Zéros de polynômes aléatoires

Elise Goujard
Université Rennes 1
IRMAR

Journées Louis Antoine
24-25 janvier 2013

Plan

On s'intéresse au nombre de zéros réels de

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n,$$

polynôme réel de degré n fixé, "aléatoire".

On s'intéresse au nombre de zéros réels de

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n,$$

polynôme réel de degré n fixé, "aléatoire".

$$a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$ est "aléatoire".

On s'intéresse au nombre de zéros réels de

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n,$$

polynôme réel de degré n fixé, "aléatoire".

$$a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ est "aléatoire".}$$

Définition

Dans la suite on appellera "polynôme aléatoire" un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ dont les coefficients a_i sont des variables aléatoires réelles de loi gaussienne centrée réduite, indépendantes.

Pour $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\mathbb{P}((a_0, \ldots, a_n) \in A) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \int_A e^{-\frac{\|x\|^2}{2}} d\lambda_{n+1}(x)$$

où $\|.\|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^{n+1}$ et λ_{n+1} la mesure de Lebesgue.

On notera Z_n le nombre moyen de zéros réels de polynômes aléatoires réels de degré n.

On notera Z_n le nombre moyen de zéros réels de polynômes aléatoires réels de degré n.

Théorème

(Kac, 1943)

$$Z_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{(t^2-1)^2} - \frac{(n+1)^2 t^{2n}}{(t^{2n+2}-1)^2}}\, dt$$

On cherche les t réels tels que

$$a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n = 0, \tag{1}$$

avec a aléatoire.

On cherche les t réels tels que

$$a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n = 0, \tag{1}$$

avec a aléatoire.

On note $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^n \end{pmatrix}$. C'est une courbe paramétrée régulière dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

On cherche les t réels tels que

$$a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n = 0, \tag{1}$$

avec a aléatoire.

On note $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^n \end{pmatrix}$. C'est une courbe paramétrée régulière dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

L'équation (1) se réécrit $\langle a, \gamma(t) \rangle = 0$ et signifie qu'au temps t, $\gamma(t)$ est dans l'hyperplan de vecteur normal a.

On cherche les t réels tels que

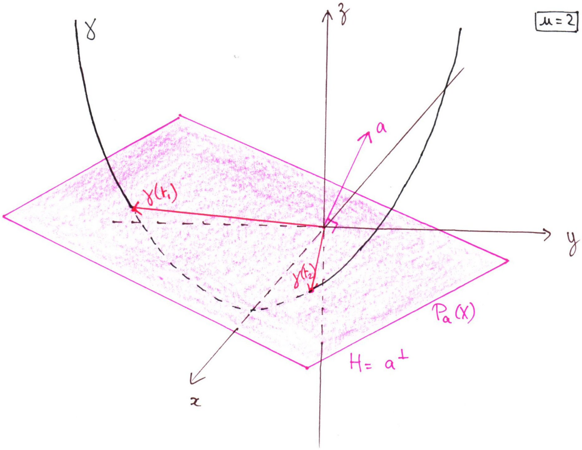
$$a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n = 0, \tag{1}$$

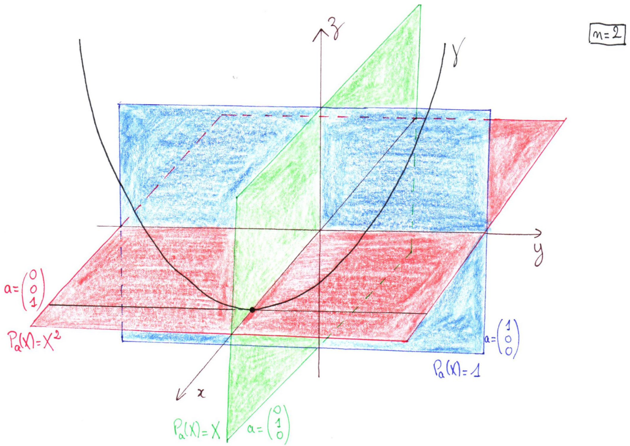
avec a aléatoire.

On note $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^n \end{pmatrix}$. C'est une courbe paramétrée régulière dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

L'équation (1) se réécrit $\langle a, \gamma(t) \rangle = 0$ et signifie qu'au temps t, $\gamma(t)$ est dans l'hyperplan de vecteur normal a.

Compter les zéros d'un polynôme revient à compter le nombre d'intersections de la courbe paramétrée γ avec des hyperplans !


