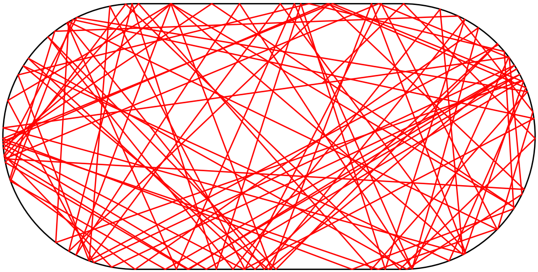
Les mathématiques du billard

Elise Goujard

MATh.en.JEANS, 6-7 avril 2019

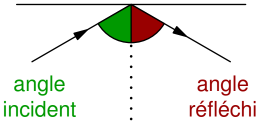


Un billard comme on en connait tous :

Un billard comme on en connait tous :

Modèle mathématique :

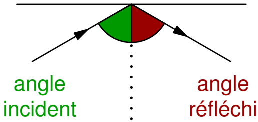
- Une seule bille de billard, ponctuelle
- Bille se déplaçant sans frottement et lancée sans effet
- Table de forme variée



Un billard comme on en connait tous :

Modèle mathématique :

- Une seule bille de billard, ponctuelle
- Bille se déplaçant sans frottement et lancée sans effet
- Table de forme variée



Dans ce modèle, la bille se déplace en ligne droite et rebondit sur les parois de la table avec un angle réfléchi égal à l'angle incident. Elle ne s'arrête jamais !

À quoi ça sert ?

- En mécanique, pour modéliser des chocs élastiques (collisions de particules, par exemple électrons ou particules de gaz)
- En optique ou acoustique pour modéliser la réflexion de rayons lumineux ou sonores.

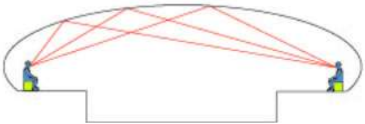
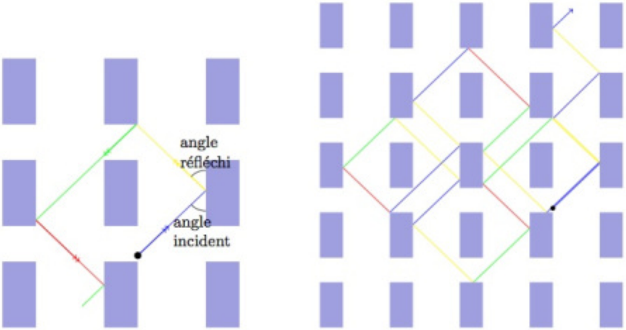
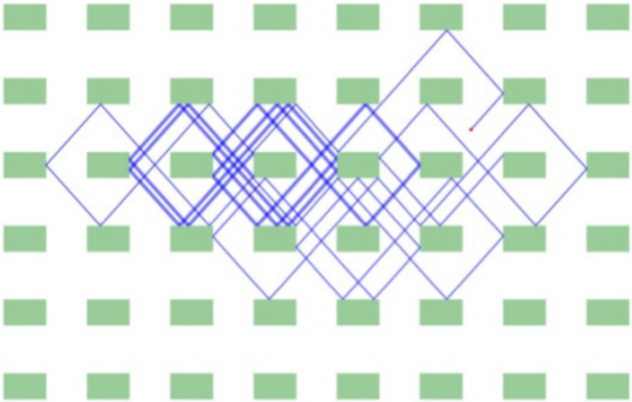


Image : H. Lehning

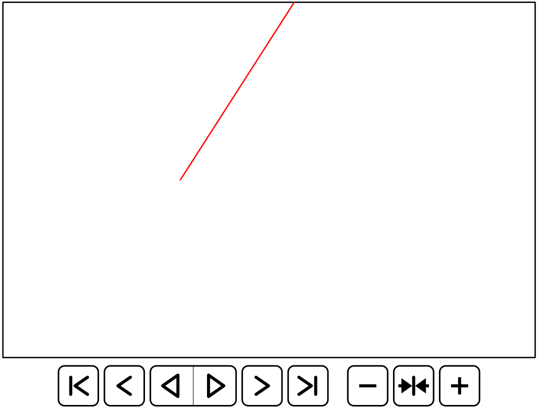
À quoi ça sert ?

