Université de Bordeaux — **Arithmétique – M1MA7W01**
Master 1 CSI — Année 2013–2014

FEUILLE D'EXERCICES n° 2

Exercice 1 – Factoriser le polynôme $P = X^5+X+1$ dans $\mathbb{F}_2[X]$. Quel est l'ordre du groupe $(\mathbb{F}_2[X]/\langle P\rangle)^*$?

Exercice 2 – On pose $A = \mathbb{F}_5[X]/\langle X^3 - X + 1\rangle$.

1) Montrer que $a^{25} = a$ pour tout $a \in A$ [*on pourra utiliser le théorème chinois*].

2) Le groupe A^* est-il cyclique ?

★ **Exercice 3** – Soient A et B deux anneaux commutatifs. Quelle est la caractéristique de l'anneau $A \times B$, en fonction de celles de A et B ?

Exercice 4 – Soit K un corps fini de cardinal q. Soit p un nombre premier ne divisant pas q. Posons $\Phi = X^{p-1} + \cdots + X + 1$. On suppose que Φ a une racine a dans K.

1) Déterminer l'ordre de a dans le groupe K^*.

2) En déduire que p divise $q - 1$.

Exercice 5 – Soit K un corps fini de cardinal 2048. Soit $x \in K^*$ tel que $x \neq 1$. Quelle est la caractéristique p de K ? Quel est le degré de x sur $\mathbb{F}_p$?

Exercice 6 – On pose $K = \mathbb{F}_2[Y]/\langle Y^4 + Y + 1\rangle$ et on désigne par α la classe de Y dans K. Notons $\beta = \alpha^2 + \alpha$.

1) Montrer que K est un corps.

2) Trouver le polynôme minimal de β sur $\mathbb{F}_2$. Quel est le cardinal de $\mathbb{F}_2(\beta)$?

3) Factoriser $X^3 + 1$ dans $K[X]$.

4) Quel est le polynôme minimal de α sur $\mathbb{F}_2(\beta)$?

Exercice 7 – On pose $K = \mathbb{F}_5[Y]/\langle Y^3 + 2Y + 1\rangle$ et on note α la classe de Y dans K.

1) Vérifier que K est un corps.

2) Trouver le polynôme minimal de $\alpha + 1$ sur $\mathbb{F}_5$.

Exercice 8 – Soit p un nombre premier impair. Montrer que les anneaux $(\mathbb{F}_p)^3$ et $\mathbb{F}_p[X]/\langle X^3 - X\rangle$ sont isomorphes.