$n = 2$
γ
z
a
$\gamma(t_1)$
$\gamma(t_2)$
y
x
$P_a(X)$
$H = a^\perp$


$n=2$
z
y
y
x
$a=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$
$P_a(X)=X^2$
$a=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$
$P_a(X)=1$
$P_a(X)=X$
$a=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

La formule de Crofton relie le nombre moyen d'intersection d'une courbe avec des hyperplans aléatoires, à sa longueur.

Longueur de courbes

Longueur de courbes

On se donne une courbe paramétrée $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, continue.

Longueur de courbes

On se donne une courbe paramétrée $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, continue. On se donne une subdivision $\sigma = (t_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ (σ vérifie $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$). A cette subdivision σ est associée une ligne polygonale P_σ de sommets $\gamma(t_i)$, et de longueur

$$|P_\sigma| = \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|$$

Longueur de courbes

On se donne une courbe paramétrée $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, continue. On se donne une subdivision $\sigma = (t_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ (σ vérifie $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$). A cette subdivision σ est associée une ligne polygonale P_σ de sommets $\gamma(t_i)$, et de longueur

$$|P_\sigma| = \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|$$

Définition

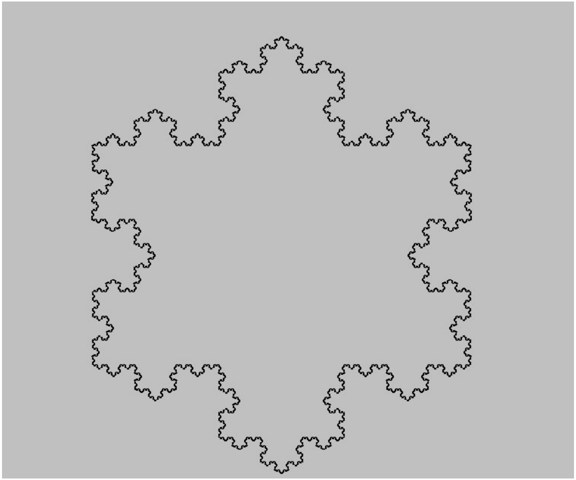
On appelle longueur de γ la quantité :

$$|\gamma| = \limsup_{\sigma \text{ subdivision}} |P_\sigma|$$

On dit que γ est rectifiable si elle est de longueur finie.

Longueur d'une courbe

Une courbe non rectifiable :



Longueur d'un courbe

Si γ est rectifiable, on peut calculer sa longueur par

$$|\gamma| = \lim_{m \to +\infty} |P_{\sigma_m}|$$

où σ_m est une subdivision dont le pas $(\max_i(t_{i+1}^m - t_i^m))$ tend vers 0.

Longueur d'un courbe

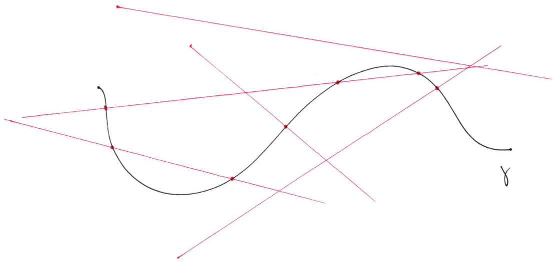
Si γ est rectifiable, on peut calculer sa longueur par

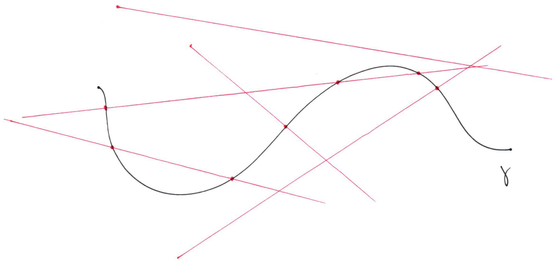
$$|\gamma| = \lim_{m \to +\infty} |P_{\sigma_m}|$$

où σ_m est une subdivision dont le pas $(\max_i(t_{i+1}^m - t_i^m))$ tend vers 0.

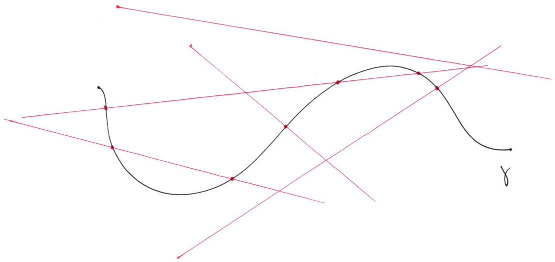
Proposition

Si γ est de classe C^1 alors elle est rectifiable et sa longueur vaut $\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$.


