JACOBIENS, JACOBIENNES ET STABILITÉ NUMÉRIQUE

par

Jean-Marc Couveignes

Résumé. — On étudie la complexité et la stabilité des calculs dans la jacobienne des courbes de grand genre sur le corps des complexes avec une attention particulière aux courbes modulaires.

***Abstract* (Jacobians and numerical stability).** — This paper is concerned with the complexity and stability of arithmetic operations in the jacobian variety of curves over the field of complex numbers, as the genus grows to infinity. We focus on modular curves.

Table des matières

1. Introduction

Il est traditionnel de calculer dans le groupe des points de la jacobienne d'une courbe algébrique projective lisse et géométriquement irréductible X de genre g en représentant tout élément de ce groupe par un diviseur effectif de degré g, une fois choisi un tel diviseur O comme origine. La somme de deux diviseurs $P-O$ et $Q-O$ est *réduite* par le calcul de l'espace linéaire associé au diviseur $P+Q-O$ suivi de la localisation des zéros d'une fonction non nulle de cet espace.

Comme l'application de Jacobi,

$$S^gX \to J_X$$

de la puissance symétrique g-ième S^gX de X dans sa jacobienne J_X, n'est pas un isomorphisme, la représentation n'est pas unique.

Si le corps de base est un corps fini $\mathbb{F}_q$, les opérations arithmétiques y sont exactes et rapides.

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11F11, 11F25, 11F30, 11Y16, 11Y35, 65E05, 65Y20, 68Q15.
Mots clefs. — jacobienne, approximation, stabilité, formes modulaires, complexité algorithmique, machine de Turing, temps polynomial déterministe.

On considère ici le cas où le corps de base est le corps $\mathbb{C}$ des complexes. On se donne un modèle analytique naturel et une mesure sur $X(\mathbb{C})$. On s'intéresse à la complexité des algorithmes utilisés pour ajouter et réduire des diviseurs. Le cadre est celui des machines de Turing classiques. En effet, on peut avoir en vue des applications arithmétiques comme le calcul de nombres de points, ou de coefficients de formes modulaires et les calculs en nombres complexes ne sont alors qu'une étape dans la recherche d'une quantité discrète. Le projet de Bas Edixhoven pour répondre à une question de René Schoof [**6, 7, 3**] se prête à cette approche.

Bien sûr, les machines de Turing ordinaires ne manipulent pas les nombres réels ni complexes mais plutôt des nombres rationnels, décimaux ou binaires. Cependant, on peut voir un nombre réel α comme un oracle qui, pour tout entier positif k, retourne une valeur binaire ou décimale approchée de α à $\exp(-k)$ près. Si une machine de Turing doit résoudre un problème dont les entrées sont des nombres réels, elle reçoit un oracle pour chacun de ces réels. Si la machine de Turing calcule un nombre réel, on lui donne en entrée la précision absolue k requise et elle retourne une valeur approchée à $\exp(-k)$ près du résultat. On dit que la machine est polynomiale si elle répond en temps polynomial en la taille des données et k. On note que la recherche des racines complexes d'un polynôme unitaire à coefficients complexes se fait en temps déterministe polynomial grâce à la méthode de quadrichotomie de Weyl par exemple. On veut dire par là qu'une valeur approchée à $\exp(-k)$ près de chaque racine peut être calculée en temps polynomial en le degré du polynôme, la taille des coefficients (logarithme du maximum des modules des coefficients) et la précision absolue k requise.

On veut savoir si la complexité asymptotique des opérations arithmétiques dans la jacobienne est polynomiale en le genre de la courbe. La première difficulté est de donner un sens précis à cette assertion. Plutôt que de rester dans le vague, on formule et on étudie ces questions dans le cas important et représentatif des courbes modulaires $X_0(p)$ lorsque p est un entier premier qui tend vers l'infini. L'algorithmique de ces courbes est riche et largement explorée. On trouve dans [**4, 5, 8**] des algorithmes pour l'étude homologique des courbes modulaires et des méthodes analytiques expérimentales motivées par la vérification de conjectures arithmétiques et la recherche de points rationnels.

La section 2 décrit le modèle analytique standard de ces courbes ainsi que ses propriétés algorithmiques. On y rappelle d'abord les résultats de Manin, Shokurov, Cremona et Merel concernant le calcul des périodes, et on en donne une expression quantifiée du point de vue de la complexité algorithmique et de la stabilité numérique. Cette dernière est assurée en dernier ressort par des minorations du volume des périodes et du déterminant jacobien de l'application d'intégration de Jacobi. Ces minorations reposent elles mêmes sur des considérations d'intégralité des coefficients des formes modulaires primitives, propres et normalisées.

On présente dans la section 3 des algorithmes pour les opérations élémentaires dans la jacobienne $J_0(p)$ et pour la résolution effective du problème inverse de Jacobi. La complexité et la stabilité de ces algorithmes sont étudiées avec les outils de la section 2 puis estimées dans les théorèmes 1 et 2. On obtient des algorithmes déterministes polynomiaux en p. Le caractère déterministe de ces algorithmes s'explique en dernier lieu par la connexité du tore analytique complexe $J_0(p)(\mathbb{C})$.

Tous les lemmes et définitions concernant la localisation et la stabilité des zéros de fonctions analytiques sont présentés dans l'appendice A qui est indépendant mais doit être au moins parcouru avant de lire les sections 2 et 3.

Les méthodes, les énoncés et les démonstrations que nous donnons pour les courbes $X_0(p)$ s'étendent sans peine au cas de $X_1(p)$. Pour les courbes modulaires de niveau composé, il faut une majoration des coefficients des développements de Fourier en toutes les pointes ainsi qu'un algorithme pour les calculer.

On trouvera un index à la fin de cet article.

Convention importante : le symbole $\mathcal{O}$ désigne partout une constante absolue positive et effective, chaque fois différente. La présence de ce symbole dans une formule ou un énoncé signifie que cette formule ou cet énoncé sont vrais si, pour chaque occurence, ce symbole est remplacée par une constante positive effective bien choisie.

2. Courbes modulaires $X_0(p)$

Cette section rappelle, précise et complète quelques résultats métriques et algorithmiques concernant les courbes modulaires $X_0(p)$. On supposera que p est premier et que le genre g de $X_0(p)$ est au moins 2.

Le paragraphe 2.1 introduit quelques notations et un recouvrement non injectif de $X_0(p)$ par deux disques analytiques centrés en chacune des deux pointes.

Les propriétés élémentaires des formes primitives, propres et normalisées sont rappelées dans le paragraphe 2.2 et celles de l'homologie dans le paragraphe 2.3. Le calcul des périodes est abordé dans le paragraphe 2.4. Ces trois paragraphes résument le travail de Manin, Shokurov, Cremona et Merel sur cette question.

Le paragraphe 2.5 établit une minoration du volume du réseau des périodes. Une formule d'intégration sur les surfaces de Riemann relie ce volume au produit des normes de Petersson des formes primitives, propres et normalisées, ces dernières étant faciles à minorer parce que le développement de Fourier commence par $(1 + O(q))dq$ où $q = \exp(2i\pi\tau)$ est le paramètre de Tate associé à un τ du demi-plan de Poincaré.

Le paragraphe 2.6 établit des majorations simples mais nécessaires des intégrales de Jacobi et définit l'*instabilité* d'un diviseur effectif de degré g. Le paragraphe 2.7 construit un diviseur d'instabilité assez petite. Cela revient à trouver g points dans le modèle canonique de $X_0(p)$ qui ne soient proches d'aucun hyperplan. Autrement dit, le jacobien en ces g points n'est pas trop petit. On prend le parti (maladroit en pratique mais simple en théorie) de chercher les g points dans le voisinage de la pointe à l'infini. Le terme principal du développement du jacobien y est le wronskien. On le minore grâce à l'intégralité des coefficients de son développement de Fourier.

Le paragraphe 2.9 étudie la stabilité de l'application inverse de Jacobi. Celà se réduit à majorer la différence entre cette application et sa linéarisée.

La connaissance d'un g-uplet de points de faible instabilité, donné au paragraphe 2.7, permet de construire au paragraphe 2.10 des sous-ensembles finis de taille modeste et bien distribués dans le tore complexe. Comme les éléments de ces ensembles sont images par l'application de Jacobi de diviseurs connus, il sont des auxiliaires précieux pour la résolution approchée du problème inverse de Jacobi. Ils permettent de discrétiser ce problème.

2.1. Un modèle analytique. — Soit p un nombre premier et $X = X_0(p)$ la courbe modulaire de niveau p associée au sous groupe de congruence $\Gamma = \Gamma_0(p)$ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. On note $\mathcal{H}$ le demi-plan de Poincaré et $\mathcal{H}^* = \mathcal{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. La surface de Riemann compacte quotient $\Gamma\backslash\mathcal{H}^*$ est $X(\mathbb{C})$. Son genre est $g = \frac{p+1-3\nu_2-4\nu_3}{12}$ avec

$\nu_2 = 1 + \left(\frac{-1}{p}\right)$ et $\nu_3 = 1 + \left(\frac{-3}{p}\right)$. Il y a ν_2 points elliptiques d'ordre 2 et on note $\mathcal{P}_2$ le diviseur somme de ces points. De même il a ν_3 points elliptiques d'ordre 3 et on note $\mathcal{P}_3$ le diviseur somme de ces points. Voir [**15**, Propositions 1.40 et 1.43]. Le genre de X est compris entre $\frac{p-13}{12}$ et $\frac{p+1}{12}$. Le quotient $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ est un ouvert de Zariski de X noté $Y = Y_0(p)$. On note que la largeur de la pointe ∞ est 1 et la largeur de la pointe 0 est p. Pour $\tau \in \mathcal{H}$ on pose $q = q(\tau) = q_\infty(\tau) = \exp(2i\pi\tau)$ et $w(\tau) = -\frac{1}{p\tau}$ et $q' = q'(\tau) = q_0(\tau) = q(w(\tau)) = \exp(\frac{-2i\pi}{p\tau})$. On note $P = P_\infty = P(\tau) = P(q)$ le point de Y associé à τ et $P' = P_0 = P'(\tau) = P'(q) = P(w(\tau)) = W(P) = P(q')$ où W est l'involution d'Atkin-Lehner. On a le diagramme

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "W"] & Y \\
D-\{0\} \arrow[u, "P_\infty"] \arrow[ur, "P_0"] & D-\{0\} \arrow[u, "P_\infty"'] \\
\mathcal{H} \arrow[u, "q"] \arrow[ur, "q'"] \arrow[r, "w"'] & \mathcal{H} \arrow[u, "q"']
\end{tikzcd}$$

Étant donnés deux réels R_∞ et R_0 plus petits que 1 on peut se demander si l'union de l'image par P_∞ du disque ouvert $D(0, R_\infty)$ et de l'image par P_0 de $D(0, R_0)$ recouvre $X(\mathbb{C})$.

On pose $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de sorte que $S\tau = -1/\tau$ et $T\tau = \tau + 1$. Soit $\mathcal{R}$ le domaine fondamental usuel de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, délimité par le cercle de centre 0 et de rayon 1 et par les droites d'abscisses $-1/2$ et $1/2$. Alors un domaine fondamental pour Γ est constitué de l'union de $\mathcal{R}$ et des $ST^k\mathcal{R}$ pour k entier de 0 à $p-1$. Ces derniers sont contenus dans l'image par S de l'ensemble des $\tau = a+ib$ avec $b \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc leur image par w est constituée de complexes dont la partie imaginaire est au moins $\frac{\sqrt{3}}{2p}$. Si on choisit $R_0 > \exp(-\frac{\pi\sqrt{3}}{p})$ alors l'image de $D(0, R_0)$ par P_0 recouvre les $ST^k\mathcal{R}$ pour k de 0 à $p-1$.

Comme $\mathcal{R}$ est contenu dans le demi plan des parties imaginaire au moins égales à $\sqrt{3}/2$ on prend $R_\infty > \exp(-\pi\sqrt{3})$ et l'image de $D(0, R_\infty)$ par P_∞ recouvre $\mathcal{R}$.

On pose donc $R_\infty = 0.005$ et $R_0 = 1 - \frac{1}{p}$

On a donc recouvert $X(\mathbb{C})$ par l'image de deux disques analytiques complexes $D_\infty = D(0, R_\infty)$ et $D_0 = D(0, R_0)$.

2.2. Différentielles. — On peut maintenant calculer des espaces de formes différentielles sur X. On fixe donc un entier $d \geq 1$. À toute forme modulaire parabolique f de poids $2d$ sur Γ on associe la différentielle $\omega = (2i\pi)^d f(d\tau)^d$ de degré d. D'après [**15**, Proposition 2.16] on a

$$\mathrm{Div}(\omega) = \mathrm{Div}(f) - d(0) - d(\infty) - \frac{d}{2}\mathcal{P}_2 - \frac{2d}{3}\mathcal{P}_3.$$

On pose donc $\Delta_d = (d-1)(0) + (d-1)(\infty) + \lfloor\frac{d}{2}\rfloor\mathcal{P}_2 + \lfloor\frac{2d}{3}\rfloor\mathcal{P}_3$ et on cherche une base $\mathcal{D}_d$ de l'espace $\mathcal{H}^d(\Delta_d)$ des formes différentielles de degré d et de diviseur $\geq -\Delta_d$.

On prend pour $\mathcal{D}_d$ l'ensemble des $\omega = (2i\pi)^d f(q)(d\tau)^d = \frac{f(q)}{q^d}(dq)^d$ où $f(q)$ est une forme modulaire parabolique primitive[(1)], propre[(2)] et normalisée[(3)] sur $\Gamma = \Gamma_0(p)$ et de poids $2d$. Si f est une telle forme elle admet un développement $f = \sum_{k\geq 1} a_k q_\infty^k$ avec $a_1 = 1$ et pour tout entier $k \geq 1$ on montre que le coefficient a_k est un entier algébrique majoré en module par k^{d+2}. Il suffit de le montrer pour $k = \ell^n$ une puissance d'un premier ℓ. D'après le théorème de Deligne on a $|a_\ell| \leq 2\ell^{d-\frac{1}{2}}$ et d'après [**1**, Theorem 3]

$$|a_{\ell^{n+2}}| \leq |a_\ell a_{\ell^{n+1}}| + \ell^{2d-1}|a_{\ell^n}|$$

donc $|a_{\ell^n}| \leq u_n \ell^{\frac{n(2d-1)}{2}}$ où u_n est la suite récurrente $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$. Donc $u_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}}{2\sqrt{2}}$ et $|u_n| \leq 4^n \leq \ell^{2n}$ donc $|a_{\ell^n}| \leq \ell^{2n}\ell^{\frac{n(2d-1)}{2}}$.

Le développement de ω en q_∞ est donc le développement standard, donné par les valeurs propres des opérateurs de Hecke. On peut calculer les coefficients a_k comme valeurs propres des opérateurs de Hecke agissant sur les symboles de Manin-Shokurov suivant [**4, 14, 10**]. Les plongements complexes des valeurs propres peuvent alors être approchés en temps polynomial en p et la précision absolue requise, par un algorithme de recherche de racines de polynômes comme celui de Weyl.

Le développement de ω en q_0 est le tiré en arrière de ω par l'application $P_0 : D - \{0\} \to Y$. Comme P_0 est la composée de P_∞ et de W, le développement de ω en q_0 est le développement de $W(\omega)$ en q_∞. Mais ω est vecteur propre de W de valeur propre ± 1. On a donc la même majoration pour les coefficients du développement de ω en q_0.

***Lemme 1* (Manin, Shokurov, Cremona, Merel).** — *Il existe un algorithme qui pour tous p premier, $d \geq 1$ et $r \geq 1$ calcule les plongements complexes des r premiers coefficients de toutes les formes modulaire primitives, propres et normalisées de niveau p et poids $2d$ en temps polynomial en p, d, r et la précision absolue requise.*

2.3. L'homologie de la courbe. — La théorie de Manin [**12, 14, 4**] établit que l'homologie relative $H_1(X, ptes, \mathbb{Z})$ est engendrée par les symboles modulaires. Un symbole est noté indifféremment $(c : d) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \{\frac{b}{d}, \frac{a}{c}\}$. L'ensemble des symboles est $\mathbb{P} = \mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. On rappelle que $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour tout $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ on note (γ) le symbole $\{\gamma(0), \gamma(\infty)\}$.

On note $\mathbf{B}$ le sous-$\mathbb{Z}$-module de $\mathbb{Z}^\mathbb{P}$ engendré par les $(c : d) + (c : d)S = (c : d) + (-d : c)$ et $(c : d) + (c : d)TS + (c : d)(TS)^2 = (c : d) + (c + d : -c) + (d : -c - d)$ où $(c : d)$ parcourt $\mathbb{P}$.

On note $\mathbf{Z}$ le sous $\mathbb{Z}$-module libre et saturé de $\mathbb{Z}^\mathbb{P}$ engendré par les $(c : 1)$ pour $c \neq 0$ et par $(\infty) = (0 : 1) + (1 : 0)$. C'est le module des symboles à bord nul. La base formée des $(c : 1)$ pour $c \neq 0$ et de (∞) permet d'identifier $\mathbf{Z}$ au réseau $\mathbb{Z}^p$ de $\mathbb{R}^p$ muni de la forme bilinéaire canonique (de matrice identité dans cette base).

---

(1) Cela signifie qu'elle ne provient pas d'une forme de niveau plus petit. Se dit en Anglais *newform*. Cette condition est vide ici puisque le niveau p est premier.
(2) Autrement dit, f est vecteur propre des opérateurs de Hecke.
(3) Son développement de Fourier commence par q.