Exemple d'application : Modèle de Lorentz pour la conductivité électrique dans les plaques métalliques.





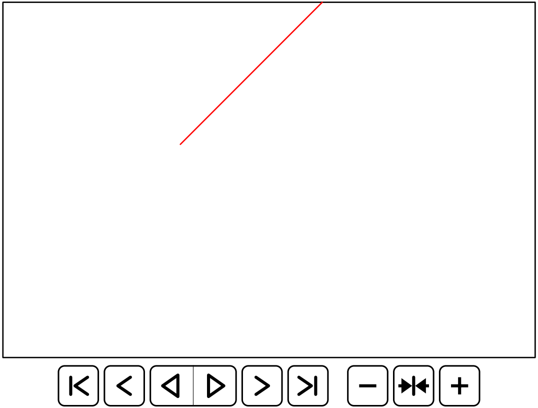
Étude du billard rectangulaire



Questions :

- Quelle est l'allure de la trajectoire (en fonction du point de départ et de la direction du lancer) ?
- Combien y a t-il de trajectoires périodiques de longueur donnée ?

Billard rectangulaire

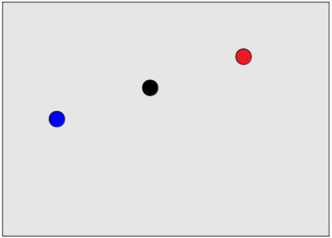


Questions :

- Quelle est l'allure de la trajectoire (en fonction du point de départ et de la direction du lancer) ?
- Combien y a t-il de trajectoires périodiques de longueur donnée ?

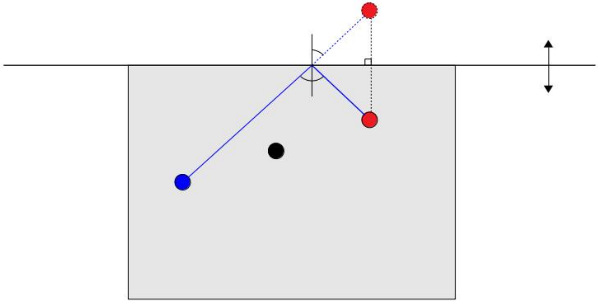
Une astuce

Comment toucher la boule rouge avec la boule bleue sans toucher la noire ?

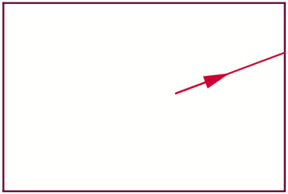


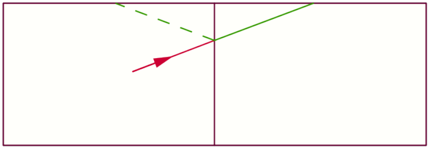
Une astuce

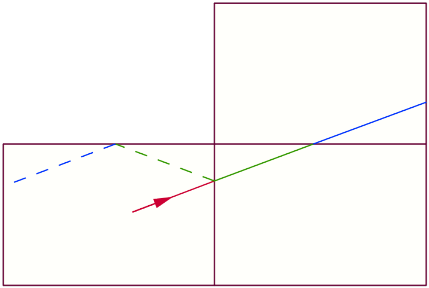
Il suffit de viser le symétrique !

