6 monômes. Or $\widetilde{P_B}(X)$ est divisible par le pgcd de E_1 et E_2 (dans $\mathbb{F}_2[X]$), qui vaut $(1+X^3+X^6)^4 = 1+X^{12}+X^{24}$. On peut par exemple chercher $\widetilde{P_B}(X)$ sous la forme $\widetilde{P_B}(X) = (1+X^{12}+X^{24})(1+X^k)$, pour un certain entier k. Il vient alors

(11) $$1+X^k = (1+X^2)(1+X+X^2)^4 + B_2X^4(1+X)^4 = 1+X^2+(1+X^2)^2X^4\left(1+X^2+B_2\right).$$

$k=2$ convient (avec $B_2 = 1+X^2$), et on vérifie que le polynôme $P_B(X) = (1+X^2)(1+X^{12}+X^{24}) = 1+X^2+X^{12}+X^{14}+X^{24}+X^{26}$, associé au motif $B = \{0,2,12,14,24,26\}$, répond au problème.

Suggestions et pistes de réflexion

► *Les pistes de réflexion suivantes ne sont qu'indicatives et il n'est pas obligatoire de les suivre. Vous pouvez choisir d'étudier, ou non, certains des points proposés, de façon plus ou moins approfondie, mais aussi toute autre question à votre initiative. Vos investigations comporteront une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats. À défaut, si vos illustrations informatiques n'ont pas abouti, il est conseillé d'expliquer ce que vous auriez souhaité mettre en œuvre.*

— On pourra prouver les assertions non démontrées du texte, à l'exception des théorèmes 12 et 17 ;
— On pourra reproduire et détailler les différents calculs conduits dans le texte ;
— On pourra interpréter la notion de canon direct d'un point de vue musical ;
— On pourra écrire à l'aide d'un logiciel de calcul formel un programme qui teste si un canon $A+B$ est direct, et le tester sur l'exemple 7 et dans le cas où

$$A = \{0,3,6,12,23,27,36,42,47,48,51,71\} \text{ et } B = \{0,8,10,18,26,64\}.$$

— On pourra montrer et illustrer (à l'aide d'un logiciel de calcul formel) le corollaire 15.
— On pourra écrire à l'aide d'un logiciel de calcul formel un programme qui teste si un motif A pave $\mathbb{Z}$ en utilisant le théorème 20.
— On pourra détailler, en utilisant un logiciel de calcul formel, les exemples de la partie 4.
— On pourra montrer que $\{0,1,4,5\}$ pave $\mathbb{Z}$, et chercher un complément B tel que $A \oplus B \oplus 8\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.