On note que $\mathbf{B} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbb{R}^p$. Comme le quotient $\mathbf{Z}/\mathbf{B} = H_1(X, \mathbb{Z})$ est sans-torsion, le sous module $\mathbf{B}$ est saturé dans $\mathbf{Z}$. On identifie $H_1(X, \mathbb{Z})$ à la projection orthogonale de $\mathbf{Z}$ sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ orthogonal au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}\mathbf{B}$ engendré par $\mathbf{B}$.

Comme $\mathbf{B}$ est engendré par des vecteurs de norme $\leq \sqrt{3}$ et qu'il a pour dimension $p - 2g$, son volume V est un entier positif majoré par $3^{\frac{p-2g}{2}}$. Mais d'après [**13**, Proposition I.2.9, Proposition I.3.5] $H_1(X, \mathbb{Z})$ est inclus dans $\frac{1}{V^2}\mathbb{Z}^p$ et son volume est égal à $1/V$.

D'après l'inégalité d'Hermite [**13**, Théorème II.2.1], le réseau $V^2 H_1(X, \mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}^p$ admet une base constituée de vecteurs de norme[(4)] majorée par $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{g(g-1)}{2}} 3^{\frac{p-2g}{2}}$. L'algorithme LLL [**2**, Theorem 2.6.2] produit en temps polynomial en p une base de $V^2 H_1(X, \mathbb{Z})$ formée de vecteurs entiers de norme $\leq 2^{\frac{g(g-1)}{4}} 3^{\frac{p-2g}{2}} \leq 3^{p^2}$. Donc ces vecteurs sont des combinaisons de symboles avec des coefficients majorés par cette même borne. On peut faire beaucoup mieux en y regardant de plus près. Au total, on obtient une base $\mathcal{B}$ de $H_1(X, \mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}^p$ dont les vecteurs sont des combinaisons de symboles à coefficients dans $\frac{1}{V^2}\mathbb{Z}$ dont les numérateurs sont des entiers bornés en valeur absolue par 3^{p^2}.

2.4. Les périodes. — On observe que le diviseur Δ_1 est nul. Donc les formes primitives, propres et normalisées de poids 2 donnent une base $\mathcal{D}_1$ de l'espace des formes différentielles holomorphes.

Le réseau $\mathcal{L}$ des périodes est construit en intégrant chaque forme de $\mathcal{D}_1$ le long des symboles comme font Tingley dans sa thèse et Cremona dans son livre [**4**, Proposition 2.10.1]. Si $g \in \Gamma_0(p)$ avec $g = \begin{pmatrix} a & b \\ pc & d \end{pmatrix}$ et $c > 0$ on pose $y_0 = \frac{1}{pc}$ et $x_1 = -dy_0$ et $x_2 = ay_0$. Alors pour toute forme $f = \sum_{k \geq 1} a_k q_\infty^k$ de poids 2 on a

$$\int_0^{g(0)} f(q)\frac{dq}{q} = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n} \exp(-2\pi n y_0)(\exp(2\pi i n x_2) - \exp(2\pi i n x_1)). \tag{1}$$

Cette quantité est évaluée en temps polynomial en p, c et la précision absolue requise et elle est majorée en module par un polynôme en p et c.

Si $(c : 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} = \{0, \frac{1}{c}\}$ est un symbole différent de $(0 : 1)$ et $(1 : 0)$, on peut supposer que $1 \leq c < p$. Afin d'utiliser la formule d'intégration (1), on choisit deux entiers u et v tels que $uc - vp = 1$ et on note que la matrice $g = \begin{pmatrix} u & 1 \\ pv & c \end{pmatrix} \in \Gamma_0(p)$ vérifie $g(0) = 1/c$. On peut choisir $0 \leq u, v < p$. Donc $\int_{(c:1)} f(q)\frac{dq}{q}$ est évaluée en temps polynomial en p et la précision absolue requise, et elle est majorée par un polynôme en p.

Comme les éléments de la base $\mathcal{B}$ de $H_1(X, \mathbb{Z})$ construite ci-dessus sont des combinaisons linéaires des symboles $(c : 1)$ et $(\infty) \in \mathbf{B}$ avec des coefficients dans $\frac{1}{V^2}\mathbb{Z}$ à numérateurs majorés par 3^{p^2} en valeur absolue, on peut calculer les périodes $\int_\gamma \omega$ pour $\gamma \in \mathcal{B}$ et $\omega \in \mathcal{D}_1$ en temps polynomial en p et la précision absolue requise et ces périodes sont majorées en module par $\exp(p^{\mathcal{O}})$.

[(4)] Noter que dans le livre de Martinet, la norme d'un vecteur est définie comme la valeur de la forme quadratique en ce vecteur. Ici, la norme est la racine carrée de la forme quadratique.

2.5. Le tore complexe. — L'espace $H = \mathcal{H}^1 \oplus \bar{\mathcal{H}}^1$ des formes harmoniques admet une forme bilinéaire définie par intégration. Si $\omega_1 = u_1 dq + \overline{v_1 dq}$ et $\omega_2 = u_2 dq + \overline{v_2 dq}$ on pose $< \omega_1, \omega_2 >= \int_X \omega_1 \wedge \omega_2$.

L'intégration définit aussi un accouplement $\int : H \times H_1(X, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ qui à (ω, γ) associe la période $\int_\gamma \omega$. Il en résulte un isomorphisme entre H et le dual de $H_1(X, \mathbb{C})$. Mais l'accouplement d'intersection induit un isomorphisme entre $H_1(X, \mathbb{C})$ et son dual. On en déduit un isomorphisme ι entre H et $H_1(X, \mathbb{C})$ qui à tout ω associe l'unique $\gamma = \iota(\omega)$ tel que $\int_g \omega = \gamma \cdot g$ pour tout $g \in H_1(X, \mathbb{C})$. D'après [**9**, Proposition III.2.3.], cet isomorphisme est une isométrie :

$$< \omega_1, \omega_2 >= \int_X \omega_1 \wedge \omega_2 = \iota(\omega_1) \cdot \iota(\omega_2).$$

On définit l'opérateur $^* : H \to H$ par $^*(udq + \overline{vdq}) = (-iudq + i\overline{vdq})$. On définit un produit hermitien sur H par

$$(\omega_1, \omega_2) = \int_X \omega_1 \wedge {}^*\bar{\omega}_2 = i \int_X (u_1 \bar{u}_2 + \bar{v}_1 v_2) dq \wedge \overline{dq}.$$

C'est le produit de Petersson. Les opérateurs de Hecke sont autoadjoints pour ce produit hermitien. Donc deux formes distinctes dans $\mathcal{D}_1$ sont orthogonales. Il reste à évaluer (ω, ω) pour chaque élément ω de la base $\mathcal{D}_1$.

On note $\tilde{\mathcal{B}}$ la base de $H_1(X, \mathbb{Z})$ duale à gauche de $\mathcal{B}$ pour la forme d'intersection, c'est-à-dire que pour tout $\gamma \in \mathcal{B}$ il existe un unique $\tilde{\gamma} \in \tilde{\mathcal{B}}$ tel que $\tilde{\gamma} \cdot \gamma = 1$ et si $\gamma \neq \gamma'$ on a $\tilde{\gamma} \cdot \gamma' = 0$. Ainsi $\iota(\omega) = \sum_{\gamma \in \mathcal{B}} \tilde{\gamma} \int_\gamma \omega$.

Donc

$$(\omega, \omega) =< \omega, {}^*\bar{\omega} >= \iota(\omega) \cdot \iota({}^*\bar{\omega}) = \iota(\omega) \cdot \iota(i\bar{\omega}) = i \sum_{\gamma, \gamma' \in \mathcal{B}} \tilde{\gamma} \cdot \tilde{\gamma}' \int_\gamma \omega \int_{\gamma'} \bar{\omega}.$$

Notons P la matrice $2g \times g$ des périodes holomorphes

$$P = \left(\int_\gamma \omega \right)_{\gamma \in \mathcal{B}, \, \omega \in \mathcal{D}_1}.$$

Soit $M = (P|\bar{P})$ la matrice $2g \times 2g$ des périodes harmoniques. Soit $M^* = (i\bar{P}| - iP)$. Soit $\mathcal{Q} = (\gamma \cdot \gamma')_{\gamma, \gamma' \in \mathcal{B}}$ la matrice de la forme d'intersection dans la base $\mathcal{B}$. Soit $\tilde{\mathcal{Q}} = {}^t\mathcal{Q}^{-1} = (\tilde{\gamma} \cdot \tilde{\gamma}')_{\gamma, \gamma' \in \mathcal{B}}$ la matrice de la forme d'intersection dans la base $\tilde{\mathcal{B}}$.

La matrice du produit scalaire de Petersson dans la base $\mathcal{D}_1 \cup \bar{\mathcal{D}}_1$ de H n'est autre que ${}^tM\tilde{\mathcal{Q}}M^*$. Comme le déterminant de $\mathcal{Q}$ est 1 et comme le volume du réseau $\mathcal{L}$ des périodes est le module du déterminant de M divisé par 2^g, il vient que ce volume est le produit des $\frac{1}{2}(\omega, \omega)$ pour ω dans la base $\mathcal{D}_1$.

On peut minorer chacun des (ω, ω) en notant que

$$\omega = \frac{f(q)}{q} dq = (1 + \sum_{k \geq 2} a_k q^{k-1}) dq$$

avec $|a_k| \leq k^3$ de sorte que $\int_X \omega \wedge {}^*\bar{\omega} = \int_X |1 + \sum_{k \geq 2} a_k q^{k-1}|^2 i dq \wedge \overline{dq}$. On observe que le disque formé des q de module inférieur à $\exp(-2\pi)$ est contenu dans un domaine fondamental de X donc $(\omega, \omega) \geq 2\pi r^2 \min_{|q| \leq r} |1 + \sum_{k \geq 2} a_k q^{k-1}|^2$ pour tout $r \leq \exp(-2\pi)$.

Or pour $|q| \leq r$ on a $|\sum_{k \geq 1} a_{k+1} q^k| \leq r \sum_{k \geq 0} (k+2)^3 r^k \leq \frac{8r}{(1-r)^4} \leq 0.016$ si $r = \exp(-2\pi)$. Ainsi $(\omega, \omega) \geq 2\pi \exp(-4\pi)(1 - 0.016)^2 \geq 2 \cdot 10^{-5}$ de sorte que le volume du réseau $\mathcal{L}$ des périodes est au moins 10^{-5g}.

Comme les périodes $\int_\gamma \omega$ sont majorées par $\exp(p^{\mathcal{O}})$ on en déduit que le volume de tout sous-réseau du réseau des périodes est minoré par $\exp(-p^{\mathcal{O}})$. De sorte que si l'on connaît les périodes avec une précision absolue polynomiale en p, on les connaît aussi avec une bonne précision relative. En particulier, si on connaît un point de $\mathbb{C}^{\mathcal{D}_1}$ par ses coordonnées complexes alors on connaît le point du tore $\mathbb{C}^{\mathcal{D}_1}/\mathcal{L}$ puisque $\mathcal{L}$ n'est pas trop petit ni trop aplati.

***Lemme 2* (Volume et complexité du réseau des périodes)**
Si $X_0(p)$ est de genre $g \geq 1$ on note $\mathcal{D}_1$ la base de $\mathcal{H}^1(X_0(p))$ constituée des formes primitives, propres et normalisées et on identifie le dual de $\mathcal{H}^1(X_0(p))$ à $\mathbb{C}^{\mathcal{D}_1}$. On appelle réseau des périodes le réseau de $\mathbb{C}^{\mathcal{D}_1}$ formé des périodes de $X_0(p)$. Ce réseau est de volume $\geq 10^{-5g}$. Tous les sous-réseaux non nuls du réseau des périodes ont un volume $\geq \exp(-p^{c_1})$ où c_1 est une constante positive effective. Le réseau des périodes admet une base constituée de vecteurs de norme $\leq \exp(p^{c_2})$ où c_2 est une constante positive effective. Une telle base peut être calculée en temps polynomial en p et la précision absolue requise.

2.6. L'application d'intégration de Jacobi. — On note $\mu_0 : D(0, R_0) \to \mathbb{C}^{\mathcal{D}_1}$ l'application d'intégration de Jacobi

$$\mu_0 : q_0 \mapsto \left(\int^{q_0} \omega\right)_{\omega\in\mathcal{D}_1}.$$

On ne précise pas l'origine o de l'intégrale. Cette application est bien définie à une constante additive près. On définit de même $\mu_\infty : D(0, R_\infty) \to \mathbb{C}^{\mathcal{D}_1}$ en veillant à choisir la même origine o

$$\mu_\infty : q_\infty \mapsto \left(\int^{q_\infty} \omega\right)_{\omega\in\mathcal{D}_1}.$$

Ces intégrales se calculent par intégration terme à terme de la série associée à la forme différentielle.

Le disque $D(0,1) \subset \mathbb{C}$ est muni de la distance usuelle associée à la norme sur $\mathbb{C}$ définie par le module $z \mapsto |z|$.

L'espace $\mathbb{C}^{\mathcal{D}_1}$ peut être muni des normes L^2 ou L^∞ dont la définition est rappelée au paragraphe A.1 de l'appendice.

L'application d'intégration de Jacobi est Lipschitzienne dans le sens suivant.

Soit P_1 un point de coordonnées τ_1, q_1 et q_1' tel que $q_1 = \exp(2i\pi\tau_1)$ est dans $D(0, R_\infty) = D(0, 0.005)$. Soit P_2 de coordonnées τ_2, q_2 tel que q_2 est proche de q_1, en ce sens que $q_2 \in D(0, 0.01)$. Pour tout $\omega \in \mathcal{D}_1$ on a $|\int_{q_1}^{q_2} \omega| \leq |q_2 - q_1| \max_{|q|\leq 0.01}(|\sum_{k\geq 1} a_k q^{k-1}|)$. Or pour $|q| \leq 0.01$ on a $|\sum_{k\geq 1} a_k q^{k-1}| \leq \sum_{k\geq 0}(k+1)^3 10^{-2k} \leq \frac{6}{0.99^4} \leq 7$. Donc

$$|\mu_\infty(P_2) - \mu_\infty(P_1)|_\infty \leq 7|q_2 - q_1| \text{ et } |\mu_\infty(P_2) - \mu_\infty(P_1)|_2 \leq 7\sqrt{g}|q_2 - q_1|.$$

Soit maintenant P_1 un point de coordonnées τ_1, q_1 et q_1' tel que $q_1' = \exp(\frac{-2i\pi}{p\tau_1})$ est dans $D(0, R_0) = D(0, 1 - \frac{1}{p})$. Soit P_2 de coordonnées τ_2, q_2' tel que q_2' est proche de q_1', en ce sens que $q_2' \in D(0, 1 - \frac{1}{2p})$. Pour tout $\omega \in \mathcal{D}_1$ on a $|\int_{q_1'}^{q_2'} \omega| \leq |q_2' - q_1'| \max_{|q|\leq 1-\frac{1}{2p}}(|\sum_{k\geq 1} a_k q^{k-1}|)$. Or pour $|q| \leq 1 - \frac{1}{2p}$ on a $|\sum_{k\geq 1} a_k q^{k-1}| \leq \sum_{k\geq 0}(k+1)^3(1 - \frac{1}{2p})^k \leq 96p^4$. Donc

$$|\mu_0(P_2)-\mu_0(P_1)|_\infty \leq 96p^4|q_2'-q_1'| \text{ et } |\mu_0(P_2)-\mu_0(P_1)|_2 \leq 96p^4\sqrt{g}|q_2'-q_1'|.$$

Ainsi la perte de précision occasionnée par l'application de Jacobi est $O(\log p)$.

Lemme 3 **(Majoration des intégrales de Jacobi).** — *Pour tout premier p on pose $R_\infty = 0.005$ et $R_0 = 1-\frac{1}{p}$ et on recouvre $X_0(p)$ par les deux disques analytiques D_∞ et D_0 centrés en chacune des deux pointes ∞ et 0 et de rayons respectifs R_∞ et R_0. Donc $D_\infty = D(0,R_\infty) = \{q_\infty, |q_\infty| \leq 0.005\}$ et $D_0 = D(0,R_0) = \{q_0, |q_0| \leq 1-\frac{1}{p}\}$.*

Sur chacun de ces deux disques, l'intégration de Jacobi définit une application à valeur dans le dual de l'espace des formes holomorphes $\mathcal{H}^1(X_0(p))$. On munit $\mathcal{H}^1(X_0(p))$ de la base $\mathcal{D}_1$ constituée des formes primitives, propres et normalisées et on note abusivement $\mathbb{C}^{\mathcal{D}_1}$ son dual, que l'on munit de la norme L^∞ associée à la base canonique (duale de $\mathcal{D}_1$).

L'application d'intégration de Jacobi est alors Lipschitzienne sur chacun des deux disques (et même sur leurs voisinages $D(0,0.01)$ et $D(0,1-\frac{1}{2p})$) et son coefficient de dilatation y est majoré par 7 sur le premier et par $96p^4$ sur le second.

Soit $\epsilon = (\epsilon_k)_{1\leq k\leq g} \in \{0,\infty\}^g$. On note D_ϵ le produit

$$D_\epsilon = D(0,R_{\epsilon_1}) \times \cdots \times D(0,R_{\epsilon_g}).$$

Les D_ϵ recouvrent le produit $X(\mathbb{C})^g$. L'application produit

$$\mu_\epsilon = \mu_{\epsilon_1} \times \cdots \times \mu_{\epsilon_g} : D_\epsilon \to \mathbb{C}^{\mathcal{D}_1}$$

associe au g-uplet $(q_1,\ldots,q_g)$ la somme des $\mu_{\epsilon_k}(q_{\epsilon_k,k})$ pour $1 \leq k \leq g$.