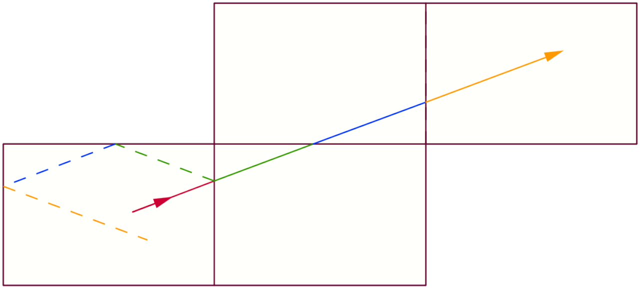


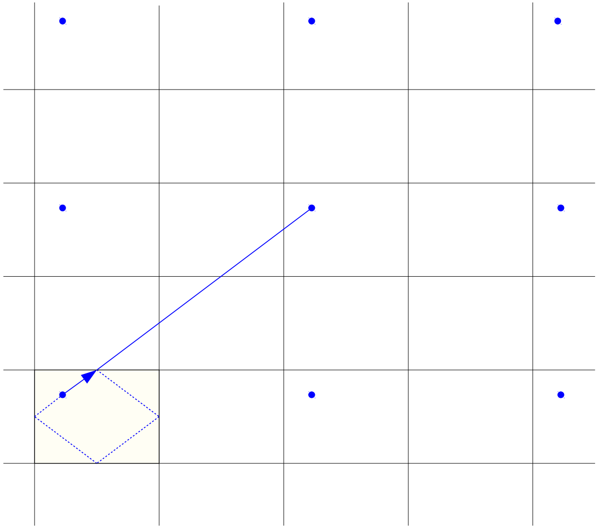
Retour à l'étude des trajectoires

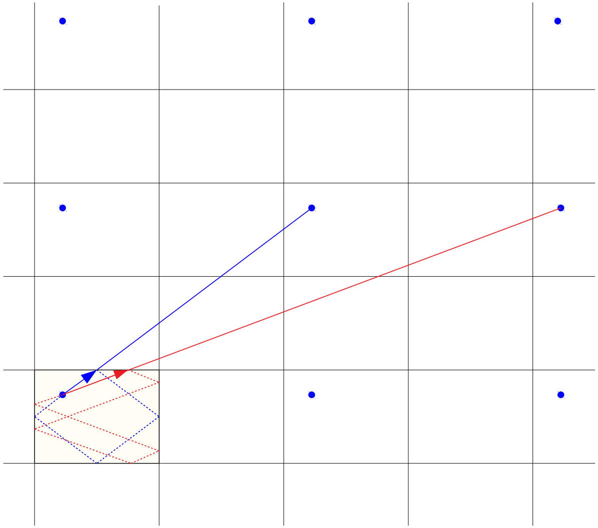


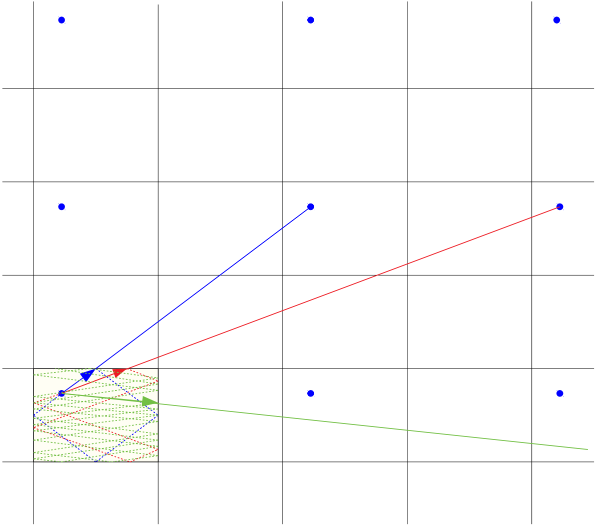








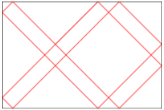


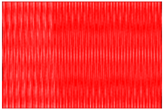


Résultats obtenus avec cette méthode

Théorème

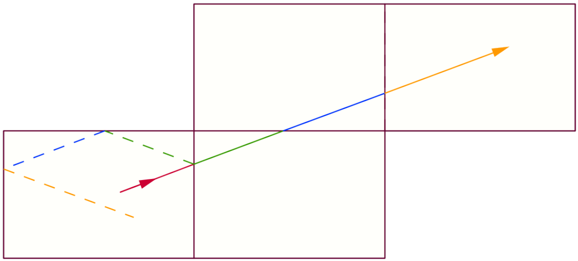
- *Si l'angle a est rationnel ($a \in \mathbb{Q}$, c'est-à-dire que a mesuré en degrés s'écrit p/q avec p et $q \neq 0$ entiers), la trajectoire est **périodique** (la bille revient à son point de départ au bout d'un certain temps, qu'on peut calculer).*
- *Sinon, la bille ne repasse jamais par son point de départ, sa trajectoire est **dense** et **uniformément distribuée** sur la table (la bille visite toute les régions de la table et y passe un temps équivalent).*

