Université Bordeaux 1
Mathématiques

MHT203 – Cryptologie
Année 2012–2013

FEUILLE D'EXERCICES n° 4

PGCD - PPCM - Théorème de Bezout

Exercice 1 – Si $a = 462$ et $b = 104$ calculer $d = \text{pgcd}(a, b)$, puis $\text{ppcm}(a, b)$. Déterminer un couple d'entiers (u, v) tels que $au + bv = d$.

Exercice 2 –

1) Trouver deux entiers tels que $29u + 24v = 1$.

2) Déterminer l'ensemble des couples $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $29u + 24v = 3$.

3) Si $x, y \in \mathbb{Z}$ sont tels que $29x + 24y = 3$, que peut-on dire de x et de y ?

4) Si $x, y \in \mathbb{Z}$ sont tels que $29x + 24y = 5$, que peut-on dire de x et de y ?

Exercice 3 – Calculer les pgcd suivants : $\text{pgcd}(46848, 2379)$, $\text{pgcd}(13860, 4488)$ et $\text{pgcd}(30076, 12669, 21733)$.

Exercice 4 – Quel est le plus petit entier $n > 0$, qui soit multiple de $1, 2, \ldots, 10$?

Exercice 5 – Calculer $\text{pgcd}(357, 629)$ puis $d = \text{pgcd}(357, 629, 221)$. Trouver des entiers x, y et z tels que $357x + 629y + 221z = d$.

Exercice 6 – Soit a, b et c des entiers. On suppose que $a \mid bc$ et $\text{pgcd}(a, b) = 1$. En utilisant une relation de Bezout, montrer que $a \mid c$.

Exercice 7 –

1) Montrer que 15 et 28 sont premiers entre eux.

2) Trouver une solution particulière de l'équation $28x - 15y = 1$. En déduire une solution de $28x - 15y = 11$.

3) Caculer le pgcd de 15 et 21. L'équation $15x - 21y = 3$ admet elle des solutions dans $\mathbb{Z}^2$?

4) Même question pour l'équation $15x - 21y = 5$?