On note $(z_\omega)_\omega$ la base duale de la base canonique de $\mathbb{C}^{\mathcal{D}_1}$. On note $\mathcal{J}_{\mathcal{D}_1,\epsilon}$ le déterminant jacobien de l'application μ_ϵ en $(q_{\epsilon_1,1},\ldots,q_{\epsilon_g,g})$:

$$\mathcal{J}_{\mathcal{D}_1,\epsilon}(q_{\epsilon_1,1},\ldots,q_{\epsilon_g,g}) = \frac{\bigwedge z_\omega}{\bigwedge dq_{\epsilon_k,k}}(q_{\epsilon_1,1},\ldots,q_{\epsilon_g,g}) = \left|\frac{\omega}{dq_{\epsilon_k}}(q_{\epsilon_k,k})\right|_{\omega,k.}$$

Ce déterminant est une série entière de g variables dont les coefficients se majorent aisément à partir d'une majoration des coefficients des formes ω. Mais il peut parfaitement s'annuler. L'*instabilité* d'un g-uplet dans D_ϵ peut se définir comme l'opposé du logarithme du module de ce déterminant jacobien.

2.7. Jacobiens et wronskiens. — L'espace $\mathcal{H}^1$ des différentielles holomorphes est muni de la base $\mathcal{D}_1$ et de la norme L^∞ associée. Si $F = \sum_{\omega\in\mathcal{D}_1} f_\omega\omega$ cette norme est notée $|F| = |f| = \max_\omega |f_\omega|$. Puisqu'on dispose de deux disques analytiques sur $X(\mathbb{C})$ centrés en chacune des deux pointes, il est naturel d'introduire une norme $\mathcal{S}_\infty(F) = \max_{q_\infty\in\bar{D}(0,R_\infty)}\left|\frac{F}{dq_\infty}\right|$ et de même $\mathcal{S}_0(F) = \max_{q_0\in\bar{D}(0,R_0)}\left|\frac{F}{dq_0}\right|$. On introduit aussi les variantes $\hat{\mathcal{S}}_\infty(F) = \max_{q_\infty\in\bar{D}(0,\frac{1}{2})}\left|\frac{F}{dq_\infty}\right|$ et de même $\hat{\mathcal{S}}_0(F) = \max_{q_0\in\bar{D}(0,\frac{1}{2})}\left|\frac{F}{dq_0}\right|$.

Puisque toutes les normes sont équivalentes, les quotients $\mathcal{S}_0(F)/|F|$, $\mathcal{S}_\infty(F)/|F|$, $\hat{\mathcal{S}}_0(F)/|F|$, $\hat{\mathcal{S}}_\infty(F)/|F|$ pour $F \neq 0$ sont majorés et minorés par des bornes indépendantes de F. On veut montrer que le logarithme de ces bornes est polynomial en p. C'est évident pour la borne supérieure parce que les formes de la base

$\mathcal{D}_1$ s'écrivent $\omega = f(q_\infty)dq_\infty = \pm f(q_0)dq_0$ avec f d'ordre de grandeur[5] $(1,3)$. Il suffit d'appliquer le lemme 17 de majoration du reste.

Pour controler la borne inférieure, il suffit de trouver g points q_1, …, q_g de $D(0, R_\infty)$ tels que le module du jacobien $\mathcal{J}_{\mathcal{D}_1,(\infty,\dots,\infty)}(q_1,\dots,q_g)$ ait un logarithme borné inférieurement par un polynôme $-g^{\mathcal{O}}$ en le genre g.

Une stratégie possible est de chercher d'abord un q tel que le wronskien de $\mathcal{D}_1$ en q ne soit pas trop petit et de chercher ensuite des q_1,…, q_g dans un voisinage de ce q.

On utilise le classique

***Lemme 4* (wronskien et jacobien).** — *Soient $g \geq 2$ un entier naturel et $f_1(q)$, $f_2(q)$, …, $f_g(q)$ des séries de Laurent à coefficients complexes. On appelle wronskien associé à $\mathbf{f} = (f_1,\dots,f_g)$ le déterminant*

$$W_{\mathbf{f}}(q) = \begin{vmatrix} f_1(q) & \dots & f_g(q) \\ f_1'(q) & \dots & f_g'(q) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(g-1)}(q) & \dots & f_g^{(g-1)}(q) \end{vmatrix}.$$

On se donne g indéterminées q_1, q_2, …, q_g et on appelle jacobien associé à $\mathbf{f}$ le déterminant

$$\mathcal{J}_{\mathbf{f}} = \begin{vmatrix} f_1(q_1) & \dots & f_g(q_1) \\ f_1(q_2) & \dots & f_g(q_2) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1(q_g) & \dots & f_g(q_g) \end{vmatrix}.$$

On note $D = \prod_{k<l}(q_l - q_k)$ le discriminant réduit.

Si les f_k sont des séries entières alors le jacobien $\mathcal{J}_{\mathbf{f}}$ est dans l'anneau $\mathbb{C}[[q_1,\dots,q_g]]$ et il est divisible par le discriminant réduit D dans cet anneau. Le quotient $\mathcal{J}_{\mathbf{f}}/D$ est alors congru à $W_{\mathbf{f}}(0)$ modulo l'idéal maximal de $\mathbb{C}[[q_1,\dots,q_g]]$.

La démonstration peut se faire par récurrence sur g. □

***Lemme 5* (Majoration du wronskien).** — *Si pour $1 \leq l \leq g$ les $f_l(q)$ sont des séries entières d'ordre de grandeur (A,k) avec $A \geq 1$ et $k \geq 1$ alors le wronskien $W_{\mathbf{f}}(q)$ est une série entière d'ordre de grandeur*

$$(g!A^g 2^{\frac{g(g-1)(g+3k-2)}{6}}, gk - 1 + \frac{g(g+1)}{2}).$$

Cela résulte du lemme 15. □

***Lemme 6* (Majoration du jacobien).** — *Si pour $1 \leq l \leq g$ les $f_l(q)$ sont des séries entières d'ordre de grandeur (A,k) avec $A \geq 1$ et $k \geq 1$ alors le jacobien $\mathcal{J}_{\mathbf{f}}(q_1,\dots,q_g)$ est une série entière des g variables q_1, …, q_g d'ordre de grandeur*

$$(g!A^g, (k,k,\dots,k)).$$

Selon le lemme 4, le wronskien nous renseigne sur le terme dominant du jacobien au voisinage de $q_1 = q_2 = \dots = q_g = 0$.

[5] La définition de l'ordre de grandeur d'une série est donnée au paragraphe A.1.

***Définition 1* (Wronskien et Jacobien des formes différentielles)**
Pour chaque forme différentielle primitive, propre et normalisée $\omega \in \mathcal{D}_1$ *on rappelle que* $\omega = \frac{f(q)}{q}dq$ *où* f *est une forme modulaire primitive, propre et normalisée de poids* 2*. On forme la famille* $\mathbf{f}$ *des* g *séries entières* $\frac{f(q)}{q}$ *ainsi obtenues. Pour tout* $q \in D(0,1)$*, le wronskien de* $\mathbf{f}$ *en* q *est noté* $W_\infty(q)$ *et le jacobien correspondant en* $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_g)$ *est noté* $\mathcal{J}_\infty(\mathbf{q})$*.*

Posons $m = \frac{g(g+1)}{2}$. Le produit $W_\infty(q)(dq)^m$ est une forme holomorphe de degré m sur $X(\mathbb{C})$. Donc elle a au plus $2(g-1)m$ zéros en comptant les multiplicités. En particulier, la pointe à l'infini $q_\infty = 0$ est un zéro de multiplicité $v \leq 2(g-1)m$ de $W_\infty(q)$.

La série entière $W_\infty(q)^2$ a des coefficients entiers rationnels et sa valuation $2v$ est au plus $4(g-1)m = 2g(g^2-1)$. On suppose $g \geq 2$. Le lemme 5 de majoration du wronskien montre que l'ordre de grandeur de $W_\infty(q)^2$ est $(\exp(g^{\mathcal{O}}), g^{\mathcal{O}})$. Le lemme 17 de majoration du reste permet d'écrire $W_\infty(q)^2 = wq^{2v} + R_{2v+1}(q)$ avec w entier naturel non nul et R_{2v+1} majoré en module par $|q|^{2v+1}(2v+2)^{g^{\mathcal{O}}}$ pour $q \in D(0, R_\infty)$. Donc $W_\infty(q)^2$ est minoré en module par $\frac{1}{2}q^{2g(g^2-1)}$ si $|q| \leq (2v+2)^{-g^{\mathcal{O}}}$.

***Lemme 7* (Minoration du wronskien).** — *Il existe une constante effective positive* c_6 *telle que pour tout premier* p *tel que le genre* g *de* $X_0(p)$ *est au moins* 2*, il existe un* $q \in D(0, 10^{-10})$ *tel que* $\log|W_\infty(q)| \geq -g^{c_6}$*. Un tel* q *se calcule en temps polynomial en* p *et la précision absolue requise.*

Soit $q \in D(0, R_\infty)$ tel que $W_\infty(q) \neq 0$ et posons $\mathbf{q} = (q, \ldots, q)$ et $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_g)$. Le jacobien $\mathcal{J}_\infty(\mathbf{q} + \mathbf{x} \star (\mathbf{1}_g - \|\mathbf{q}\|))$ est[6] une série entière en les g variables x_1, …, x_g. C'est en fait le jacobien des $(f_k(q + x(1-|q|))/(q + x(1-|q|)))_{1 \leq k \leq g}$ vues comme fonctions de x. Le lemme 4 appliqué à ces dernières donne le terme principal de cette série en $\mathbf{x} = \mathbf{0}_g$:

$$\mathcal{J}_\infty(\mathbf{q} + \mathbf{x} \star (\mathbf{1}_g - \|\mathbf{q}\|)) = W_\infty(\mathbf{q})(1-|q|)^{\frac{g(g-1)}{2}} \prod_{k<l}(x_l - x_k) + R_{\frac{g(g-1)}{2}+1}(\mathbf{x}).$$

Le jacobien $\mathcal{J}_\infty(\mathbf{q})$ est une série en $\mathbf{q}$ d'ordre de grandeur $(g!, (3, 3, \ldots, 3))$ d'après le lemme 6. Si $q \in D(0, R_\infty)$, la série recentrée $\mathcal{J}_\infty(\mathbf{q} + \mathbf{x} \star (\mathbf{1}_g - \|\mathbf{q}\|))$ est une série en $\mathbf{x}$ d'ordre de grandeur $(\exp(g^{\mathcal{O}}), (4, 4, \ldots, 4))$ d'après le lemme 16 de recentrage. Pour $\mathbf{x}$ dans $P(\mathbf{0}_g, R_\infty)$, le lemme 17 de majoration du reste donne alors pour $g \geq 2$

$$\left|R_{\frac{g(g-1)}{2}+1}(\mathbf{x})\right| \leq \exp(g^{\mathcal{O}})|\mathbf{x}|_\infty^{\frac{g(g-1)}{2}+1}.$$

On pose $s = |\mathbf{x}|_\infty$ et on suppose que $\mathbf{x} = (\frac{s}{g}, \frac{2s}{g}, \ldots, \frac{(g-1)s}{g}, s)$ et $s \leq R_\infty$. Alors

$$\begin{aligned}\left|W_\infty(\mathbf{q})(1-|q|)^{\frac{g(g-1)}{2}} \prod_{k<l}(x_l - x_k)\right| &\geq |W_\infty(\mathbf{q})| \left(\frac{s(1-|q|)}{g}\right)^{\frac{g(g-1)}{2}} \\ &\geq |W_\infty(\mathbf{q})| \left(\frac{0.995s}{g}\right)^{\frac{g(g-1)}{2}}.\end{aligned}$$

On choisissant un $\mathbf{q}$ donné par le lemme 7 et en prenant $s = \exp(-g^{\mathcal{O}})$ on prouve le

[6] La notation $\star$ est introduite au paragraphe A.1.

Lemme 8 **(Minoration du jacobien).** — *Il existe une constante effective c_7 telle que pour tout premier p tel que le genre g de $X_0(p)$ est au moins 2, il existe $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_g) \in D(0, R_\infty)^g$ tel que $\log|\mathcal{J}_\infty(\mathbf{r})| \geq -g^{c_7}$. Un tel $\mathbf{r}$ se calcule en temps polynomial en p et la précision absolue requise. Les cinq normes sur $\mathcal{H}^1$ définies pour $F = \sum_{\omega \in \mathcal{D}_1} f_\omega \omega$ par $|F| = \max_\omega |f_\omega|$, $\mathcal{S}_\infty(F) = \max_{q_\infty \in \bar{D}(0,R_\infty)} \left|\frac{F}{dq_\infty}\right|$, $\mathcal{S}_0(F) = \max_{q_0 \in \bar{D}(0,R_0)} \left|\frac{F}{dq_0}\right|$, $\hat{\mathcal{S}}_\infty(F) = \max_{q_\infty \in \bar{D}(0,\frac{1}{2})} \left|\frac{F}{dq_\infty}\right|$, et $\hat{\mathcal{S}}_0(F) = \max_{q_0 \in \bar{D}(0,\frac{1}{2})} \left|\frac{F}{dq_0}\right|$ sont dans des rapports $\exp(p^{\mathcal{O}})$, ou, si l'on préfère, il existe une constante positive c_3 telle que pour tout p et pour tout $F \neq 0$ les différences entre $\log|F|$, $\log \mathcal{S}_0(F)$, $\log \mathcal{S}_\infty(F)$, $\log \hat{\mathcal{S}}_0(F)$ et $\log \hat{\mathcal{S}}_\infty(F)$, sont bornées en valeur absolue par p^{c_3}.*

2.8. Jacobiens et wronskiens quadratiques. — Des résultats semblables sont vrais pour le jacobien et le wronskien associés à la base $\mathcal{D}_2$ de l'espace de formes différentielles quadratiques $\mathcal{H}^2(\Delta_2)$.

Définition 2 **(Jacobien et wronskien des formes quadratiques)**

Pour chaque forme différentielle quadratique primitive, propre et normalisée $\phi \in \mathcal{D}_2$ on rappelle que $\phi = \frac{h(q)}{q}\frac{(dq)^2}{q}$ où h est une forme modulaire primitive, propre et normalisée de poids 4. On forme la famille $\mathbf{h}$ des $g_2 = 3g - 1 + \nu_2 + \nu_3$ séries entières $\frac{h(q)}{q}$ ainsi obtenues. Pour tout $q \in D(0,1)$, le wronskien de $\mathbf{h}$ en q est noté $W_{2,\infty}(q)$ et le jacobien correspondant en $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_{g_2})$ est noté $\mathcal{J}_{2,\infty}(\mathbf{q})$.

Posons $m_2 = \frac{g_2(g_2+3)}{2}$. Le produit $W_{2,\infty}(q)q^{-g_2}(dq)^{m_2}$ est une forme de degré m_2 sur $X(\mathbb{C})$, holomorphe en dehors de Δ_2. Plus précisément elle appartient à $\mathcal{H}^{m_2}(g_2\Delta_2)$. Donc elle a au plus $2(g-1)m_2 + g_2(2 + \nu_2 + \nu_3)$ zéros en comptant les multiplicités. En particulier, la pointe à l'infini $q_\infty = 0$ est un zéro de multiplicité $v_2 \leq 2(g-1)m_2 + g_2(2 + \nu_2 + \nu_3)$ de $W_{2,\infty}(q)$. Donc $v_2 \leq 9g(g+1)^2$.

La série entière $W_{2,\infty}(q)^2$ a des coefficients entiers rationnels et sa valuation $2v_2$ est au plus $18g(g+1)^2$. On suppose $g \geq 2$. Commes les $\frac{h(q)}{q}$ sont d'ordre de grandeur $(1, 4)$, le lemme 5 de majoration du wronskien montre que l'ordre de grandeur de $W_{2,\infty}(q)^2$ est $(\exp(g^{\mathcal{O}}), g^{\mathcal{O}})$. Le lemme 17 de majoration du reste permet d'écrire $W_{2,\infty}(q)^2 = wq^{2v_2} + R_{2v_2+1}(q)$ avec w entier naturel non nul et R_{2v_2+1} majoré en module par $|q|^{2v_2+1}(2v_2+2)^{g^{\mathcal{O}}}$ pour $q \in D(0, R_\infty)$. Donc $W_{2,\infty}(q)^2$ est minoré en module par $\frac{1}{2}q^{18g(g+1)^2}$ si $-\log|q| \geq g^{\mathcal{O}}$ et $g \geq 2$.

Lemme 9 **(Minoration du wronskien quadratique).** — *Il existe une constante effective c_8 telle que pour tout premier p tel que le genre g de $X_0(p)$ est au moins 2, il existe un $q \in D(0, 10^{-10})$ tel que $\log|W_{2,\infty}(q)| \geq -g^{c_8}$. Un tel q se calcule en temps polynomial en p et la précision absolue requise.*

On obtient de même l'analogue du lemme 8 pour le jacobien des formes quadratiques.