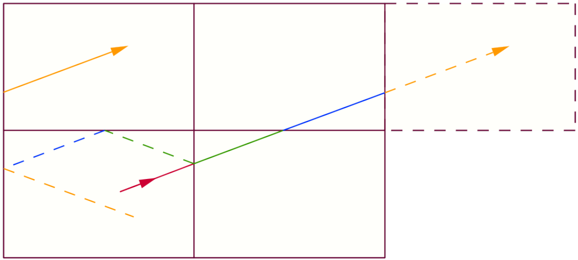


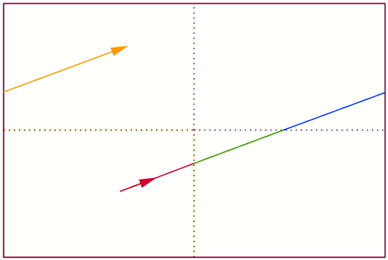


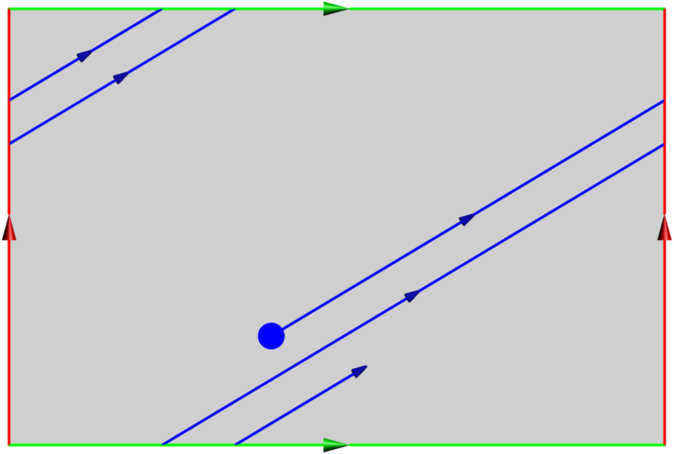
On peut également estimer le nombre de trajectoires périodiques de longueur bornée grâce à cette méthode.

