Algèbre linéaire 2 **Année 2019-2020**

Tutorat 2 - Correction

Niveau *

Exercice 1

Soit M la matrice réelle 3×3 suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminons les valeurs propres de M.*

   Ce sont les racines du polynôme caractéristique

$$\begin{aligned}
\chi_M(X) = \begin{vmatrix} -X & 2 & -1 \\ 3 & -2-X & 0 \\ -2 & 2 & 1-X \end{vmatrix} &= -1 \begin{vmatrix} 3 & -2-X \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + (1-X) \begin{vmatrix} -X & 2 \\ 3 & -2-2X \end{vmatrix} && (1) \\
&= (1-X)(X^2+2X-8) && (2) \\
&= (1-X)(X+4)(X-2). && (3)
\end{aligned}$$

   La matrice M admet donc trois valeurs propres distinctes qui sont : $1, 2$, et -4.

2. *Montrons que M est diagonalisable.*

   Nous venons de voir que M, matrice réelle 3×3, admet trois valeurs propres réelles distinctes, cela prouve que M est diagonalisable.

3. *Déterminons une base de vecteurs propres et P la matrice de passage.*

   Les trois sous-espaces propres distincts sont de dimension 1, il suffit de déterminer un vecteur propre pour chacune des valeurs propres.

   $\lambda = 1$: Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x, y, z) est un vecteur propre pour la valeur propre 1 si et seulement si

$$\begin{cases} 2y - z & = x \\ 3x - 2y & = y \\ -2x + 2y + z & = z \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 2y - z & = 0 \\ 3x - 3y & = 0 \\ -2x + 2y & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = y \\ x & = z \end{cases}.$$

   Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e_1}$ de coordonnées $(1, 1, 1)$.

   $\lambda = 2$: Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x, y, z) est un vecteur propre pour la valeur propre 2 si et seulement si

$$\begin{cases} -2x + 2y - z & = 0 \\ 3x - 4y & = 0 \\ -2x + 2y - z & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - 4y & = 0 \\ -2x + 2y - z & = 0 \end{cases}.$$

   Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 2$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e_2}$ de coordonnées $(4, 3, -2)$.

$\lambda = -4$: Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x, y, z) est un vecteur propre pour la valeur propre -4 si et seulement si

$$\begin{cases} -4x + 2y - z & = 0 \\ 3x + 2y & = 0 \\ -2x + 2y + 5z & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - z & = 0 \\ 2y + 3x & = 0 \end{cases}.$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = -4$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e_3}$ de coordonnées $(2, -3, 2)$.

Les vecteurs $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ et $\vec{e_3}$ forment une base de E composée de vecteurs propres, la matrice de passage P est égale à

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

4. *Exprimons M^k en fonction de D^k, puis calculons M^k.*

   On a

$$D = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

   pour $k \in \mathbb{N}$, on a

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^k \end{pmatrix},$$

   et $M^k = PD^kP^{-1}$.

   Calculons donc la matrice P^{-1} : on a $P^{-1} = \dfrac{1}{\det P}(\mathrm{comP})^{\mathrm{t}}$. Or

$$\det P = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -30,$$

   et

$$\mathrm{com}P = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -12 & 0 & 6 \\ -18 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

   d'où

$$P^{-1} = -\frac{1}{30} \begin{pmatrix} 0 & -12 & -18 \\ -5 & 0 & 5 \\ -5 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

   On a donc

$$M^k = PD^kP^{-1} = -\frac{1}{30} \begin{pmatrix} -5.2^{k+2} - 10(-4)^k & -12 + 12(-4)^k & -18 + 5.2^{k+2} - 2(-4)^k \\ -15.2^k - 15(-4)^k & -12 - 18(-4)^k & -18 + 5.2^{k+1} + 3(-4)^k \\ 5.2^{k+1} - 10(-4)^k & -12 + 12(-4)^k & -18 - 5.2^{k+1} - 2(-4)^k \end{pmatrix}$$

Exercice 2

1. *Donnons un exemple de matrice dans $M_2(\mathbb{R})$, diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais non diagonalisable sur $\mathbb{R}$.*

   Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est égal à

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} -X & -1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = X^2 + 1.$$

   Le polynôme caractéristique de A admet deux racines complexes conjuguées distinctes i et $-i$ elle est donc diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais elle ne l'est pas sur $\mathbb{R}$.