Soit $q \in D(0, R_\infty)$ tel que $W_{2,\infty}(q) \neq 0$ et posons $\mathbf{q} = (q, \dots, q)$ et $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{g_2})$. Le jacobien $\mathcal{J}_{2,\infty}(\mathbf{q} + \mathbf{x} \star (\mathbf{1}_{g_2} - \|\mathbf{q}\|))$ est une série entière en les g_2 variables $x_1, \dots, x_{g_2}$. C'est en fait le jacobien des $(h_k(q + x(1-|q|))/(q + x(1-|q|)))_{1 \leq k \leq g_2}$ vues comme fonctions de x. Le lemme 4 appliqué à ces dernières donne le terme principal de cette série en $\mathbf{x} = \mathbf{0}_{g_2}$:

$$\mathcal{J}_{2,\infty}(\mathbf{q} + \mathbf{x}) = W_{2,\infty}(\mathbf{q})(1 - |q|)^{\frac{g_2(g_2-1)}{2}} \prod_{k<l}(x_l - x_k) + R_{\frac{g_2(g_2-1)}{2}+1}(\mathbf{x}).$$

Le jacobien $\mathcal{J}_{2,\infty}(\mathbf{q})$ est une série en $\mathbf{q}$ d'ordre de grandeur $(g_2!,(4,4,\ldots,4))$ d'après le lemme 6. Si $q\in D(0,R_\infty)$, la série recentrée $\mathcal{J}_{2,\infty}(\mathbf{q}+\mathbf{x}\star(\mathbf{1}_{g_2}-\|\mathbf{q}\|))$ est une série en $\mathbf{x}$ d'ordre de grandeur $(\exp(g^{\mathcal{O}}),(5,5,\ldots,5))$ d'après le lemme 16 de recentrage. Pour $\mathbf{x}$ dans $P(\mathbf{0}_g,R_\infty)$, le lemme 17 de majoration du reste donne alors pour $g\geq 2$

$$\left|R_{\frac{g_2(g_2-1)}{2}+1}(\mathbf{x})\right|\leq \exp(g^{\mathcal{O}})|\mathbf{x}|_\infty^{\frac{g_2(g_2-1)}{2}+1}.$$

On pose $s=|\mathbf{x}|_\infty$ et on suppose que $\mathbf{x}=(\frac{s}{g_2},\frac{2s}{g_2},\ldots,\frac{(g_2-1)s}{g_2},s)$ et $s\leq R_\infty$. Alors

$$\begin{aligned}\left|W_{2,\infty}(\mathbf{q})(1-|q|)^{\frac{g_2(g_2-1)}{2}}\prod_{k<l}(x_l-x_k)\right| &\geq |W_{2,\infty}(\mathbf{q})|\left(\frac{s(1-|q|)}{g_2}\right)^{\frac{g_2(g_2-1)}{2}}\\ &\geq |W_{2,\infty}(\mathbf{q})|\left(\frac{0.995s}{g_2}\right)^{\frac{g_2(g_2-1)}{2}}.\end{aligned}$$

On choisissant un $\mathbf{q}$ donné par le lemme 9 et en prenant $s=\exp(-g^{\mathcal{O}})$ on prouve le

***Lemme 10* (Minoration du jacobien quadratique).** — *Il existe une constante effective c_9 telle que pour tout premier p tel que le genre g de $X_0(p)$ est au moins 2, il existe $\mathbf{r}=(r_1,\ldots,r_{g_2})\in D(0,R_\infty)^{g_2}$ tel que $\log|\mathcal{J}_{2,\infty}(\mathbf{r})|\geq -g^{c_9}$. Un tel $\mathbf{r}$ se calcule en temps polynomial en p et la précision absolue requise. Les cinq normes sur $\mathcal{H}^2(\Delta_2)$ définies pour $H=\sum_{\phi\in\mathcal{D}_2}h_\phi\phi$ par $|H|=\max_\phi|h_\phi|$, $\mathcal{S}_\infty(H)=\max_{q_\infty\in\bar{D}(0,R_\infty)}\left|\frac{q_\infty H}{(dq_\infty)^2}\right|$, $\mathcal{S}_0(H)=\max_{q_0\in\bar{D}(0,R_0)}\left|\frac{q_0 H}{(dq_0)^2}\right|$, $\hat{\mathcal{S}}_\infty(H)=\max_{q_\infty\in\bar{D}(0,\frac{1}{2})}\left|\frac{q_\infty H}{(dq_\infty)^2}\right|$, et $\hat{\mathcal{S}}_0(H)=\max_{q_0\in\bar{D}(0,\frac{1}{2})}\left|\frac{q_0 H}{(dq_0)^2}\right|$, sont dans des rapports $\exp(p^{\mathcal{O}})$ ou, si l'on préfère, il existe une constante positive c_4 telle que pour tout p et pour tout $H\neq 0$ les différences entre $\log|H|$, $\log\mathcal{S}_0(H)$, $\log\mathcal{S}_\infty(H)$, $\log\hat{\mathcal{S}}_\infty(H)$, et $\log\hat{\mathcal{S}}_0(H)$ sont bornées en valeur absolue par p^{c_4}.*

2.9. Stabilité. — On suppose que $g\geq 2$. On suppose choisie une origine o et on note S^gX la g-ième puissance symétrique de X et $\mu^g: S^gX\to\mathbb{C}^{\mathcal{D}_1}/\mathcal{L}$ l'application d'intégration de Jacobi. Soit $\epsilon=(\epsilon_k)_{1\leq k\leq g}\in\{0,\infty\}^g$ et $\mathbf{r}=(r_1,\ldots,r_g)\in D_\epsilon=D(0,R_{\epsilon_1})\times\cdots\times D(0,R_{\epsilon_g})$ et notons $\rho\in\mathbb{C}^g$ l'image de $\mathbf{r}$ par μ_ϵ. On rappelle que l'instabilité de $\mathbf{r}$ est l'opposé du logarithme du module du déterminant jacobien $\mathcal{J}_{\mathcal{D}_1,\epsilon}=\left|\frac{\omega}{dq_{\epsilon_k}}(r_k)\right|_{\omega,k}$. On suppose cette instabilité finie et on la note λ. Donc la restriction de μ^g à un voisinage de $\mathbf{r}$ est injective. L'image d'un tel voisinage est un voisinage de ρ et la corestriction de μ^g à un voisinage assez petit de ρ est injective. On veut étudier quantitativement cette situation. On montre d'abord que les points voisins d'un point stable sont assez stables. Ensuite on montre que l'image par l'application de Jacobi d'une boule centrée en un point stable, contient une boule pas trop petite.

D'après le lemme 6, le jacobien $\mathcal{J}_{\mathcal{D}_1,\epsilon}$ est une série en les $q_{\epsilon_k,k}$ d'ordre de grandeur $(g!,(3,\ldots,3))$. Posons $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_g)$. La série recentrée $\mathcal{J}_{\mathcal{D}_1,\epsilon}(\mathbf{r}+\mathbf{x}\star(\mathbf{1}_g-\|\mathbf{r}\|))$ est d'ordre de grandeur $(\exp(g^{\mathcal{O}}),(4,\ldots,4))$. Pour $|\mathbf{x}|_\infty\leq\frac{1}{2}$, le reste d'ordre 1 de cette série est majoré par $\exp(g^{\mathcal{O}})|\mathbf{x}|_\infty$. Donc si $|\mathbf{x}|_\infty\leq\exp(-g^{\mathcal{O}}-\lambda)$ le point $\mathbf{r}+(\mathbf{1}_g-\|\mathbf{r}\|)\star\mathbf{x}$ est stable d'instabilité majorée par $1+\lambda$. Si $\mathbf{y}=(\mathbf{1}_g-\|\mathbf{r}\|)\star\mathbf{x}$ alors $|\mathbf{x}|_\infty\leq p|\mathbf{y}|_\infty$ et $|\mathbf{y}|_\infty\leq|\mathbf{y}|_2$ donc si $|\mathbf{y}|_2\leq\exp(-g^{\mathcal{O}}-\lambda)$ le point $\mathbf{r}+\mathbf{y}$ est stable d'instabilité majorée par $1+\lambda$.

On compare maintenant l'application de Jacobi μ_ϵ et sa différentielle $D\mu_\epsilon$ en $\mathbf{r}$. La matrice de $D\mu_\epsilon$ dans les bases $(dq_{\epsilon_k})_k$ et $(z_\omega)_\omega$, la base duale de la base canonique de $\mathbb{C}^{\mathcal{D}_1}$, n'est autre que $\left(\frac{\omega}{dq_{\epsilon_k}}(r_k)\right)_{\omega,k}$. Elle a des coefficients majorés par $3!2p^4$. Donc pour $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}_g$ le quotient des normes L^∞ associées aux deux bases susmentionnées $\frac{|D\mu_\epsilon \mathbf{y}|_\infty}{|\mathbf{y}|_\infty}$ est majoré par $g^{\mathcal{O}}$. Puisque le déterminant de $D\mu_\epsilon$ est minoré en module par $\exp(-\lambda)$ on montre de même que le quotient $\frac{|D\mu_\epsilon \mathbf{y}|_\infty}{|\mathbf{y}|_\infty}$ est minoré par $\exp(-\lambda)g^{-\mathcal{O}g} \geq \exp(-\lambda - \mathcal{O}g^2)$ donc

$$\exp(-\lambda - \mathcal{O}g^2)|\mathbf{y}|_2 \leq |D\mu_\epsilon \mathbf{y}|_2 \leq g^{\mathcal{O}}|\mathbf{y}|_2. \tag{2}$$

Soient ω une forme dans $\mathcal{D}_1$ et k un entier entre 1 et g. Le développement de ω sur $D_{\epsilon_k} = D(0, R_{\epsilon_k})$ s'écrit $\omega = \pm\frac{f(q_{\epsilon_k})}{q_{\epsilon_k}}dq_{\epsilon_k}$ pour une forme primitive, propre et normalisée f de poids 2. La série $f(q_{\epsilon_k})/q_{\epsilon_k}$ a pour ordre de grandeur $(1, 3)$. Sa recentrée en r_k a pour ordre de grandeur $(g^{\mathcal{O}}, 4)$. Si $q_{\epsilon_k} = r_k + x_k(1 - |r_k|)$, avec $|x_k| \leq \frac{1}{2}$, le reste d'ordre 1 de la série recentrée est majoré par $g^{\mathcal{O}}|x_k|$. Donc $\left|\int_{r_k}^{r_k+x_k(1-r_k)} \omega - x_k(1 - r_k)\frac{f(r_k)}{r_k}\right| \leq g^{\mathcal{O}}(1 - r_k)|x_k|^2$. Ainsi le reste d'ordre 2

$$R_2\mu_\epsilon((\mathbf{1}_g - \mathbf{r}) \star \mathbf{x}) = \mu_\epsilon(\mathbf{r} + (\mathbf{1}_g - \|\mathbf{r}\|) \star \mathbf{x}) - \mu_\epsilon(\mathbf{r}) - D\mu_\epsilon((\mathbf{1}_g - \|\mathbf{r}\|) \star \mathbf{x})$$

est majoré en norme L^∞ par $g^{\mathcal{O}}|\mathbf{x}|_\infty^2$ et en norme L^2 par $g^{\mathcal{O}}|\mathbf{x}|_2^2 \leq g^{\mathcal{O}}|\mathbf{y}|_2^2$ avec $\mathbf{y} = (\mathbf{1}_g - \|\mathbf{r}\|) \star \mathbf{x}$. Ainsi

$$|R_2\mu_\epsilon(\mathbf{y})|_2 = |\mu_\epsilon(\mathbf{r} + \mathbf{y}) - \mu_\epsilon(\mathbf{r}) - D\mu_\epsilon(\mathbf{y})|_2 \leq g^{\mathcal{O}}|\mathbf{y}|_2^2. \tag{3}$$

Les équations (2) et (3) permettent de s'assurer que la partie principale $D\mu_\epsilon \mathbf{y}$ est deux fois plus grande que le reste $R_2\mu(\mathbf{y})$: si $-\log|\mathbf{y}|_2 \geq \mathcal{O}g^2 + \lambda$ alors $|D\mu_\epsilon \mathbf{y}|_2 \geq 2|R_2\mu(\mathbf{y})|_2$ donc $\mu_\epsilon(\mathbf{r} + \mathbf{y}) - \mu_\epsilon(\mathbf{r}) \geq \frac{1}{2}|D\mu_\epsilon \mathbf{y}|_2 \geq \exp(-\lambda - \mathcal{O}g^2)|\mathbf{y}|_2$.

Ainsi pour tout $\theta > g^{\mathcal{O}}$, la boule centrée en ρ et de rayon $\exp(-\mathcal{O}g^2 - 2\lambda - \theta)$ pour la norme L^2 est formée de points stables (ayant un antécédent unique par l'application de Jacobi) et elle est contenue dans l'image de la boule L^2 centrée en $\mathbf{r}$ et de rayon $\exp(-\lambda - \theta)$.

Lemme 11 **(Stabilité du problème inverse de Jacobi)**
Il existe une constante effective positive c_{10} telle que l'énoncé suivant soit vrai :
Soit $\epsilon = (\epsilon_k)_{1\leq k\leq g}$ dans $\{0, \infty\}^g$ et $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_g) \in D_\epsilon = D(0, R_{\epsilon_1}) \times \cdots \times D(0, R_{\epsilon_g})$ et notons ρ l'image de $\mathbf{r}$ par l'application d'intégration de Jacobi μ_ϵ. On suppose que l'instabilité λ de $\mathbf{r}$ est finie. Alors pour tout $\theta \geq g^{c_{10}}$ la boule L^2 centrée en $\mathbf{r}$ et de rayon $\exp(-\lambda - \theta)$ est formée de points stables et son image par l'application de Jacobi contient la boule centrée en ρ et de rayon $\exp(-g^{c_{10}} - 2\lambda - \theta)$. Donc si $\mathbf{r}' \in S^gX$ s'envoie sur ρ' par l'application de Jacobi et si $|\rho - \rho'|_2 \leq \exp(-2g^{c_{10}} - 2\lambda)$ alors $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|_2 \leq \exp(g^{c_{10}} + \lambda)|\rho - \rho'|_2$.

2.10. Quelques sous ensembles discrets de la jacobienne. — On se place à nouveau dans la situation du paragraphe précédent. On suppose que $g \geq 2$. On suppose choisie une origine o et on note S^gX la g-ième puissance symétrique de X et $\mu^g : S^gX \to \mathbb{C}^{\mathcal{D}_1}/\mathcal{L}$ l'application d'intégration de Jacobi. Soit $\epsilon = (\epsilon_k)_{1\leq k\leq g} \in \{0, \infty\}^g$ et $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_g) \in D_\epsilon = D(0, R_{\epsilon_1}) \times \cdots \times D(0, R_{\epsilon_g})$ et notons ρ l'image de $\mathbf{r}$ par μ_ϵ. On note λ l'instabilité de $\mathbf{r}$.

On identifie $\mathbb{C}^g \supset D_\epsilon$ à l'espace tangent en $\mathbf{r}$ et on note $(\delta_k)_{1\le k\le g}$ la base duale de $(dq_{\epsilon_k})_{1\le k\le g}$.

L'espace vectoriel réel sous-jacent a pour base $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_g, i\delta_1, i\delta_2, \ldots, i\delta_g)$. Pour k entre 1 et g on pose $i\delta_k = \delta_{k+g}$.

On choisit un réel $\chi > \log p$, on pose $\Upsilon = \exp(-\chi)$ et on considère les $2g$ petits accroissements $\beta_1, \ldots, \beta_{2g}$ de $\mathbb{C}^g/\mathcal{L}$ définis par $\beta_k = \mu(r_k + \Upsilon) - \mu(r_k) = (\int_{r_k}^{r_k+\Upsilon} \omega)_{\omega\in\mathcal{D}_1} = \mu_\epsilon(\mathbf{r}+\Upsilon\delta_k) - \mu_\epsilon(\mathbf{r})$ pour $1 \le k \le g$ et $\beta_{g+k} = \mu(r_k + i\Upsilon) - \mu(r_k) = (\int_{r_k}^{r_k+i\Upsilon} \omega)_{\omega\in\mathcal{D}_1} = \mu_\epsilon(\mathbf{r} + \Upsilon i\delta_k) - \mu_\epsilon(\mathbf{r})$ pour $1 \le k \le g$.

Si M est un entier positif, on note $\mathcal{A}(\mathbf{r}, \chi, M)$ le sous ensemble de $\mathbb{C}^g/\mathcal{L}$ formé des combinaisons des β_k à coefficients entiers dans $[-M, M]$. On se demande dans quelle mesure les éléments du tore $\mathbb{C}^g/\mathcal{L}$ peuvent être approchés par l'ensemble $\mathcal{A}(\mathbf{r}, \chi, M)$.

On doit premièrement minorer le déterminant $\frac{\beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_{2g}}{e_1\wedge\cdots\wedge e_{2g}}$ où $(e_k)_k$ est la base canonique de l'espace réel $\mathbb{R}^{2g}$ sous-jacent à $\mathbb{C}^g = \mathbb{C}^{\mathcal{D}_1}$. En particulier $(e_k)_{1\le k\le g}$ est la base canonique de $\mathbb{C}^g$ et $e_{k+g} = ie_k$. On note $D\mu_\epsilon$ la différentielle de μ_ϵ en $\mathbf{r}$. Pour $1 \le k \le 2g$ on note $\gamma_k = D\mu_\epsilon(\delta_k)$. Le déterminant $\frac{\gamma_1\wedge\cdots\wedge\gamma_{2g}}{e_1\wedge\cdots\wedge e_{2g}}$ est le carré du module du déterminant jacobien.

Or $\Upsilon\gamma_k$ est une bonne approximation de β_k. Plus précisément, on a vu au paragraphe précédent que si $-\log\Upsilon = \chi \ge \mathcal{O}g^2 + \lambda$ alors $\Upsilon|\gamma_k|_2 \ge 2|\beta_k - \Upsilon\gamma_k|_2$ donc $\frac{\Upsilon}{2}|\gamma_k|_2 \le |\beta_k|_2 \le \frac{3\Upsilon}{2}|\gamma_k|_2 \le g^{\mathcal{O}}\Upsilon$ d'après l'inégalité (2).