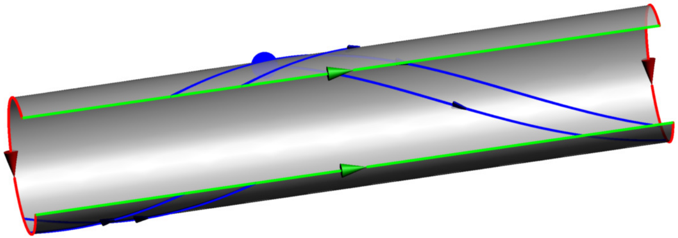
Autre méthode

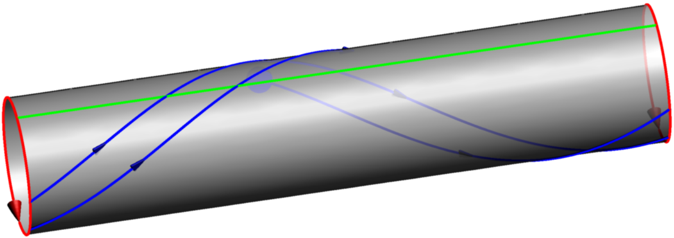


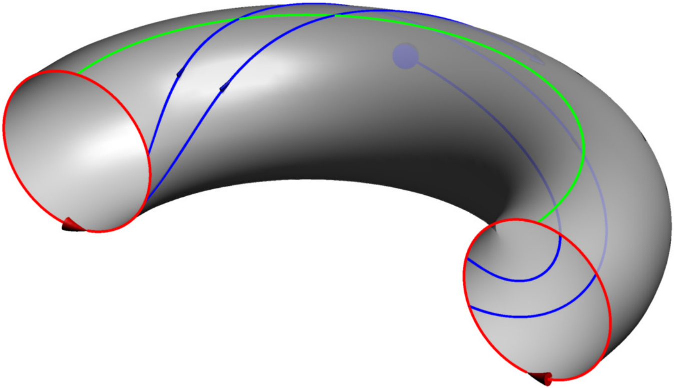


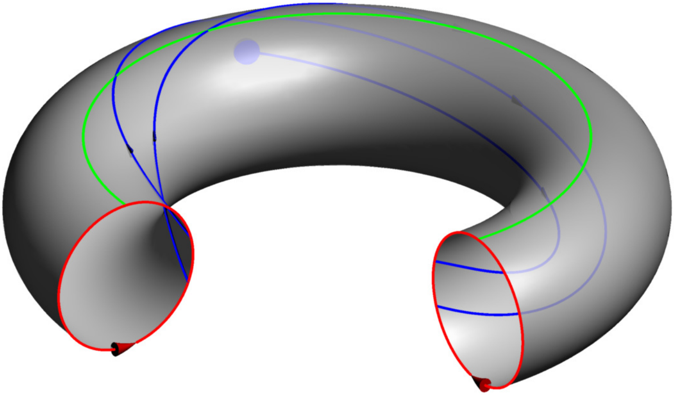


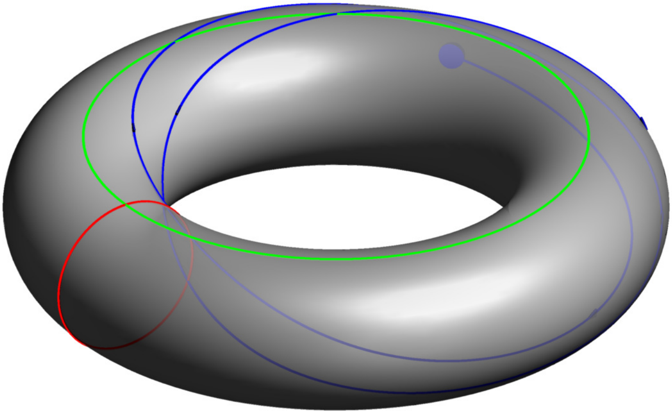


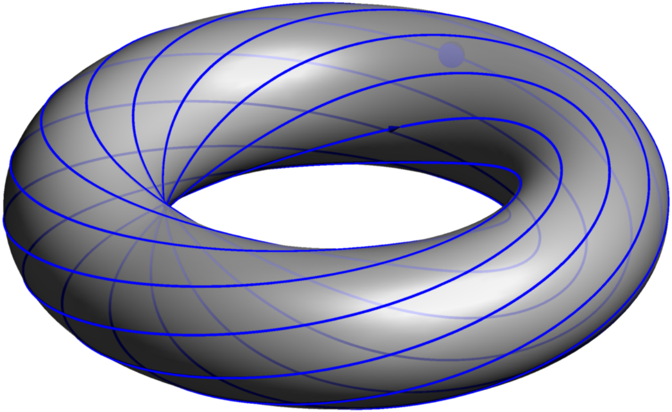




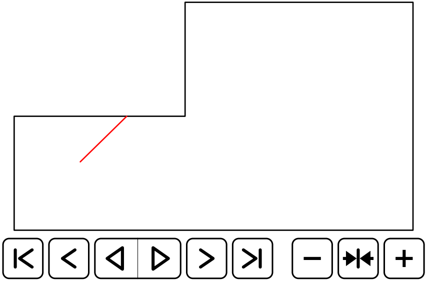




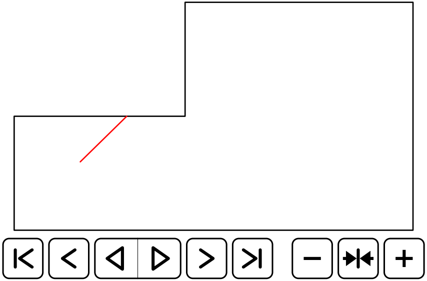




Un autre exemple de billard

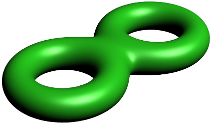


Un autre exemple de billard

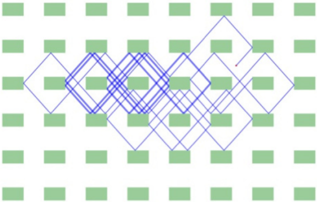


Les trajectoires ne sont plus nécessairement périodiques ou denses...

Pour pouvoir les étudier, on regarde comment elles s’enroulent sur la surface associée :

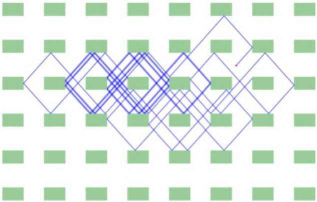


Un théorème récent :



Le taux de diffusion vaut $\frac{2}{3}$.

Un théorème récent :



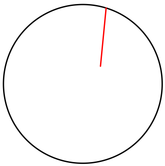
Le taux de diffusion vaut $\frac{2}{3}$.