2. *Donnons un exemple de matrice dans $M_2(\mathbb{R})$ non diagonalisable, ni sur $\mathbb{C}$, ni sur $\mathbb{R}$.*

   Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Elle est triangulaire donc ses valeurs propres se lisent sur la diagonale : 1 est la seule valeur propre. Si elle était diagonalisable elle serait semblable à la matrice identité I donc égale à la matrice I (car $PIP^{-1} = I$). Ce n'est pas le cas donc elle n'est diagonalisable ni sur $\mathbb{R}$ ni sur $\mathbb{C}$.

Exercice 3

Si A vérifie $A^2 = -I$, cela signifie que le polynôme $P(X) = X^2 + 1$ est annulateur de A. On a $P(X) = (X - i)(X + i)$ donc c'est un polynôme scindé sur $\mathbb{C}$ à racines simples. La matrice est donc diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Par contre le polynôme annulateur n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, or les valeurs propres de A sont à chercher parmi les racines de P (car le polynôme minimal divise P). Comme P n'a pas de racine réelles A n'a pas de valeur propre réelle et n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Si A vérifie $(A - I)^2 = 0$, cela signifie que le polynôme $Q(X) = (X - 1)^2$ est annulateur de A. Ce polynôme est scindé sur $\mathbb{R}$ (et $\mathbb{C}$), donc la matrice est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ (et $\mathbb{C}$). On ne peut rien dire sur la diagonalisabilité, car Q n'est pas à racines simples. Par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont deux matrices vérifiant $Q(A) = 0$, mais l'une est diagonalisable et l'autre non (cf exercice précédent).

Niveau **

Exercice 4

Soit A la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Démontrons que les valeurs propres de A sont 1 et 2.* Ce sont les racines du polynôme caractéristique

$$\begin{aligned} \chi_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 1 & -1 & 1-X \end{vmatrix} &= (1-X) \begin{vmatrix} 2-X & 1 \\ -1 & 1-X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2-X \\ 1 & -1 \end{vmatrix} && (4) \\ &= (1-X)[X^2 - 3X + 3] + (X-1) && (5) \\ &= -(X-1)^2(X-2). && (6) \end{aligned}$$

2. *Déterminons les sous-espaces propres de A.* Pour déterminer l'espace propre associé à la valeur propre 1, on résoud

$$\begin{cases} x+z & = x \\ -x+2y+z & = y \\ x-y+z & = z \end{cases}. \iff \begin{cases} z & = 0 \\ x & = y \end{cases}.$$

Donc $E_1(A) = \mathrm{Vect}\big((1,1,0)\big)$.

Pour déterminer l'espace propre associé à la valeur propre 2, on résoud

$$\begin{cases} x+z & = 2x \\ -x+2y+z & = 2y \\ x-y+z & = 2z \end{cases}. \iff \begin{cases} x & = z \\ y & = 0 \end{cases}.$$

Donc $E_2(A) = \mathrm{Vect}\big((1,0,1)\big)$. La matrice n'est pas diagonalisable car l'espace propre associé à la valeur propre 1 de multiplicité 2 est de dimension 1 ($\mathbb{R}^3 \neq E_1(A) \oplus E_2(A)$).

3. *Déterminons les sous-espaces caractéristiques de A.*

On calcule l'espace caractéristique associé à 1, c'est $N_1(A) = \mathrm{Ker}\big((A-I)^2\big)$ car 1 est de multiplicité 2. On a $(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ donc il faut résoudre

$$\begin{cases} x-y & = 0 \\ -0 & = 0 \\ x-y+ & = 0 \end{cases}. \iff \begin{cases} x & = y \end{cases}.$$

C'est un espace de dimension 2 (il contient $E_1(A)$ par définition), et on a $N_1(A) = \mathrm{Vect}\big((1,1,0),(0,0,1)\big)$.