L'inégalité (3) implique quant à elle que $|\beta_k - \Upsilon\gamma_k|_2 \le g^{\mathcal{O}}\Upsilon^2$.

Comme le déterminant est multilinéaire, on majore le module de la différence $\frac{\beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_{2g}}{e_1\wedge\cdots\wedge e_{2g}} - \Upsilon^{2g}\frac{\gamma_1\wedge\cdots\wedge\gamma_{2g}}{e_1\wedge\cdots\wedge e_{2g}}$ par $2^{2g}\left(\max_{1\le k\le 2g}|\beta_k|_2\right)^{2g-1}\max_{1\le k\le 2g}|\beta_k - \Upsilon\gamma_k|_2$.

Ainsi la différence $\frac{\beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_{2g}}{e_1\wedge\cdots\wedge e_{2g}} - \Upsilon^{2g}\frac{\gamma_1\wedge\cdots\wedge\gamma_{2g}}{e_1\wedge\cdots\wedge e_{2g}}$ est majorée par $2^{2g}g^{\mathcal{O}(2g-1)}g^{\mathcal{O}}\Upsilon^{2g+1}$. Cette différence est plus petite que la moitié de $\Upsilon^{2g}|\frac{\gamma_1\wedge\cdots\wedge\gamma_{2g}}{e_1\wedge\cdots\wedge e_{2g}}| = \exp(-2\lambda)\Upsilon^{2g}$ pourvu que $\chi \ge \mathcal{O}g^2 + 2\lambda$. Alors

$$\frac{\beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_{2g}}{e_1\wedge\cdots\wedge e_{2g}} \ge \frac{1}{2}\exp(-2\lambda - 2g\chi).$$

On a donc une minoration du déterminant de la matrice de passage de la base $(e_k)_{1\le k\le 2g}$ à la base $(\beta_k)_{1\le k\le 2g}$. Les colonnes de cette matrice sont les β_k et elles sont majorés en norme L^∞ par $g^{\mathcal{O}}\Upsilon$. Donc les colonnes de la matrice inverse sont majorées en norme L^∞ par $2(2g-1)!\exp(2\lambda + 2g\chi)g^{\mathcal{O}(2g-1)}\Upsilon^{2g-1}$.

D'après le lemme 2 il existe une constante positive c_2 et une base du réseau $\mathcal{L}$ des périodes de coordonnées majorées en valeur absolue par $\exp(p^{c_2})$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^{2g}$. Donc les coordonnées de ces périodes dans la base $(\beta_k)_{1\le k\le 2g}$ sont bornées par $2(2g-1)!\exp(p^{c_2} + 2\lambda + 2g\chi)g^{\mathcal{O}(2g-1)}\Upsilon^{2g-1} \le \exp(2\lambda + \chi + g^{\mathcal{O}})$.

Les coordonnées de tous les points du parallélogramme fondamental associé à cette base sont également bornés de la sorte. Enfin, en remplaçant de telles coordonnées par leurs valeurs entières on commet une erreur bornée en norme L^2 dans la base canonique par $g^{\mathcal{O}}\Upsilon$.

***Lemme 12* (Bonne répartition).** — *Il existe une constante c_5 effective positive telle que : si $\epsilon \in \{0, \infty\}^g$ et $\mathbf{r} \in D_\epsilon$ a une instabilité finie λ et si χ est un réel plus grand que $g^{c_5} + 2\lambda$ et si M est le plus petit entier plus grand que $\exp(g^{c_5} + 2\lambda + \chi)$, alors tout point ρ de $\mathbb{C}^g = \mathbb{R}^{2g}$ est à distance $\le \exp(-\chi + g^{c_5})$ d'un point de $\mathcal{A}(\mathbf{r}, \chi, M)$ et les coefficients entiers dans $[-M, M]$ de ce point peuvent être calculés en temps polynomial en g, $\log(\max(1, |\rho|_\infty))$ et χ.*

3. Complexité des opérations dans la jacobienne

Dans le paragraphe 3.1 on étudie la complexité de l'algorithme qui, étant donné une famille de points, trouve une forme s'annulant en ces points, puis recherche les autres zéros de cette forme. On en déduit dans le paragraphe 3.2 que les opérations élémentaires dans $J_0(p)$ sont stables et se font en temps déterministe polynomial en p et la précision requise.

Au paragraphe 3.3, un semblable résultat est établi pour le problème inverse de Jacobi.

3.1. Une opération élémentaire dans la jacobienne : la dualisation. — Un point P de X est spécifié par une valeur de $\tau \in \mathcal{H}^*$ ou de $q_0 \in D(0, R_0)$ ou de $q_\infty \in D(0, R_\infty)$. Connaître un tel point, c'est disposer d'un algorithme qui calcule par exemple le q_∞ correspondant, en temps polynomial en g et la précision absolue requise.

On suppose $g \geq 2$ et on se donne $3g-4$ points distincts $R_1, R_2, \ldots, R_{3g-4}$ sur X. On suppose que ces points ne sont ni des pointes, ni des points elliptiques. On pose $e = 3g-2+\nu_2+\nu_3 = g_2 - 1$ et on note $P_1, \ldots, P_e$ la famille de points formée des $3g-4$ points que l'on vient de se donner et des $2+\nu_2+\nu_3$ points elliptiques ou paraboliques.

On suppose que les r premiers points $P_1, \ldots, P_r$ sont dans D_∞ et sont donc donnés par des $q_{\infty,k} \in D(0, R_\infty)$ pour $1 \leq k \leq r$. Les autres points sont supposés appartenir à D_0 et sont donc donnés par des $q_{0,k} \in D(0, R_0)$ pour $r+1 \leq k \leq e$. On suppose que P_1 est la pointe ∞ et P_e la pointe 0.

On se donne un $\eta > 0$ et pour tout k entre 1 et r on considère le disque $D_{\infty,k} = \{q_\infty, |q_\infty - q_{\infty,k}| \leq \eta\}$ de rayon η centré en $q_{\infty,k}$. De même, pour tout k entre $r+1$ et e on note $D_{0,k} = \{q_0, |q_0 - q_{0,k}| \leq \eta\}$ le disque de rayon η centré en $q_{0,k}$. On suppose que les images de tous ces disques dans $X(\mathbb{C})$ sont deux à deux disjointes.

Définition 3 **(Résolution d'une famille de points).** — *Dans cette situation, on dit que $((P_k)_{1\leq k\leq 3g-2+\nu_2+\nu_3}, r, \eta)$ est une résolution pour la famille de points $(R_k)_{1\leq k\leq 3g-4}$.*

On note $P = P_1 + \cdots + P_e$ le diviseur somme des P_k et on observe que $\mathcal{H}^2(-P + \Delta_2) \subset \mathcal{H}^2(\Delta_2)$ est un sous-espace vectoriel non nul de $\mathcal{H}^2$.

On représente une forme F dans $\mathcal{H}^2(\Delta_2)$ par ses coordonnées dans la base $\mathcal{D}_2$ soit $F = \sum_{\phi\in\mathcal{D}_2} f_\phi \phi$. On cherche les équations linéaires qui définissent le sous espace $\mathcal{H}^2(-P + \Delta_2)$ dans cette base. Il y a une équation pour chaque P_k.

L'équation correspondant à la pointe à l'infini P_1, est

$$\sum_{\phi\in\mathcal{D}_2} \frac{q_\infty \phi}{(dq_\infty)^2}(P_1) f_\phi = \sum_\phi a_{\phi,1} f_\phi = 0$$

où $\frac{q_\infty^2 \phi}{(dq_\infty)^2} = \sum_{k\geq 1} a_{\phi,k} q_\infty^k$ est le développement en l'infini de la forme primitive, propre et normalisée de poids 4 associée à ϕ.

L'équation correspondant à la pointe en zéro P_e, est

$$\sum_{\phi\in\mathcal{D}_2} \frac{q_0 \phi}{(dq_0)^2}(P_e) f_\phi = \sum_\phi b_{\phi,1} f_\phi = 0$$

où $\frac{q_0^2\phi}{(dq_0)^2} = \sum_{k\geq 1} b_{\phi,k} q_0^k$ est le développement en zéro de la forme primitive, propre et normalisée de poids 4 associée à ϕ. Noter que $b_{\phi,1} = \pm a_{\phi,1}$ car les formes primitives, propres et normalisées sont en particulier valeurs propres de l'involution d'Atkin-Lehner.

L'équation correpondant à P_k pour $2 \leq k \leq r$ est

$$\sum_{\phi\in\mathcal{D}_2} \frac{q_\infty \phi}{(dq_\infty)^2}(P_k) f_\phi = 0$$

où $\frac{q_\infty\phi}{(dq_\infty)^2}(P_k) = \sum_{l\geq 1} a_{\phi,l} q_{\infty,k}^{l-1}$ se calcule en temps polynomial en p et la précision requise.

L'équation correpondant à P_k pour $r+1 \leq k \leq e-1$ est

$$\sum_{\phi\in\mathcal{D}_2} \frac{q_0 \phi}{(dq_0)^2}(P_k) f_\phi = 0$$

où $\frac{q_0\phi}{(dq_0)^2}(P_k) = \sum_{l\geq 1} b_{\phi,l} q_{0,k}^{l-1}$ se calcule en temps polynomial en p et la précision requise.

On rassemble toutes ces équation dans une matrice $\mathcal{M}_P$ dont le noyau décrit $\mathcal{H}^2(-P+\Delta_2)$ dans la base $\mathcal{D}_2$. Les coefficients de cette matrice sont $\leq p^{\mathcal{O}}$. On calcule une valeur approchée $\mathcal{M}'_P$ de $\mathcal{M}_P$ à coefficients dans $\mathbb{Q}(i)$. On note $m \geq 2$ la précision de cette approximation. Donc $\mathcal{M}'_P - \mathcal{M}_P$ a des coefficients inférieurs à $\exp(-m)$ en module. Il existe une telle $\mathcal{M}'_P$ de taille polynomiale en $\log p$ et m et on la calcule en temps polynomial en p et m. L'algorithme d'Hermite [**11**], ou mieux l'algorithme LLL [**2**, Theorem 2.6.2], produisent une base à coefficients entiers du noyau de $\mathcal{M}'_P$ de taille polynomiale en p et m en temps polynomial en p et m. On choisit un vecteur de cette base. Si $M = a+ib$ est le plus grand des coefficients de ce vecteur, on normalise en divisant le vecteur par le maximum de $|a|$ et $|b|$. On obtient ainsi un $f' = (f'_\phi)_{\phi\in\mathcal{D}_2}$ dans le noyau de $\mathcal{M}'_P$ à coefficients dans $\mathbb{Q}(i)$ et $F' = \sum_\phi f'_\phi \phi$ la forme associée telle que $|F| = \max_\phi |f'_\phi|$ soit compris entre 1 et $\sqrt{2}$. D'après le lemme 10, les normes $\hat{\mathcal{S}}_0(F')$ et $\hat{\mathcal{S}}_\infty(F')$ sont majorées par $\sqrt{2}\exp(p^{c_4})$ et minorées par $\exp(-p^{c_4})$ pour une certaine constante positive c_4.

Le produit $\mathcal{M}_P f' = (\mathcal{M}_P - \mathcal{M}'_P) f'$ est un vecteur de coefficients majorés en module par $g_2\exp(-m)\sqrt{2}$. Ces coefficients sont, dans l'ordre, la valeur de $\frac{q_\infty F'}{(dq_\infty)^2}$ en la pointe infini, les valeurs de $\frac{q_\infty F'}{(dq_\infty)^2}$ en les P_k pour $2 \leq k \leq r$, les valeurs de $\frac{q_0 F'}{(dq_0)^2}$ en les P_k pour $r+1 \leq k \leq e-1$, la valeur de $\frac{q_0 F'}{(dq_0)^2}$ en la pointe nulle P_e.

On peut maintenant appliquer le lemme 21 de stabilité des zéros.

On s'intéresse d'abord aux P_k pour $k \leq r$. Ils sont contenus dans $D(0, R_\infty)$. Puisque $|F'| \leq \sqrt{2}$, la série entière $\frac{q_\infty F'}{(dq_\infty)^2}$ est d'ordre de grandeur $(g_2\sqrt{2}, 4)$. Avec les notations du lemme 21 on a donc $A = g_2\sqrt{2}$, $n = 4$, $1 - |c| \geq 0.995$ et $-\log\epsilon = m/2$ pourvu que $m \geq \mathcal{O}\log(g)$. On demande que $\frac{(0.995)^{14}\sqrt{\frac{m}{2}}}{c_{14}}$ soit plus grand que $c_{14}(4^2(1-\log 0.995)+\log g_2\sqrt{2})$ et que p^{c_4} ce qui est assuré si $m \geq p^{\mathcal{O}}$. Alors chaque P_k pour $k \leq r$ est à distance $\leq \exp(-\sqrt{m/2})$ d'un zéro de F'.

On s'intéresse maintenant aux P_k pour $k > r$. Ils sont contenus dans $D(0, R_0)$ avec $R_0 = 1 - \frac{1}{p}$. Puisque $|F'| \leq \sqrt{2}$, la série entière $\frac{q_0 F'}{(dq_0)^2}$ est d'ordre de grandeur $(g_2\sqrt{2}, 4)$. Avec les notations du lemme 21 on a donc $A = g_2\sqrt{2}$, $n = 4$, $1 - |c| \geq \frac{1}{p}$ et $-\log\epsilon = m/2$ pourvu que $m \geq \mathcal{O}\log(g)$. On demande que $\frac{\sqrt{\frac{m}{2}}}{p^{14}c_{14}}$ soit plus grand que $c_{14}(4^2(1+\log p)+\log g_2\sqrt{2})$ et que p^{c_4} ce qui est assuré si $m \geq p^{\mathcal{O}}$. Alors chaque P_k pour $k > r$ est à distance $\leq \exp(-\sqrt{m/2})$ d'un zéro de F'.

On s'assure enfin que $\exp(-\sqrt{m/2})$ est plus petit que la résolution η de sorte que les e zéros ainsi trouvés sont distincts. On cherche alors les g autres zéros de F' avec l'algorithme de quadrichotomie de Weyl (voir le lemme 22). Puisque l'application d'intégration de Jacobi est Lipschitzienne avec coefficients de dilatation polynomiaux en p on obtient le

***Lemme 13* (Dualisation).** — *Il existe un algorithme déterministe qui, étant donnés un nombre premier p et $3g-4$ points distincts $R_1, \ldots, R_{3g-4}$ sur $X_0(p)$ et une résolution $((P_m)_{1\leq m<g_2}, r, \eta)$, calcule g points $Q_1, \ldots, Q_g$ dont la somme est linéairement équivalente à deux fois le diviseur canonique moins la somme des points initiaux :*

$$Q_1 + \cdots + Q_g \sim 2\mathcal{K} - (R_1 + \cdots + R_{3g-4}).$$

Cet algorithme est polynomial en p, le logarithme $-\log \eta$ de la résolution et la précision requise.

Remarque importante : Notons que dans cet énoncé, l'erreur qui est majorée se mesure dans l'image $\mathbb{C}^{\mathcal{D}_1}$ de l'application de Jacobi.

On peut s'affranchir de la condition sur la résolution η. En effet, si les points R_k ne sont pas tous disctincts, ou plus généralement si leur résolution est jugée trop faible, c'est à dire si η est trop petit, on peut perturber légèrement ces points pour obtenir la résoluton souhaitée. Comme l'application d'intégration de Jacobi est Lipschitzienne de dilatation polynomiale en p, on peut adapter la perturbation à la précision finale souhaitée. On obtient ainsi le

***Lemme 14* (Dualisation).** — *Il existe un algorithme déterministe qui, étant donnés un nombre premier p et $3g-4$ points $R_1, \ldots, R_{3g-4}$ sur $X_0(p)$, calcule g points $Q_1, \ldots, Q_g$ dont la somme est linéairement équivalente à deux fois le diviseur canonique moins la somme des points initiaux :*

$$Q_1 + \cdots + Q_g \sim 2\mathcal{K} - (R_1 + \cdots + R_{3g-4}).$$

Cet algorithme est polynomial en p et la précision requise.

3.2. Addition et soustraction dans la jacobienne. — On suppose que le genre de $X_0(p)$ est au moins 4. On choisit un diviseur effectif origine de degré g noté $O = o_1 + \cdots + o_g$. On choisit aussi un diviseur effectif auxiliaire de degré $g-4$ noté N. La dimension de $\mathcal{H}^2(\Delta_2)$ est $g_2 = 3g - 1 + \nu_2 + \nu_3$. Le plus naturel est de choisir un point o origine de l'application d'intégration de Jacobi et de poser $O = go$ et $N = (g-4)o$. Un élément de $\mathrm{Pic}^0(X)$ est donné comme classe d'un diviseur $Q - O$ où Q est effectif de degré g. Soit R un autre diviseur effectif de degré g. Pour ajouter la classe de $Q - O$ et celle de $R - O$ on applique le lemme 14 au diviseur $Q + R + N$ qui est effectif de degré $3g - 4$. On obtient un diviseur T effectif de degré g tel que $T \sim 2\mathcal{K} - Q - R - N$. On applique à nouveau le lemme 14 au diviseur $T + O + N$ et on obtient un diviseur U effectif de degré g tel que $U + O \sim Q + R$. Donc $U - O$ est bien la somme de $Q - O$ et $R - O$.

Pour calculer l'opposé de $Q - O$ on applique le lemme 14 au diviseur $2O + N$ ce qui produit un diviseur Ξ effectif de degré g équivalent à $2\mathcal{K} - N - 2O$. On applique à nouveau le lemme 14 au diviseur $\Xi + Q + N$ et on trouve un diviseur V effectif de degré g tel que $V - O \sim -(Q - O)$.