Théorème (2011, Delecroix-Hubert-Lelièvre)

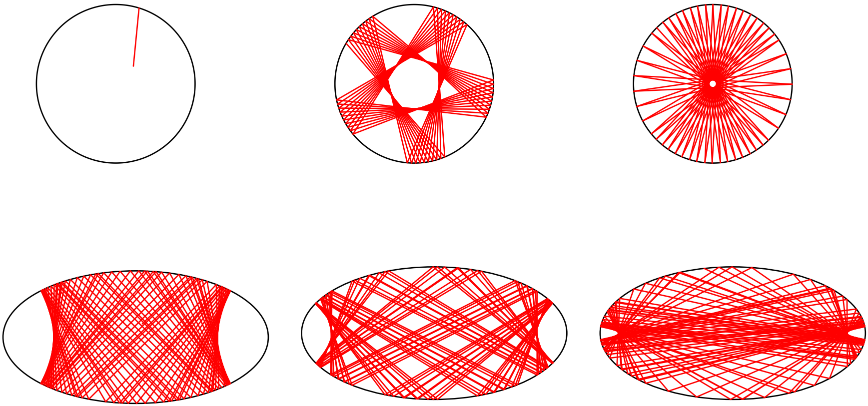
Pour presque touts paramètres a, b, pour presque tout angle θ et point de départ x,

$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{\log d(x;\phi_t^\theta(x))}{\log(t)} = \frac{2}{3}$$

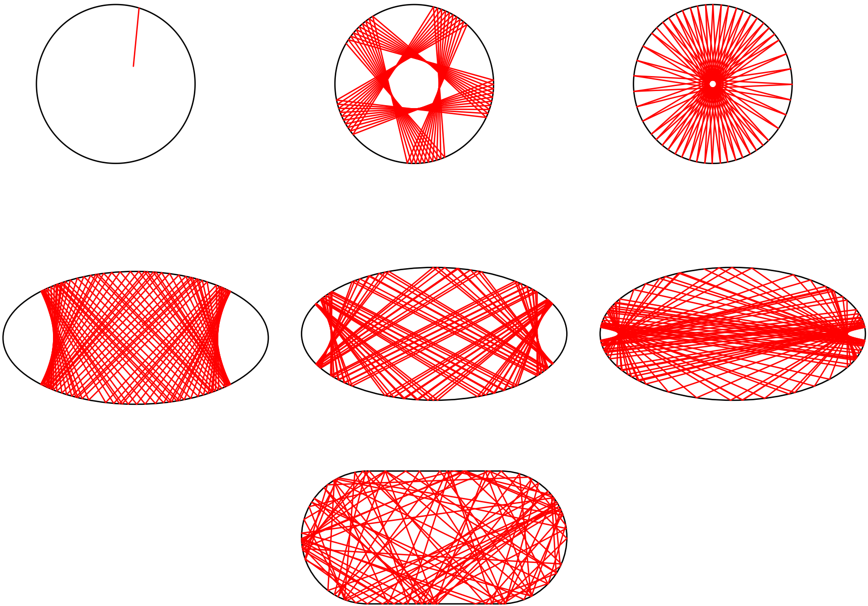
D’autres billards...



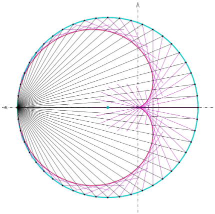
D'autres billards...

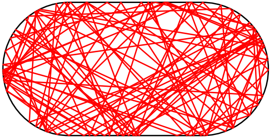


D’autres billards...



D’autres billards... d’autres mathématiques





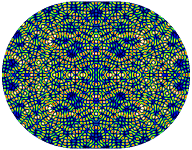
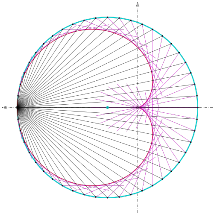
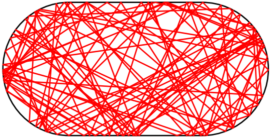


Image : D. Stone

D’autres billards...   d’autres mathématiques





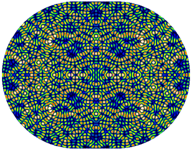


Image : D. Stone

Merci de votre attention !