## Algèbre linéaire 2 — Année 2019-2020

# Tutorat 2

## Niveau *

**Exercice 1**

Soit $M$ la matrice réelle $3 \times 3$ suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de $M$.
2. Montrer que $M$ est diagonalisable.
3. Déterminer une base de vecteurs propres et $P$ la matrice de passage.
4. On a $D = P^{-1}MP$, pour $k \in \mathbb{N}$ exprimer $M^k$ en fonction de $D^k$, puis calculer $M^k$.

**Exercice 2**

1. Donner un exemple de matrice dans $M_2(\mathbb{R})$, diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais non diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (justifier).
2. Donner un exemple de matrice dans $M_2(\mathbb{R})$ non diagonalisable, ni sur $\mathbb{C}$, ni sur $\mathbb{R}$ (justifier).

**Exercice 3**

Soit $A$ une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I$. Que peut-on dire de $A$ (est-elle diagonalisable, triangularisable, sur $\mathbb{R}$, sur $\mathbb{C}$) ? Même question pour $A$ telle que $(A - I)^2 = 0$.

## Niveau **

**Exercice 4**

Soit $A$ la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que les valeurs propres de $A$ sont 1 et 2.
2. Déterminer les sous-espaces propres de $A$. La matrice $A$ est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer les sous-espaces caractéristiques de $A$.
4. Trigonaliser A (on se contentera de donner la matrice de passage et la matrice triangulaire).

**Exercice 5**

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer le polynôme minimal de $A$. En déduire $A^{-1}$, $A^3$ et $A^5$.

**Exercice 6**

Soit $A$ une matrice $2 \times 2$ à coefficients réels. On suppose que dans chaque colonne de $A$ la somme des coefficients est égale à 1.

1. Soient $(x_1, x_2)$, $(y_1, y_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, on suppose que
$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$
montrer qu'alors
$$y_1 + y_2 = x_1 + x_2.$$
2. Soit le vecteur $\varepsilon = (1, -1)$, montrer que c'est un vecteur propre de $A$. On notera $\lambda$ sa valeur propre.
3. Montrer que si $v$ est un vecteur propre de $A$ non colinéaire à $\varepsilon$, alors la valeur propre associée à $v$ est égale à 1.
4. Soit $e_1 = (1, 0)$. Montrer que la matrice, dans la base $(e_1, \varepsilon)$, de l'endomorphisme associé à $A$ est de la forme
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \lambda \end{pmatrix},$$
où $\alpha \in \mathbb{R}$.

   En déduire que si $\lambda \neq 1$, alors $A$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

## Niveau ***

**Exercice 7**

On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2. Soit $u$ l'application suivante :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & (2X+1)P - (X^2-1)P' \end{array}$$

Montrer que $u$ est bien définie et linéaire. Déterminer les valeurs propres de $u$, et, si c'est possible, diagonaliser $u$.

**Exercice 8**

Soit $f$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $P$ un polynôme. Montrer que $P(f)$ est inversible si et seulement si $P$ et $\chi_f$ sont premiers entre eux.

**Exercice 9**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}(A)$ est pair.