Théorème 1 **(Arithmétique dans la jacobienne).** — *Les opération d'addition et de soustraction dans la jacobienne de $X_0(p)$ se font en temps déterministe polynomial en p et la précision requise.*

3.3. Le problème inverse de Jacobi. — Étant donné $\rho = (\rho_\omega)_\omega \in \mathbb{C}^{\mathcal{D}_1}$ on cherche un diviseur effectif de degré g sur X qui s'envoie sur ρ modulo le réseau $\mathcal{L}$ des périodes par l'application de Jacobi.

Le lemme 12 de bonne répartition, que l'on applique au $\mathbf{r}$ fourni par le lemme 8 de minoration du jacobien, et à un réel χ assez grand, fournit un ensemble $\mathcal{A}(\mathbf{r}, \chi, M) = \{t_1\beta_1 + \cdots + t_{2g}\beta_{2g}$ avec $-M \leq t_k \leq M\}$ où les β_k sont les images par l'application de Jacobi de diviseurs Ω_k connus, différences de deux points proches. Les coordonnées réelles de ρ dans la base formée des β_k sont calculées en inversant une matrice dont le déterminant n'est pas trop petit, puis tronquées à l'entier inférieur ou égal le plus proche. Les entiers t_k ainsi obtenus, on calcule dans $J_0(p)$ la combinaison $\sum_{1\leq i\leq 2g} t_k\Omega_k$ avec la méthode du théorème 1 d'arithmétique dans la jacobienne et en utilisant l'exponentiation rapide. Le nombre d'opérations élémentaires dans la jacobienne est donc polynomial en $\log M$, donc aussi la perte de précision.

Théorème 2 **(Problème inverse de Jacobi).** — *Étant donné un entier premier p, on note g le genre de $X_0(p)$ et $\mathcal{D}_1$ l'ensemble des formes différentielles primitives, propres et normalisées et $\mathcal{L}$ le réseau des périodes de $X_0(p)$.*

Il existe un algorithme déterministe qui pour $\rho \in \mathbb{C}^{\mathcal{D}_1}$ et pour $O = o_1 + \cdots + o_g$ une origine de l'application d'intégration de Jacobi $\mu^g : S^gX_0(p) \to \mathbb{C}^{\mathcal{D}_1}/\mathcal{L}$ et pour k un entier positif, calcule g points $P_1, \ldots, P_g$ de $X_0(p)$ tels que $|\mu^g(P_1, \ldots, P_g) - \rho|_\infty \leq$ $\exp(-k)$, en temps polynomial en p, la précision k, et la taille $\log(\max(1, |\rho|_\infty))$ *de ρ.*

On note que la dépendance en $\log(\max(1, |\rho|_\infty))$ est sans importance car le réseau des périodes admet un parallélogramme fondamental de rayon $\exp(p^{\mathcal{O}})$ d'après le lemme 2.

Notons encore que dans cet énoncé, l'erreur qui est majorée se mesure dans l'image de l'application de Jacobi. Si l'on veut majorer l'erreur commise sur les points P_k on note $Q_1, \ldots, Q_g$ des points tels que $\mu^g(Q_1, \ldots, Q_g) = \rho$ et soit λ leur instabilité que l'on suppose finie, sans quoi la question serait dépourvue de sens.

Le lemme 11 de stabilité du problème inverse de Jacobi, montre que la perte de précision dans le problème inverse de Jacobi est polynomiale en p et λ. Il s'agit donc de controler λ.

Soit $\epsilon \in \{0, \infty\}^g$ tel que $Q_k \in D_{\epsilon_k}$ pour tout $1 \leq k \leq g$ et notons $q_{\epsilon_k,k}$ la valeur de q_{ϵ_k} en Q_k. L'instabilité λ est l'inverse du logarithme du module du déterminant jacobien $\left|\frac{\omega}{dq_{\epsilon_k}}(q_{\epsilon_k,k})\right|_{\omega,k}$ qui n'est pas une fontion algébrique. Il est donc naturel de réécrire ce jacobien comme le produit d'une quantité algébrique et de facteurs plus simples.

Pour tout k entre 1 et g, on suppose que la valeur $j(Q_k)$ de l'invariant modulaire j en Q_k vérifie $j(Q_k) \notin \{0, 1728, \infty\}$.

On note que $j(Q_k)$ ne peut être proche de 0 et 1728 en même temps. Si $j(Q_k)$ n'est pas proche de 0 on pose $j_k = j - 1728$ et sinon on pose $j_k = j$. Le jacobien se réécrit alors comme produit du déterminant $\mathcal{J}_{alg} = \left|\frac{j_k\omega}{dj}(q_{\epsilon_k,k})\right|_{\omega,k}$ et des $\frac{dj}{j_k dq_{\epsilon_k}}(q_{\epsilon_k,k})$ pour $1 \leq k \leq g$.

Supposons que les Q_k sont des points algébriques sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et que l'instabilité est finie. Alors $\mathcal{J}_{alg}$ est fini et non nul et on peut le minorer en fonction de la hauteur des $j(Q_k)$. Les $\frac{dj}{j_k dq_{\epsilon_k}}(q_{\epsilon_k,k})$ se minorent en utilisant le lemme 22 de stabilité des zéros d'une série entière[7] : si $\frac{dj}{dq_{\epsilon_k}}(q_{\epsilon_k,k})$ est petit alors $q_{\epsilon_k,k}$ est proche d'un zéro de $\frac{dj}{dq_{\epsilon_k}}$. Mais le j_k choisi est alors plus petit encore.

Appendice A
Appendice sur les séries entières

On a rassemblé dans cette section les définition et résultats relatifs à la localisation et à la stabilité des zéros des séries entières qui sont nécessaires à notre travail.

Le paragraphe A.1 introduit quelques définitions et notations ainsi que des résultats élémentaires. Le paragraphe A.2 énonce et démontre une forme simple et quantifiée du théorème de prolongement analytique. On introduit le polygone de Newton d'une série entière dans le paragraphe A.3 et on montre comment il permet de localiser les zéros de cette série. Le paragraphe A.5 prouve un résultat de stabilité des zéros d'une série entière et en déduit une majoration de la complexité de la localisation des zéros.

A.1. Ordre de grandeur. — Soit $g \geq 1$ un entier. Si $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_g) \in \mathbb{C}^g$, on note $|\mathbf{x}|_\infty = \max_k |x_k|$ la norme L^∞ de $\mathbf{x}$. On note $|\mathbf{x}|_1 = \sum_k |x_k|$ la norme L^1 de $\mathbf{x}$ et $|\mathbf{x}|_2 = \sqrt{\sum_k |x_k|^2}$ sa norme L^2. On note $\|\mathbf{x}\|$ le vecteur $(|x_1|, \ldots, |x_g|)$. Si $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_g)$ on note $\mathbf{x} \star \mathbf{y}$ le vecteur $(x_1 y_1, \ldots, x_g y_g)$. On note $\mathbf{0}_g = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^g$ et $\mathbf{1}_g = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{C}^g$. Si $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_g) \in \mathbb{R}^g$, on dit que $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}_g$ si et seulement si $x_k \geq 0$ pour tout k. On dit que $\mathbf{x} > \mathbf{0}_g$ si et seulement si $x_k > 0$ pour tout k. Notons $P(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \prod_{k=1}^g D(x_k, r_k) \subset \mathbb{C}^g$ le polydisque de polycentre $\mathbf{x}$ et de polyrayon $\mathbf{r}$.

Une série entière f est donnée par $f = \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}}$ où $\mathbf{k}$ parcourt $\mathbb{N}^g$.

***Définition 4* (Ordre de grandeur).** — *Soit $A \geq 1$ un réel et $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_g) \in \mathbb{N}^g$ tel que $\mathbf{n} \geq \mathbf{1}_g$. On dit que f est d'ordre de grandeur $(A, \mathbf{n})$ si pour tout $\mathbf{k} \geq \mathbf{0}_g$ on a*

$$|f_{\mathbf{k}}| \leq A(\mathbf{k} + \mathbf{1}_g)^{\mathbf{n}} = A \prod_{1 \leq m \leq g} (k_m + 1)^{n_m}.$$

Si f est d'ordre de grandeur $(A, \mathbf{a})$ et h d'ordre de grandeur $(B, \mathbf{b})$ alors le produit $p = fh$ est d'ordre de grandeur $(AB, \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{1}_g)$.

En effet $p = \sum_{\mathbf{m}} p_{\mathbf{m}} \mathbf{x}^{\mathbf{m}}$ avec $p_{\mathbf{m}} = \sum_{\mathbf{k}+\mathbf{l}=\mathbf{m}} f_{\mathbf{k}} h_{\mathbf{l}}$. Il y a $\prod_{1 \leq n \leq g} (m_n + 1) = (\mathbf{m} + \mathbf{1}_g)^{\mathbf{1}_g}$ termes dans cette dernière somme, et chacun est majoré en module par $|f_{\mathbf{k}} h_{\mathbf{l}}| \leq A(\mathbf{k} + \mathbf{1}_g)^{\mathbf{a}} B(\mathbf{l} + \mathbf{1}_g)^{\mathbf{b}} \leq AB(\mathbf{k} + \mathbf{l} + \mathbf{1}_g)^{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$. □

***Lemme 15* (Dérivée).** — *Si f est une série entière d'une variable, d'ordre de grandeur (A, m), alors sa dérivée d-ième est d'ordre de grandeur $(A 2^{dm + \frac{d(d-1)}{2}}, m + d)$.*

[7] ou un argument de compacité, plus général mais non effectif.

Soit $g \geq 1$ un entier et $f = \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}$ une série entière de g variables d'ordre de grandeur $(A, \mathbf{n})$. On en déduit pour tout $\mathbf{z} \in P(\mathbf{0}_g, 1)$ la majoration

$$
\begin{aligned}
|f(\mathbf{z})| \leq \sum_{\mathbf{k} \geq \mathbf{0}_g} A(\mathbf{k}+\mathbf{1}_g)^{\mathbf{n}} |\mathbf{z}^{\mathbf{k}}| &\leq A \prod_{1 \leq m \leq g} \sum_{k_m \geq 0} (k_m+1)^{n_m} |z_m|^{k_m} \\
&\leq \frac{\mathbf{n}! A}{\prod_m (1-|z_m|)^{n_m+1}} \\
&= \frac{\mathbf{n}! A}{(\mathbf{1}_g - \|\mathbf{z}\|)^{\mathbf{n}+\mathbf{1}_g}} \leq \frac{\mathbf{n}! A}{(1-|\mathbf{z}|_\infty)^{g+|n|_1}}.
\end{aligned}
$$

Soit $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_g)$. Posant pour tout m

$$
u_m = \frac{k_m + 1 + (n_m+1)|z_m|}{k_m + n_m + 2},
$$

l'intégrale de Cauchy donne

$$
\begin{aligned}
|f^{(\mathbf{k})}(\mathbf{z})| &= \left| \frac{\mathbf{k}!}{(2\pi i)^g} \int_{|\zeta_1|=u_1} \int_{|\zeta_2|=u_2} \cdots \int_{|\zeta_g|=u_g} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_g)}{\prod_m (\zeta_m - z_m)^{k_m+1}} d\zeta_1 d\zeta_2 \dots d\zeta_g \right| \\
&\leq A\mathbf{n}!\mathbf{k}! \frac{(\mathbf{k}+\mathbf{n}+\mathbf{2}_g)^{\mathbf{k}+\mathbf{n}+\mathbf{2}_g}}{(\mathbf{k}+\mathbf{1}_g)^{\mathbf{k}+\mathbf{1}_g} (\mathbf{n}+\mathbf{1}_g)^{\mathbf{n}+\mathbf{1}_g}} \frac{1}{\prod_m (1-|z_m|)^{n_m+k_m+2}} \\
&= A\mathbf{n}!\mathbf{k}! \frac{(\mathbf{k}+\mathbf{n}+\mathbf{2}_g)^{\mathbf{k}+\mathbf{n}+\mathbf{2}_g}}{(\mathbf{k}+\mathbf{1}_g)^{\mathbf{k}+\mathbf{1}_g} (\mathbf{n}+\mathbf{1}_g)^{\mathbf{n}+\mathbf{1}_g} (\mathbf{1}_g - \|\mathbf{z}\|)^{\mathbf{n}+\mathbf{k}+\mathbf{2}_g}} \\
&\leq A\mathbf{n}!\mathbf{k}! \frac{(\mathbf{k}+\mathbf{n}+\mathbf{2}_g)^{\mathbf{k}+\mathbf{n}+\mathbf{2}_g}}{(\mathbf{k}+\mathbf{1}_g)^{\mathbf{k}+\mathbf{1}_g} (\mathbf{n}+\mathbf{1}_g)^{\mathbf{n}+\mathbf{1}_g} (1-|\mathbf{z}|_\infty)^{2g+|n|_1+|k|_1}} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Étant donné $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_m) \in P(\mathbf{0}_g, 1)$ il est alors naturel de considérer la série *recentrée* en $\mathbf{c}$

$$
F_{\mathbf{c}}(\mathbf{y}) = F_{\mathbf{c}}(y_1, \dots, y_g) = f(\mathbf{c} + \mathbf{y} \star (\mathbf{1}_g - \|\mathbf{c}\|)) = f((c_m + y_m(1-|c_m|))_m)
$$

définie pour $\mathbf{y} \in P(\mathbf{0}_g, 1)$.

Reprenons l'inégalité (4) et déduisons

***Lemme 16* (Recentrage).** — *Soit $g \geq 1$ un entier, $A \geq 1$ un réel et $\mathbf{n} \geq \mathbf{1}_g$ dans $\mathbb{N}^g$ et soit $f = \sum_{\mathbf{k} \geq \mathbf{0}_g} f_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}$ une série entière d'ordre de grandeur $(A, \mathbf{n})$. Soit $\mathbf{c} \in P(\mathbf{0}_g, 1)$ et notons $F_{\mathbf{c}}(\mathbf{y}) = f(\mathbf{c} + \mathbf{y} \star (\mathbf{1}_g - \|\mathbf{c}\|))$ la série recentrée de f en $\mathbf{c}$. Alors $F_{\mathbf{c}}$ est une série entière d'ordre de grandeur $(A_{\mathbf{c}}, \mathbf{n} + \mathbf{1}_g)$ avec*

$$
A_{\mathbf{c}} = \mathbf{n}! A \exp(g + |\mathbf{n}|_1) 2^{g+|\mathbf{n}|_1} (\mathbf{1}_g - \|\mathbf{c}\|)^{-\mathbf{n}-\mathbf{2}_g}
$$

Pour tout entier positif u on note $R_u(\mathbf{z})$ le reste de la série

$$
f(\mathbf{z}) = \sum_{|\mathbf{k}|_1 \leq u-1} f_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} + R_u(\mathbf{z}).
$$

Soit $0 < R < 1$ et $\mathbf{z} \in P(\mathbf{0}_g, R)$ on a

$$
\begin{aligned}
|R_u(\mathbf{z})| &= \left|\sum_{|\mathbf{k}|_1\geq u} f_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\right| \leq \sum_{\substack{|\mathbf{k}|_1\geq u\\ \mathbf{k}\leq(u-1)\mathbf{1}_g}} \left|f_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\right| + \sum_{\substack{|\mathbf{k}|_1\geq u\\ \mathbf{k}\not\leq(u-1)\mathbf{1}_g}} \left|f_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\right| \\
&\leq u^g|\mathbf{z}|_\infty^u A u^{|\mathbf{n}|_1} + A\sum_{1\leq m\leq g} \sum_{k_m\geq u}(k_m+1)^{n_m}|z_m^{k_m}| \times \prod_{\substack{1\leq t\leq g\\ t\neq m}} \sum_{k_t\geq 0}(k_t+1)^{n_t}|z_t^{k_t}| \\
&\leq u^g|\mathbf{z}|_\infty^u A u^{|\mathbf{n}|_1} + \frac{\mathbf{n}!A}{\prod_m(1-|z_m|)^{n_m+1}} \sum_{1\leq m\leq g} |z_m|^u(1+u)^{n_m} \\
&\leq u^g|\mathbf{z}|_\infty^u A u^{|\mathbf{n}|_1} + \frac{\mathbf{n}!A}{(\mathbf{1}_g-\|\mathbf{z}\|)^{\mathbf{n}+\mathbf{1}_g}} \times g \times |\mathbf{z}|_\infty^u (1+u)^{|\mathbf{n}|_\infty} \\
&\leq u^g|\mathbf{z}|_\infty^u A u^{|\mathbf{n}|_1} + \frac{\mathbf{n}!gA|\mathbf{z}|_\infty^u(1+u)^{|\mathbf{n}|_\infty}}{(1-|\mathbf{z}|_\infty)^{g+|\mathbf{n}|_1}} \\
&\leq u^g|\mathbf{z}|_\infty^u A u^{ng} + \frac{1}{2}B(1+u)^n|\mathbf{z}|_\infty^u \leq B(u+1)^{(n+1)g}|\mathbf{z}|_\infty^u
\end{aligned}
$$

avec $n=|\mathbf{n}|_\infty$ et $B=\frac{\mathbf{n}!2Ag}{(1-R)^{g+|\mathbf{n}|_1}}$.

***Lemme 17* (Majoration du reste).** — *Soit $f(\mathbf{z})$ une série de g variables d'ordre de grandeur $(A,\mathbf{n})$. Soit u un entier positif ou nul et $R_u(\mathbf{z})$ le reste d'ordre u. Soit R un réel strictement compris entre 0 et 1. Pour tout $\mathbf{z}$ dans $P(\mathbf{0}_g,R)$ on a*

$$|R_u(\mathbf{z})| \leq B(u+1)^{(n+1)g}|\mathbf{z}|_\infty^u$$

avec $n=|\mathbf{n}|_\infty$ et $B=\frac{\mathbf{n}!2Ag}{(1-R)^{g+|\mathbf{n}|_1}}$.