γ



A dilatation près, il existe une unique mesure sur l'espace des droites affines du plan, invariante par isométries : $\mu_{\mathcal{D}}$.

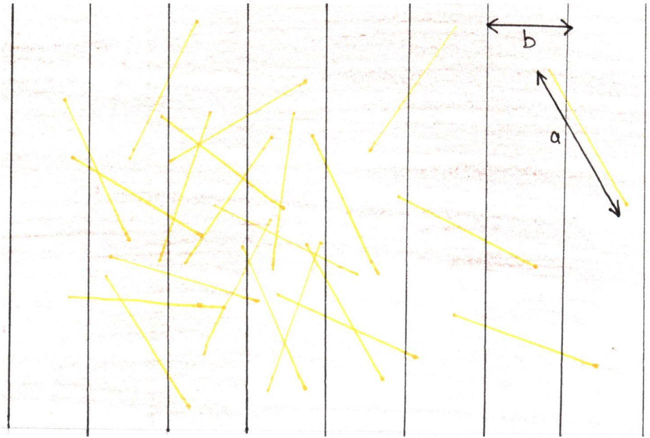


A dilatation près, il existe une unique mesure sur l'espace des droites affines du plan, invariante par isométries : $\mu_{\mathcal{D}}$.

Théorème

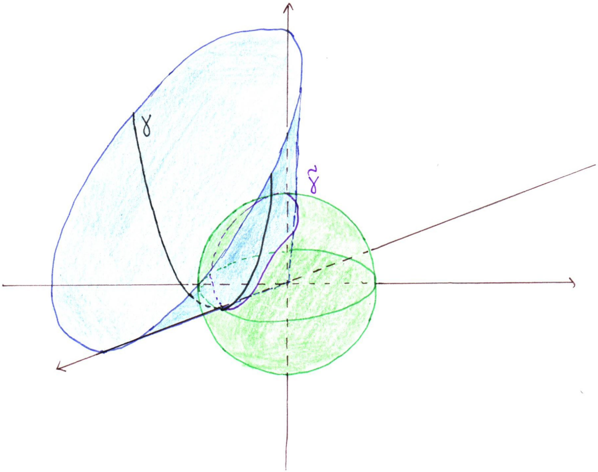
(formule de Crofton) $\int_{\mathcal{D}} \sharp\{D \cap \gamma\} d\mu_{\mathcal{D}}(D) = |\gamma|$

Un problème relié : les aiguilles de Buffon



On normalise le problème en se ramenant sur la sphère $\mathbb{S}^n$

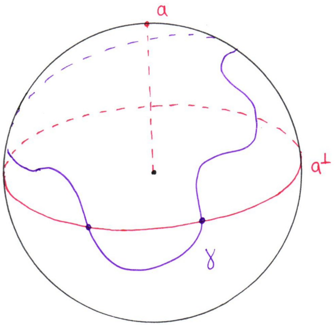
On normalise le problème en se ramenant sur la sphère $\mathbb{S}^n$



Après cette renormalisation, on considère γ comme une courbe de longueur finie tracée sur la sphère : $\gamma : I \to \mathbb{S}^n$.

Après cette renormalisation, on considère γ comme une courbe de longueur finie tracée sur la sphère : $\gamma : I \to \mathbb{S}^n$.
On note $Z_n(a)$ le nombre de zéros du polynôme $P_a(X) = a_0 + a_1 X + \dots a_n X^n$.

Après cette renormalisation, on considère γ comme une courbe de longueur finie tracée sur la sphère : $\gamma : I \to \mathbb{S}^n$.
On note $Z_n(a)$ le nombre de zéros du polynôme $P_a(X) = a_0 + a_1 X + \ldots a_n X^n$.
On a vu que $Z_n(a) = \sharp\{t, a \perp \gamma(t)\} = \sharp\{\gamma(I) \cap a^\perp\}$



Résultat

Théorème

Le nombre moyen de racines réelles d'un polynôme aléatoire est

$$Z_n = \frac{|\gamma|}{\pi}$$

ou encore (formule de Kac) :

$$Z_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{(t^2-1)^2} - \frac{(n+1)^2 t^{2n}}{(t^{2n+2}-1)^2}} dt$$

Asymptotiquement :

$$Z_n = \frac{2}{\pi} \log(n) + c + \frac{2}{\pi n} + O(\frac{1}{n^2})$$

avec $c = 0,625\ldots$

Interprétation

La proportion moyenne de racines réelles parmi l'ensemble des racines se comporte en $\frac{\log(n)}{n}$ quand le degré n est grand.