Comme la valeur propre 2 est de multiplicité 2, on a $N_2(A) = E_2(A)$.

4. *Trigonalisons A.* La matrice de A dans la base $v_1 = (1,1,0), v_2 = (0,0,1), v_3 = (1,0,1)$ est donnée par $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (il suffit de calculer $Av_2 = (1,1,1) = v_1 + v_2$). La matrice de passage est donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Calculer le polynôme minimal de A.*

Le calcul du polynôme caractéristique donne $\chi_A(X) = -(X-1)^2(X+1)$. Les valeurs propres de A sont donc 1 et -1. Les racines du polynôme minimal m_A sont donc exactement 1 et -1, et on doit avoir $m_A | \chi_A$. Les possibilités pour m_A sont donc $(X-1)(X+1)$ ou $(X-1)^2(X+1)$. Il suffit ici de tester si $(X-1)(X+1)$ est annulateur. Le calcul donne $(A-I)(A+I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ donc le polynôme minimal est $m_A = (X-1)^2(X+1) = -\chi_A$.

Déduisons A^{-1}, A^3 et A^5.

On a donc $(A-I)^2(A+I) = 0 = A^3 - A^2 - A + I$, d'où $A(I + A - A^2) = I$, et $A^{-1} = I + A - A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

D'autre part $A^3 = A^2 + A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour A^5 on calcule A^3A^2 ou $A^5 = 2A^2 + A - 2I$ par réductions successives. On obtient $A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6

Soit A une matrice 2×2 à coefficients réels. On suppose que dans chaque colonne de A la somme des coefficients est égale à 1.

1. *Soient (x_1, x_2), (y_1, y_2) deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, on suppose que*

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

montrons qu'alors

$$y_1 + y_2 = x_1 + x_2.$$

Compte tenu des hypothèses, la matrice A est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix},$$

où a et b sont des réels. On a alors

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} ax_1 + bx_2 & = y_1 \\ (1-a)x_1 + (1-b)x_2 & = y_2 \end{cases}.$$

ce qui implique $y_1 + y_2 = x_1 + x_2$.

2. *Montrons que le vecteur $\varepsilon = (1, -1)$ est un vecteur propre de A.*

Si $A\varepsilon = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, alors $y_1 + y_2 = 0$ donc $y_2 = -y_1$ et $A\varepsilon = y_1\varepsilon$, ce qui prouve que ε est un vecteur propre. On peut aussi le voir de la manière suivante

$$A\varepsilon = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b-a \end{pmatrix} = (a-b)\varepsilon.$$

On note $\lambda = (a-b)$ sa valeur propre.

3. *Montrons que si v est un vecteur propre de A non colinéaire à ε, alors la valeur propre associée à v est égale à 1.*

   Soit $v = (x_1, x_2)$ un vecteur propre de A non colinéaire à ε, notons μ sa valeur propre, on a $Av = \mu v$, et, d'après la question 1), on a

   $$x_1 + x_2 = \mu x_1 + \mu x_2 = \mu(x_1 + x_2)$$

   ce qui implique $\mu = 1$ car v est supposé non colinéaire à ε donc $x_1 + x_2 \neq 0$.

4. *Soit $e_1 = (1, 0)$. Montrons que la matrice, dans la base (e_1, ε), de l'endomorphisme associé à A est de la forme*

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \lambda \end{pmatrix},$$

   où $\alpha \in \mathbb{R}$.

   Pour cela on écrit Ae_1 et $A\varepsilon$ dans la base (e_1, ε). On a d'une part $A\varepsilon = \lambda\varepsilon$ et, d'autre part,

   $$\begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (a-1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   D'où la matrice dans la base (e_1, ε)

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \lambda \end{pmatrix}$$

   où $\alpha = a - 1$ et $\lambda = a - b$.

   On en déduit que si $\lambda \neq 1$, alors A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Le polynôme caractéristique de A est égal à $(1 - X)(\lambda - X)$, ainsi, si $\lambda \neq 1$, il admet deux racines distinctes ce qui prouve que A est diagonalisable.