En outre, si $0<\kappa<1$ est un réel et si

$$u\geq \max\left(\frac{16(ng)^2}{(\log R)^2}, \frac{2(\log\kappa-\log B)}{\log R}\right)$$

alors $|R_u(\mathbf{z})|\leq\kappa$ pour $\mathbf{z}\in P(\mathbf{0}_g,R)$.

En effet, si $u\geq\frac{16(ng)^2}{(\log R)^2}$ alors $(n+1)g\sqrt{u}\leq\frac{u|\log R|}{2}$ donc $\log B+(n+1)g\log(1+u)+u\log R\leq\log B+\frac{u\log R}{2}\leq\log\kappa$ car $u\geq\frac{2(\log\kappa-\log B)}{\log R}$. □

A.2. Prolongement analytique sur un disque. — Dans ce paragraphe on veut montrer qu'une série entière f d'une variable et d'ordre de grandeur (A,n) avec $A\geq 1$ et $n\geq 1$, majorée en module par un $\epsilon>0$ sur un petit disque $D=D(c,r)$ inclus dans $D(0,1)$ peut être agréablement majorée en module sur le gros disque $D(0,\frac{1}{2})$.

On procède par prolongement à des disques de plus en plus gros.

On introduit donc la

***Définition 5* (Fils d'un disque équilibré).** — *Un disque ouvert non vide contenu dans le disque unité est dit* équilibré *si et seulement si sa distance au cercle unité est égale à son rayon. Pour $c\in D(0,1)$, on note D_c le disque équilibré de centre c. Sont rayon est $r=\frac{1-|c|}{2}$.*

Si de plus $|c|>\frac{1}{5}$, posons $c'=(|c|-\frac{r}{2})\times\frac{c}{|c|}$ et soit $D_{c'}$ le disque équilibré de centre c'. Alors $|c|-\frac{r}{2}=\frac{5|c|-1}{4}>0$ donc le rayon r' de $D_{c'}$ vérifie $r'=\frac{5}{4}r$. De plus $1-|c'|=\frac{5}{4}(1-|c|)$. On dit que $D_{c'}$ est le fils de D_c. Si $|c|\leq\frac{1}{5}$ alors le fils de D_c est par définition $D_0=D(0,\frac{1}{2})$.

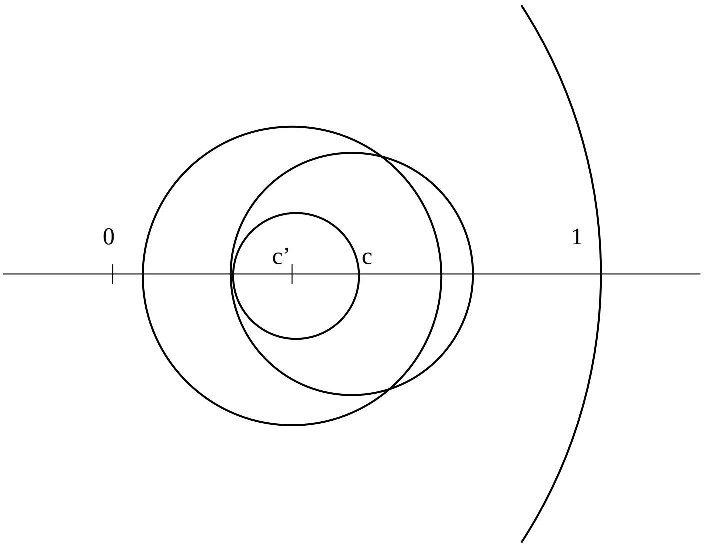

FIGURE 1. Fils d'un disque équilibré

Soit $f(z)$ une série entière d'une variable et d'ordre de grandeur (A, n) avec $A \geq 1$ et $n \geq 1$. Soit $D_c \subset D(0,1)$ un disque équilibré où f est majorée en module par $0 < \epsilon < 2^{-100}$. On note r le rayon de D_c. Soit $D_{c'}$ le disque fils de D_c et r' son rayon. Le disque de centre c' et de rayon $r/2$, est contenu dans D_c. Donc f y est majorée en module par ϵ.

La formule de Cauchy majore les dérivées de f en c'.

$$|f^{(k)}(c')| = \left| \frac{k!}{(2\pi i)} \int_{|\zeta|=r/2} \frac{f(c'+\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta \right| \leq \epsilon \frac{2^k k!}{r^k}$$

On veut majorer $|f|$ sur $D_{c'}$. On choisit un entier positif u et on majore séparément la partie principale d'ordre u en c' notée $P_{c',u}$ et le reste $R_{c',u} = f - P_{c',u}$.

D'une part

$$\begin{aligned} |P_{c',u}(c'+z)| &\leq \sum_{0 \leq k \leq u-1} \left| \frac{f^{(k)}(c')}{k!} z^k \right| \\ &\leq \sum_{0 \leq k \leq u-1} \left(\frac{5r}{4} \right)^k \frac{2^k \epsilon}{r^k} \leq \epsilon \left(\frac{5}{2} \right)^u . \end{aligned} \tag{5}$$

D'autre part, posant $z = c' + y(1 - |c'|)$, le reste $R_{c',u}(c' + y(1 - |c'|))$ n'est autre que le reste d'ordre u en 0 de la série recentrée $y \mapsto F_{c'}(y)$. Puisque $z = c' + y(1 - |c'|)$ appartient au disque équilibré $D_{c'}$, le vecteur y parcourt le disque équilibré D_0. En d'autres termes, $|y| \leq \frac{1}{2}$. On applique les lemmes 16 de recentrage et 17 de majoration du reste.

La série recentrée $F_{c'}$ est d'ordre de grandeur $(A_{c'}, n+1)$ avec $A_{c'}$ majorée par $n!A \left(\frac{2e}{1-|c'|} \right)^{n+2} \leq n!A \left(\frac{e}{r} \right)^{n+2}$.

Suivant les notations du lemme 17 on pose

$$B_{c'} = \frac{2(2e)^{n+2}(n+1)!n!A}{r^{n+2}} \leq A \exp(\mathcal{O}n^2(1 + |\log r|)).$$

Pour $z \in D_{c'}$ on a

$$|R_{c',u}(z)| \le B_{c'}(1+u)^{n+2}2^{-u}$$

Soit alors $\kappa > 0$ le réel tel que $\log\kappa = \frac{\log 2 \log\epsilon}{12\log\frac{5}{2}}$ et soit u le plus petit entier plus grand que $\frac{4|\log\kappa|}{\log 2} = \frac{|\log\epsilon|}{3\log\frac{5}{2}}$.

On suppose que

$$|\log\kappa| \ge |\log B_{c'}|$$

donc $u \ge \frac{2(|\log\kappa|+|\log B_{c'}|)}{\log 2}$. On suppose en outre que

$$u \ge \frac{16(n+1)^2}{(\log 2)^2}.$$

Alors

$$|R_{c',u}| \le \kappa.$$

On déduit de (5) que

$$\log|P_{c',u}(c'+z)| \le u\log\frac{5}{2} + \log\epsilon.$$

On a $u \le 1 + \frac{|\log\epsilon|}{3\log\frac{5}{2}}$ donc $u\log\frac{5}{2} \le \log\frac{5}{2} + \frac{|\log\epsilon|}{3} \le \frac{|\log\epsilon|}{2}$ car $|\log\epsilon| \ge 100\log 2$. Donc $\log|P_{c',u}(c'+z)| \le \frac{\log\epsilon}{2}$.

Ainsi $\log|f| \le \log(2\max(|P_{c',u}|, |R_{c',u}|)) \le \frac{\log 2}{12(\log 5-\log 2)}\log\epsilon + \log 2 \le 0.05\log\epsilon$ car $\log\epsilon \le -100\log 2$.

***Lemme 18* (Prolongement au disque fils).** — *Il existe une constante positive effective c_{12} telle que l'énoncé suivant soit vrai :*

Soit $f(z)$ est une série entière d'une variable et d'ordre de grandeur (A, n) avec $A \ge 1$ et $n \ge 1$. Soit $D = D_c \subset D(0,1)$ un disque équilibré de centre c et de rayon r où f est majorée en module par un $0 < \epsilon < 1$. Soit $D_{c'}$ le disque fils de D_c. On suppose que $-\log\epsilon$ est minoré par $c_{12}(\log A + n^2|\log r|)$. Alors f est majorée en module sur le disque fils $D_{\mathbf{c}'}$ par $\epsilon^{\frac{1}{20}}$.

A.3. Polygone de Newton d'une série entière. — Soit f une série entière d'une variable complexe et soit $R \le \infty$ son rayon de convergence, supposé non nul. Soit r un réel positif inférieur à R. On note $D = D(0,r)$.

On s'intéresse aux zéros de f dans D. Combien sont ils ? Où sont ils ? Comment sont ils affectés par une petite perturbation de f ?

Pour répondre à ces questions, on cherche à enfermer les zéros de f dans une collection finie de petits disques disjoints tels que le nombre de zéros de f dans chaque disque ne soit pas modifié par une petite perturbation.

On étudie d'abord la situation autour de zéro. On suppose que $f(0) = 1$ donc $f(z) = 1 + \sum_{k\ge1} f_k z^k$. On note d le degré de f en z, qui est en général infini. Le *nuage de Newton* associé à f est l'ensemble de points $(k, -\log|f_k|)$ pour $k \ge 0$ et $f_k \ne 0$. Le *polygone de Newton* de f est la fonction $\mathcal{N}$ de $[0,d]$ dans $\mathbb{R}$ définie comme le maximum des fonctions affines $\phi : [0,d] \to \mathbb{R}$ qui passent en dessous du nuage de Newton (c'est-à-dire $\phi(k) \le -\log|f_k|$ pour tout k). La fonction $\mathcal{N}$ est bien définie car le rayon de convergence R est non nul. C'est une fonction convexe de $[0,d]$. Elle est affine sur tout intervalle ouvert délimité par deux entiers consécutifs.

En effet, soit $k \ge 0$ un entier inférieur à d. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe une fonction affine ϕ qui passe sous le nuage de Newton et telle que $\mathcal{N}(k) - \epsilon \le \phi(k) \le \mathcal{N}(k)$.

De même il existe une fonction affine ψ qui passe sous le nuage de Newton et telle que $\mathcal{N}(k+1) - \epsilon \leq \psi(k+1) \leq \mathcal{N}(k+1)$. On définit la fonction affine κ_ϵ de la façon suivante. Si $\phi(k+1) < \psi(k+1)$ et $\psi(k) < \phi(k)$ alors κ_ϵ est la fonction affine qui vaut $\phi(k)$ en k et $\psi(k+1)$ en $k+1$. Si $\phi(k+1) \geq \psi(k+1)$ alors $\kappa_\epsilon = \phi$. Si $\phi(k+1) < \psi(k+1)$ et $\psi(k) \geq \phi(k)$ alors $\kappa_\epsilon = \psi$. On vérifie que κ_ϵ passe sous le nuage de Newton. Quand ϵ tend vers 0 la famille des κ_ϵ converge simplement sur le segment $[k, k+1]$ vers la fonction affine κ_0 qui vaut $\mathcal{N}(k)$ en k et $\mathcal{N}(k+1)$ en $k+1$. Donc κ_0 minore $\mathcal{N}$ sur cet intervalle. Un argument de convexité montre qu'on a égalité.

Ainsi $\mathcal{N}$ est continue et affine par morceaux sur $[0, d]$.

Les *sommets* du polygone de Newton sont les discontinuités de $\mathcal{N}'$ plus $(0,0)$ et éventuellement $(d, \mathcal{N}(d))$.

Soit k un entier entre 0 et d. On pose $l = \mathcal{N}(k)$. On appelle tangente en (k,l) au polygone de Newton, toute droite passant par $P = (k,l)$ et qui passe sous le nuage de Newton. On note α^- la dérivée à gauche, qui est la pente de la tangente à gauche. Le vecteur $(-\alpha^-, 1)$ est orthogonal à cette droite et tourné vers l'intérieur de $\mathcal{N}$. De même α^+ est la dérivée à droite. On suppose que $\alpha^+ > \alpha^-$ donc P est un sommet. Soit α dans $]\alpha^-, \alpha^+[$. La position relative du nuage de Newton et de la tangente en P de pente α nous renseigne sur l'ordre de grandeur de $f(z)$ pour un z tel que $\log|z| = \alpha$. En effet pour tout tel z et pour tout entier positif m on a $-\log|f_m z^m| = -\log|f_m| - m\alpha = (-\alpha, 1)\cdot(m, -\log|f_m|) \geq (-\alpha, 1)\cdot(k, -\log|f_k|)$. De sorte que $f_k z^k$ est le terme dominant sur le cercle $|z| = \exp(\alpha)$. Il reste à voir jusqu'à quel point. On se doute que si le sommet P est assez anguleux, les autres termes peuvent être négligeables.

Soit donc $m \neq k$ un entier positif ou nul. Le point $(m, -\log|f_m|)$ est au dessus du polygone de Newton. Si $m > k$ il est donc au dessus de la droite passant par P et de pente α^+. Donc $|f_m| \leq |f_k|\exp(-(m-k)\alpha^+)$. Donc, pour $\log|z| = \alpha$, le terme $f_m z^m$ est majoré en module par $|f_k||z|^k$ fois $\exp((m-k)(\alpha - \alpha^+))$. La somme $\sum_{m>k}|f_k||z|^k$ est donc majorée par $|f_k||z|^k$ fois $\frac{x}{1-x}$ en posant $x = \exp(\alpha - \alpha^+)$. Si $m < k$ le point $(m, -\log|f_m|)$ est au dessus de la droite passant par P et de pente α^-. Donc $|f_m| \leq |f_k|\exp(-(m-k)\alpha^-)$. Donc, pour $\log|z| = \alpha$, le terme $f_m z^m$ est majoré en module par $|f_k||z|^k$ fois $\exp((m-k)(\alpha - \alpha^-))$. La somme $\sum_{m<k}|f_k||z|^k$ est donc majorée par $|f_k||z|^k$ fois $\frac{y}{1-y}$ en posant $y = \exp(\alpha^- - \alpha)$.

Pour toute fonction h holomorphe sur un voisinage du disque fermé de centre 0 et de rayon $\exp(\alpha)$, et non nulle sur le bord de ce disque, le nombre de zéros de h dans l'intérieur de ce disque est l'indice en 0 du lacet image du bord $\{z,\, |z| = \exp(\alpha)\}$ par h. C'est un invariant homotopique discret. Donc dans toute famille continue de fonctions holomorphes sur un voisinage de ce disque et jamais nulles sur son bord, le nombre de zéros dans l'intérieur du disque est constant.

On en déduit que si $\frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} < 1$ le nombre de zéros de f dans le disque ouvert $D(0, \exp(\alpha)) = \{z,\, |z| < \exp(\alpha)\}$ est le même que celui de z^k soit k zéros. Cette condition est satisfaite si x et y sont inférieurs à $\frac{1}{3}$.

On appelle *pente* du polygone de Newton, une valeur de la dérivée de $\mathcal{N}$ en un point ou elle est dérivable.

***Lemme 19* (Polygone de Newton).** — *Soit $f = 1 + \sum_{k\geq 1} f_k z^k$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit $\xi \in D(0,R)$ un zéro de f. Il existe une pente σ du polygone de Newton telle que $|\log|\xi| - \sigma| \leq \log 3$.*

On note $\mathcal{P}_3$ l'intervale $]-\infty, \log R[$ privé des intervales $[\sigma - \log 3, \sigma + \log 3]$ où σ parcourt l'ensemble des pentes du polygone de Newton.

Si α est un réel de $\mathcal{P}_3$ il existe un unique sommet $P = (k, \mathcal{N}(k))$ admettant une tangente de pente α. La fonction f a exactement k zéros dans le disque ouvert $D(0, \exp(\alpha))$.

On note $\mathcal{P}_4$ l'intervale $]-\infty, \log R[$ privé des intervales $]\sigma - \log 4, \sigma + \log 4[$ où σ parcourt l'ensemble des pentes du polygone de Newton.

Si α est un réel de $\mathcal{P}_4$ il existe un unique sommet $P = (k, \mathcal{N}(k))$ admettant une tangente de pente α. Pour $\log |z| = \alpha$ on a $|f(z)| \geq \frac{|z|^k}{3} = \frac{\exp(k\alpha)}{3}$.

Comme on pouvait s'y attendre, ce lemme est moins précis que son pendant non-archimédien. On ne peut pas l'utiliser directement si les pentes sont trop proches les unes des autres. Dans ce cas, on pourra former (par exemple) la série $g(z) = f(\sqrt{z})f(-\sqrt{z})$ dont les zéros sont les carrés des zéros de f. Le passage de f à g clarifie la situation dans le voisinage du cercle unité. On peut réitérer l'opération si nécessaire.