Interprétation

La proportion moyenne de racines réelles parmi l'ensemble des racines se comporte en $\frac{\log(n)}{n}$ quand le degré n est grand.
Les racines réelles se raréfient quand le degré augmente.

- Et si les coefficients n'ont pas tous la même variance ?

On suppose le vecteur a gaussien centré ayant comme covariance une matrice C définie positive.

On suppose le vecteur a gaussien centré ayant comme covariance une matrice C définie positive.
Densité de la loi de a :

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{\det(C)}}e^{-\frac{1}{2}\|x\|_C^2}d\lambda_{n+1}(x)$$

où $\|x\|_C^2 = x^T C^{-1} x$.

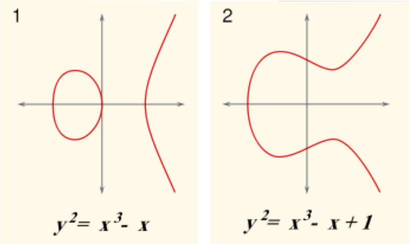
On suppose le vecteur a gaussien centré ayant comme covariance une matrice C définie positive.
Densité de la loi de a :

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{\det(C)}} e^{-\frac{1}{2}\|x\|_C^2} d\lambda_{n+1}(x)$$

où $\|x\|_C^2 = x^T C^{-1} x$.
En posant $\tilde{a} = C^{-\frac{1}{2}}$ on a $\|\tilde{a}\| = \|a\|_C$, et on se ramène au cas précédent.

- Que se passe-t-il à plusieurs variables ?

Exemple pour deux variables, degré 3 :



Soit $P \in \mathbb{R}_n[X, Y]$. On notera b_0 le nombre de composantes connexes du lieu d'annulation réel de ce polynôme.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X, Y]$. On notera b_0 le nombre de composantes connexes du lieu d'annulation réel de ce polynôme.
Il vérifie l'inégalité :

$$b_0 \leq g + 1$$

où $g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ est appelé "genre" de la courbe algébrique plane $P(X, Y) = 0$.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X, Y]$. On notera b_0 le nombre de composantes connexes du lieu d'annulation réel de ce polynôme.
Il vérifie l'inégalité :

$$b_0 \leq g + 1$$

où $g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ est appelé "genre" de la courbe algébrique plane $P(X, Y) = 0$.
Les courbes telles qu'il y a égalité sont appelées courbes maximales.

On suppose que les coefficients $a_{j,k}$ devant $X^j Y^k$ suivent la loi normale centrée de variance $\frac{(n+2)!}{2j!k!(n-j-k)}$, et sont indépendants.

Théorème

(Gayet-Welschinger, 2010)
$\exists A, B > 0$ *tels que*

$$\mathbb{P}(P \in \mathbb{R}_n[X, Y] \text{ a pour zéro une courbe maximale}) \leq An^6 e^{-Bn}$$

On suppose que les coefficients $a_{j,k}$ devant $X^j Y^k$ suivent la loi normale centrée de variance $\frac{(n+2)!}{2j!k!(n-j-k)}$, et sont indépendants.

Théorème

(Gayet-Welschinger, 2010)
$\exists A, B > 0$ *tels que*

$$\mathbb{P}(P \in \mathbb{R}_n[X, Y] \text{ a pour zéro une courbe maximale}) \leq An^6 e^{-Bn}$$

Les courbes maximales se raréfient exponentiellement quand le degré augmente.

Merci de votre attention !

Bibliographie

- *How many zeros of a random polynomial are real ?, A. Eldelman, E. Kostlan, Bull. Amer. Math. Soc., vol* 32, *n*° 1, 1995
- *Sujet d'analyse d'agrégation de mathématiques,* 2006
- *On the average number of real roots of a random algebraic equation, M. Kac, Bull. Amer. Math. Soc, vol* 49, 1943
- *Exponential rarefaction of real curves with many components, D. Gayet, J-Y. Welschinger, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. n*° 113, 2011