Niveau ***

Exercice 7

On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2. Soit u l'application suivante :

$$u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & (2X+1)P - (X^2-1)P' \end{array}$$

Montrons que u est bien définie et linéaire.

Il faut vérifier que l'image de u est bien incluse dans $\mathbb{R}_2[X]$. Si on note aX^2 le terme de degré 2 de P (possiblement nul), alors le terme de plus haut degré de $u(P)$ est $2aX^3 - 2aX^3 = 0$ donc $u(P)$ est bien de degré au plus 2. De plus u est linéaire par linéarit de la dérivation et de la multiplication par un polynôme.

Déterminons les valeurs propres de u, et, si c'est possible, diagonalisons u.

On trouve la matrice de u dans la base canonique $(1, X, X^2)$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Le calcul du polynôme caractéristique donne $-(X-1)(X+1)(X-3)$ donc les valeurs propres sont $1, -1, 3$, donc u est diagonalisable et le calcul des espaces propres donne $E_1(u) =$

$\mathrm{Vect}\big((1,0,-1)\big)$, $E_{-1}(u) = \mathrm{Vect}\big((1,-2,1)\big)$, $E_3(u) = \mathrm{Vect}\big((1,2,1)\big)$. L'endomorphisme u se diagonalise donc dans la base $(1-X^2, 1-2X+X^2, 1+2X+X^2)$ sous la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 8

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et P un polynôme. Montrons que $P(f)$ est inversible si et seulement si P et χ_f sont premiers entre eux.

Si P et χ_f sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe deux polynômes U et V tels que $UP + V\chi_f = 1$. En prenant la valeur en f et puisque que $\chi_f(f) = 0$, on obtient $P(f) \circ U(f) = U(f) \circ P(f) = Id$. $P(f)$ est donc un automorphisme de E.

Réciproquement, si P et χ_f ne sont pas premiers entre eux, P et χ_f ont une racine commune λ dans $\mathbb{C}$. Soit A est la matrice de f dans une base donnée (si $\mathbb{K}$ n'est pas $\mathbb{C}$ l'utilisation de la matrice est indispensable). On a $P(A) = (A - \lambda I)Q(A)$ pour un certain polynôme Q. La matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible car λ est valeur propre de A et donc $P(A)$ n'est pas inversible ($\det(P(A)) = \det(A - \lambda I)\det Q(A) = 0$).

Exercice 9

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrons que $\mathrm{rg}A$ *est pair.*

Les hypothses se traduisent en le fait que $P(X) = X^3 + X^2 + X$ est un polynôme annulateur de A. $P(X)$ se factorise en $X(X^2 + X + 1) = X(X - j)(X - j^2)$ où j est la racine 3-ième de l'unité $e^{2i\pi/3}$. Les valeurs propres de A appartiennent donc à l'ensemble $\{0, j, j^2\}$. (Remarque : comme A est réelle, son polynôme caractéristique est à coefficients réels donc si j est valeur propre, son conjugué j^2 l'est aussi).

Supposons que 0 n'est pas valeur propre de A. A n'a donc pas de valeur propre réelle donc son polynôme caractéristique χ_A n'a pas de racine réelle (on peut même écrire $\chi_A(X) = (X^2+X+1)^m$ où $2m = n$), cela implique qu'il est nécéssairemnet de degré pair. Le fait que 0 de soit pas valeur propre de A signifie que la dimension de l'espace $\mathrm{Ker}(A)$ est nulle, autrement dit $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$. Donc par le théorème du rang $rg(A) = \dim(\mathbb{R}^n) = n = \deg(\chi_A)$ est pair.

Si 0 est valeur propre de A, c'est la seule valeur propre rélle donc χ_A s'écrit $X^r(X^2+X+1)^m$ et on a $\deg(\chi_A) = n = r + 2m$. D'autre part, A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ car P est un polnôme annulateur scind à racines simples sur $\mathbb{C}$. Donc la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre 0 est égale à la multiplicité de la valeur propre, c'est-à-dire $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = r$. Par le thórème du rang on obtient finalement que $rg(A) = n - \dim(\mathrm{Ker}(A)) = 2m$ est pair.