A.4. Le plus petit zéro d'une série entière. — Soit $F = F_0 + \sum_{k \geq 1} F_k z^k$ une série non constante de rayon au moins 1 telle que $F_0 \neq 0$. La série normalisée $f = F/F_0$ admet au moins une pente. Soit σ_1 la plus petite des pentes. On suppose d'abord que σ_1 est négatif. Soit alors $\log r$ la borne inférieure de $]\sigma_1, 0[\cap \mathcal{P}_3$. Si ce dernier ensemble est vide on pose $r = 1$. Si $r < 1$, alors f admet un zéro de module $\leq r$. On veut montrer que si F_0 est petit alors r est petit ou bien F est uniformément petite. On suppose que $|F_0| < 1$. Le segment $]\sigma_1, \log r[$ est couvert par des intervales fermés de rayon $\log 3$ centrés en les pentes du polygone de Newton. On note $\sigma_1 < \sigma_2 < \cdots$ les pentes successives. On a $\sigma_2 \leq \sigma_1 + 2\log 3$, $\sigma_3 \leq \sigma_1 + 4\log 3$, $\ldots$, $\sigma_k \leq \sigma_1 + 2(k-1)\log 3$, tant que $\sigma_1 + (2k-3)\log 3 < \log r$. On pose donc

$$\ell = \lceil \frac{\log r - \sigma_1 + \log 3}{2\log 3} \rceil$$

et pour tout $1 \leq k \leq \ell$ on a $\sigma_k \leq \sigma_1 + 2(k-1)\log 3$ et donc $\mathcal{N}(k) \leq k\sigma_1 + k(k-1)\log 3$. Cela prouve en particulier que le degré d de F est au moins égal à ℓ.

On pose $k = \ell$ et on obtient

$$\mathcal{N}(\ell) \leq \ell\sigma_1 + \ell(\ell - 1)\log 3. \tag{6}$$

Le principe de la démonstration est le suivant : on suppose F_0 petit.

Si σ_1 est grand alors la série F est petite car ses premiers coefficients sont petits.

Si σ_1 est petit et ℓ petit alors r est petit : le polygone de Newton est anguleux près de l'origine et il y a une petite racine.

Si σ_1 est petit et ℓ grand alors la pente du polygone de Newton varie peu au début, et la série F a de grand coefficients.

Pour formaliser ce raisonnement, nous supposons maintenant que F est d'ordre de grandeur (A, n) avec $A \geq 1$ et $n \geq 1$. Donc $-\log |f_k| = -\log |F_k| + \log |F_0|$ est minorée par $-\log A - n\log(k+1) + \log |F_0|$ qui est une fonction convexe de k et qui minore donc le polygone de Newton. Pour $k = \ell$ on obtient

$$\mathcal{N}(\ell) \geq -\log A - n\log(\ell + 1) + \log |F_0|. \tag{7}$$

Comme $\ell \leq \frac{\log r - \sigma_1 + 3\log 3}{2\log 3}$ on a $\sigma_1 \leq -2\ell \log 3 + \log r + 3\log 3$. En reportant dans l'inéquation (6) on a $\mathcal{N}(\ell) \leq -\ell^2 \log 3 + \ell(\log r + 2\log 3)$. L'inéquation (7) donne alors $\ell^2 \log 3 - \ell(\log r + 2\log 3) \leq \log A + n\log(\ell+1) - \log|F_0| \leq \log A + n\ell - \log|F_0|$. Donc ℓ satisfait l'inégalité quadratique

$$\ell^2 \log 3 - \ell(\log r + 2\log 3 + n) - \log A + \log|F_0| \leq 0. \tag{8}$$

Si $\ell \geq \log r + 2\log 3 + n$ alors on déduit de l'inéquation (8) que $\ell^2(\log 3 - 1) \leq \log A - \log|F_0|$. Au total

$$\ell \leq \max(\log r + 2\log 3 + n, \sqrt{\frac{\log A - \log|F_0|}{\log 3 - 1}}). \tag{9}$$

Comme $\ell \geq \frac{\log r - \sigma_1 + \log 3}{2\log 3}$ on a $\sigma_1 \geq -2\ell\log 3 + \log r + \log 3$. On déduit de l'inéquation (9)

$$\sigma_1 \geq \min((1-2\log 3)\log r - 2n\log 3 - (2\log 3)^2 + \log 3, -2\log 3\sqrt{\frac{\log A - \log|F_0|}{\log 3 - 1}} + \log r + \log 3).$$

On rappelle que $r \leq 1$, et on suppose que

$$-\log|F_0| \geq \mathcal{O}(\log A + n^2).$$

On en déduit alors que

$$\sigma_1 \geq -10\sqrt{-\log|F_0|} + \log r$$

Si $-\log r \geq \sqrt{-\log|F_0|}$ on s'estime heureux puisqu'on a montré que F admet un zéro très petit. Sinon on a $\sigma_1 \geq -11\sqrt{-\log|F_0|}$. On observe que cette dernière inégalité est vraie aussi si σ_1 est positif ou nul.

Donc pour tout entier $k \geq 0$ on a $f_k = \frac{F_k}{F_0} \leq \exp(-k\sigma_1) \leq \exp(11k\sqrt{-\log|F_0|})$. Si $z \in D(0, \frac{1}{2})$ est un complexe de module inférieur à $\frac{1}{2}$ alors $|F_k||z|^k \leq |F_0|\exp(k(11\sqrt{-\log|F_0|} - \log 2))$ et pour tout entier positif u, la partie principale $P_u(z) = \sum_{0\leq k<u} F_u z^u$ est majorée en module par $|F_0|\exp(u(11\sqrt{-\log|F_0|} - \log 2))$.

Si on choisit $u = \lfloor \frac{\sqrt{-\log|F_0|}}{22} \rfloor$ alors $\log|P_u(z)| \leq \log|F_0| + u(-\log 2 + 11\sqrt{-\log|F_0|}) \leq \frac{\log|F_0|}{2}$.

Pendant ce temps là, on peut majorer le reste $R_u(z)$ à l'aide du lemme 17. On demande que $u \geq \frac{16n^2}{(\log 2)^2}$ ce qui est acquis si

$$-\log|F_0| \geq \mathcal{O}n^4.$$

Suivant les notations du lemme 17 on pose $B = 2^{n+2}n!A$. On peut majorer $R_u(z)$ en module par κ pourvu que $-\log\kappa \leq -\log B + u\frac{\log 2}{2}$. On note que $u = \lfloor \frac{\sqrt{-\log|F_0|}}{22} \rfloor$ est plus grand que $\frac{\sqrt{-\log|F_0|}}{23}$ si $\sqrt{-\log|F_0|} \geq \mathcal{O}$.

Si $\sqrt{-\log|F_0|} \geq \mathcal{O}(\log A + n^2)$ alors

$$\log B \leq \frac{\log 2}{92}\sqrt{-\log|F_0|}$$

donc $-\log B + u\frac{\log 2}{2} \geq \sqrt{-\log|F_0|} \times \frac{\log 2}{92}$.

On pose donc $-\log\kappa = 0.007\sqrt{-\log|F_0|}$.

Comme la partie principale $P_u(z)$ est majorée par $\sqrt{|F_0|}$ qui est plus petit que κ on a $\log|F(z)| \leq \log 2 - 0.007\sqrt{-\log|F_0|} \leq -0.006\sqrt{-\log|F_0|}$ si $\sqrt{-\log|F_0|} \geq \mathcal{O}$.

Lemme 20 **(Plus petit zéro)**. — *Il existe une constante positive effective c_{13} telle que l'énoncé suivant soit vrai :*

Soit $F(z) = F_0 + F_1 z + \cdots$ une série entière d'ordre de grandeur (A, n) avec $A \geq 1$ et $n \geq 1$. On suppose que $|F_0| < 1$ et $\sqrt{-\log |F_0|} \geq c_{13}(n^2 + \log A)$. Alors ou bien f a un zéro ξ tel que $\log |\xi| \leq -\sqrt{-\log |F_0|}$, ou bien $f(z)$ est majorée en module pour $z \in D(0, \frac{1}{2})$ par κ tel que $\log \kappa = \frac{-\sqrt{-\log |F_0|}}{200}$.

A.5. Stabilité des zéros d'une série entière. — On se donne maintenant une série entière f d'ordre de grandeur (A, n) avec $A \geq 1$ et $n \geq 1$ et un complexe c tel que $|c| < 1$. On veut montrer que si $f(c)$ est petite alors c est proche d'un zéro de f ou bien f est petite sur le disque $D(0, \frac{1}{2})$.

On note $F_c(y) = f(c + y(1 - |c|)) = F_0 + F_1 y + \cdots$ la série recentrée en c. Elle est d'ordre de grandeur $(A_c, n+1)$ avec $A_c = An! \exp(n+1) 2^{n+1} (1 - |c|)^{-n-2}$. Appliquons le lemme 20 à la série recentrée F_c. On suppose donc que $F_0 = f(c)$ vérifie $|f(c)| < 1$ et

$$\sqrt{-\log |f(c)|} \geq c_{13}(n^2 + \log A_c).$$

Il vient que f a un zéro ξ tel que $\log |c - \xi| \leq -\sqrt{-\log |f(c)|}$ ou bien f est majorée en module par κ sur le disque équilibré D_c où $\log \kappa = -\frac{\sqrt{-\log |f(c)|}}{200}$. Dans ce dernier cas, on peut appliquer le lemme 18. Soit $w = \lceil \frac{-log(1-|c|)}{\log \frac{5}{4}} \rceil$ et soit ν tel que $\log \nu = \frac{\log \kappa}{20^w}$ et supposons que

$$-\log \nu \geq c_{12}(\log A + n^2 |\log \left(\frac{1 - |c|}{2} \right) |).$$

On applique w fois le lemme 18 et on montre que f est majorée en module par ν sur le disque $D(0, \frac{1}{2})$.

On note que $20^w \leq 20(1 - |c|)^{\frac{\log 20}{\log \frac{4}{5}}} \leq 20(1 - |c|)^{-14}$.

Lemme 21 **(Stabilité d'un zéro)**. — *Il existe une constante effective positive c_{14} telle que l'énoncé suivant soit vrai :*

Soit f une série entière d'ordre de grandeur (A, n) avec $A \geq 1$ et $n \geq 1$. Soit c dans $D(0, 1)$. On suppose que $\epsilon = |f(c)| < 1$. Soit ν tel que $\log \nu = -\frac{(1-|c|)^{14} \sqrt{-\log \epsilon}}{c_{14}}$.

On suppose que $-\log \nu \geq c_{14}(\log A + n^2(1 + |\log(1 - |c|)|))$.

Alors f admet un zéro ξ tel que $\log |c - \xi| \leq -\sqrt{-\log |f(c)|}$ ou bien f est majorée en module par ν sur le disque $D(0, \frac{1}{2})$.

Puisque les zéros de f bougent peu sous l'effet d'une petite perturbation, ils ne doivent pas beaucoup s'éloigner des zéros de la partie principale. Et c'est un moyen commode de les localiser.

Soit donc f une série entière d'ordre de grandeur (A, n) avec $A \geq 1$ et $n \geq 1$. Soit r un réel entre $1/2$ et 1. Soit ϵ un réel entre 0 et 1 et soit ν un réel positif tel que $\log \nu = -\frac{(1-r)^{14} \sqrt{-\log \epsilon}}{c_{15}}$ avec c_{15} constante plus grande que 1 et c_{14}. On suppose que $|f|$ n'est pas majorée par $\nu + \epsilon$ sur $D(0, \frac{1}{2})$. On suppose que $-\log \nu \geq c_{15}(\log A + n^2(1 + |\log(1 - r)|))$.

On cherche un entier positif u tel que le reste $R_u(z)$ soit majoré en module par ϵ sur $D(0, r)$. Selon le lemme 17 il faut que $u \geq \frac{2(\log \epsilon - \log B)}{\log r}$ avec $B = \frac{n! 2A}{(1-r)^{n+1}}$. Si c_{15} est assez grand alors

$$|\log B| \leq |\log \epsilon|$$

donc il suffit que $u \geq \frac{4|\log \epsilon|}{|\log r|}$. Soit donc u le plus petit entier satisfaisant cette condition. On vérifie que $u \geq \frac{4|\log \epsilon|}{|\log r|} \geq \frac{16n^2}{(\log r)^2}$ si c_{15} est assez grande. Donc $R_u(z)$ est majoré par ϵ en module sur $D(0,r)$. On pose $\rho = \exp(-\sqrt{-\log \epsilon})$.

La partie principale $P_u(z)$ est un polynôme de degré $u-1$ qui a donc $u-1$ zéros dans $\mathbb{C}$. Donc l'intervalle $[r-4u\rho, r]$ contient(8) au moins un réel positif R tel que $|R - |\xi|| > 2\rho$ pour tout zéro ξ de P_u. Soit $\mathcal{D}$ le fermé de $\mathbb{C}$ obtenu en retirant au disque fermé $\bar{D}(0,R)$ tous les disques ouverts $D(\xi, 2\rho)$ où les ξ sont les zéros de $P_u(z)$. D'après le lemme 21 le polynôme $P_u(z)$ est strictement minoré en module par ϵ sur le domaine fermé $\mathcal{D}$. Donc $f(z)$ et $P_u(z)$ n'ont pas de zéro dans $\mathcal{D}$. Elles ont le même nombre de zéros dans $D(0,R)$. Elles ont le même nombre de zéros dans chaque $D(\xi, 2\rho)$. Donc les zéros de $P_u(z)$ dans $D(0,R)$ approchent ceux de $f(z)$ à distance 4ρ. On obtient le

***Lemme 22* (Stabilité globale).** — *Il existe une constante effective positive c_{16} telle que l'énoncé suivant soit vrai :*

Soit f une série entière d'ordre de grandeur (A,n) avec $A \geq 1$ et $n \geq 1$. Soit r et ρ deux réels tels que $\frac{1}{2} \leq r < 1$ et $0 < \rho < 1$. Soit u le plus petit entier plus grand que $\frac{4(\log \rho)^2}{|\log r|}$. On suppose que $-(1-r)^{14} \log \rho \geq c_{16}(\log A + n^2|\log(1-r)|))$. Alors f satisfait l'une au moins des deux propriétés suivantes :

1. *Sur le disque $D(0, \frac{1}{2})$, le logarithme $\log|f|$ du module de f est majoré par $\frac{(1-r)^{14}\log \rho}{c_{16}}$.*
2. *Il existe un réel positif R tel que $r - 4u\rho \leq R \leq r$ et tel que dans le disque $D(0,R)$ les zéros de $f(z)$ sont approchés à distance 4ρ par ceux de la partie principale $P_u(z)$ de degré $u-1$. En particulier, il y a au plus u tels zéros.*

***Théorème 3* (Zéros d'une série).** — *Soit $f = \sum_{r \geq 0} f_r z^r$ une série entière d'ordre de grandeur (A,n) avec $A \geq 1$ et $n \geq 1$. Soit R un réel compris strictement entre 0 et 1. Soit μ la partie positive de $-\log \max_{|z| \leq \frac{1}{2}} |f(z)|$. Le nombre de zéros de module $\leq R$ est polynomial en n, $\log A$, $(1-R)^{-1}$ et μ.*

Il existe un algorithme qui pour f et R comme ci-dessus(9) et pour k entier positif, retourne

- *un rationnel R' tel que $|R - R'| < \exp(-k)$,*
- *le nombre de zéros de f dans $D(0,R')$,*
- *une approximation de ces zéros à $\exp(-k)$ près,*

en temps déterministe polynomial en n, $\log A$, $(1-R)^{-1}$, μ et la précision absolue k requise.

Cela découle du lemme 22. Il suffit de rappeler l'existence de tels algorithmes pour la recherche des racines d'un polynôme. □

Références

[1] O. A. Atkin & J. Lehner – « Hecke operators on $\Gamma_0(n)$ », *Math. Ann.* **185** (1970), p. 134–160.

[2] H. Cohen – *A course in computational algebraic number theory*, Springer, 1993.

(8) Si c_{15} est assez grand alors $4u\rho$ est (beaucoup) plus petit que r, donc l'intervalle en question est constitué de réels positifs.

(9) La série f est donnée sous la forme d'un oracle qui calcule les coefficients f_r en temps polynomial en r et en la précision absolue requise.

[3] J.-M. Couveignes – « Explicit aspects of the Jacobi inversion problem », *Talk at Dagstuhl* ftp ://ftp.dagstuhl.de/pub/Proceedings/04/04211/04211.CouveignesJeanMarc.ExtAbstract !.pdf (2004).

[4] J. E. Cremona – *Algorithms for modular elliptic curves*, Cambridge University Press, 1997.

[5] C. Delaunay – *Thèse*, Université de Bordeaux, 2002.

[6] B. Edixhoven – « On computing coefficients of modular forms », *Talk at MSRI* www.math.leidenuniv.nl/~edix/public_html_rennes/talks/msridec2000.html (2000).

[7] ———, « About point counting over arbitrary finite fields », *Talk at AIM* www.aimath.org/WWN/primesinp/articles/html/42a/ (2003).

[8] N. Elkies – « Heegner point computations », in *Algorithmic Number Theory*, Lecture Notes in Computer Science, no. 877, Springer, 1994, p. 122–133.

[9] H. M. Farkas & I. Kra – *Riemann surfaces, second edition*, Springer, 1992.

[10] G. Frey & M. Müller – « Arithmetic of modular curves and applications », in *On Artin's conjecture for odd 2-dimensional representations*, Lecture Notes in Math., no. 1585, Springer, 1994.

[11] D. Knuth – *The art of computer programming*, Addison-Wesley, 2nd edition, 1981.

[12] Y. Manin – « Parabolic points and zeta function of modular curves », *Math. USSR Izvestija* **6** (1972), no. 1, p. 19–64.

[13] J. Martinet – *Les réseaux parfaits des espaces euclidiens*, Masson, 1996.

[14] L. Merel – « Universal Fourier expansions of modular forms », in *On Artin's conjecture for odd 2-dimensional representations*, Lecture Notes in Math., no. 1585, Springer, 1994.

[15] G. Shimura – *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Princeton University Press, 1971.

Index

Jean-Marc Couveignes, Groupe de Recherche en Informatique et Mathématiques du Mirail, Université de Toulouse II, Le Mirail • *E-mail :* `couveig@univ-tlse2.fr`
Url : `http://www.univ-tlse2.fr/grimm/couveignes`