

Polycopié sur la :

**TRANSFORMÉE DE FOURIER ET SES  
APPLICATIONS**

Edoardo Provenzi

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Une très brève introduction à l'analyse de Fourier</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Les résultats fondamentaux des espaces vectoriels complexes avec produit scalaire</b>	<b>8</b>
2.1	Espaces vectoriels réels et complexes avec produit scalaire . . . . .	9
2.2	Norme et distance associées à un produit scalaire . . . . .	11
2.3	Familles orthogonales et orthonormales dans des espaces vectoriels avec produit scalaire . . . . .	12
2.4	Orthogonalité et indépendance linéaire . . . . .	13
2.5	La projection orthogonale dans les espaces vectoriels avec produit scalaire . . .	15
2.5.1	Existence d'une base orthonormale : la procédure itérative de Gram-Schmidt . . . . .	18
2.6	Les propriétés fondamentales d'une base orthonormale et orthogonale . . . . .	19
2.7	Opérateurs entre espaces vectoriels avec produit scalaire : leurs propriétés et leur représentation matricielle . . . . .	21
2.7.1	Opérateurs linéaires et matrices . . . . .	21
2.7.2	Changement de la base dans un espace vectoriel . . . . .	24
2.8	Opérateurs qui conservent le produit scalaire . . . . .	25
2.9	Valeurs et vecteurs propres d'un opérateur linéaire qui conserve le produit scalaire et matrices unitaires . . . . .	26
2.9.1	Le cas réel . . . . .	27
2.10	Rappel sur la diagonalisation des endomorphismes et matrices . . . . .	28
<b>3</b>	<b>La transformée de Fourier discrète « DFT »</b>	<b>30</b>
3.1	L'espace $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ et sa base canonique . . . . .	30
3.1.1	La base orthogonale des exponentiels complexes de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . . . . .	33
3.2	La base orthonormale de Fourier de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . . . . .	37
3.3	La base orthogonale de Fourier de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . . . . .	38
3.4	Les coefficients de Fourier et la transformée de Fourier discrète (DFT) . . . . .	40
3.4.1	La transformée de Fourier inverse (IDFT) . . . . .	42
3.4.2	Définition de DFT et IDFT avec la base orthonormale de Fourier . . . . .	44
3.4.3	La base (orthonormale) de Fourier réelle . . . . .	45
3.5	Interprétation matricielle de la DFT et IDFT . . . . .	46
3.5.1	« FFT » : Fast Fourier Transform . . . . .	48
3.6	La transformée de Fourier dans le traitement des signaux . . . . .	49

3.6.1	La formule de synthèse des signaux 1D : décomposition sur la base des harmoniques . . . . .	49
3.6.2	Signification des coefficients de Fourier et spectres d'un signal 1D . . . .	50
3.6.3	La formule de synthèse et les coefficients de Fourier de l'impulsion unitaire $\delta$ . . . . .	52
3.6.4	Hautes et basses fréquences $m$ dans la formule de synthèse . . . . .	53
3.6.5	Visualisation du spectre d'amplitude . . . . .	57
3.6.6	Filtrage de signaux dans la représentation fréquentielle . . . . .	58
3.6.7	L'opérateur de multiplication et sa représentation matricielle diagonale .	59
3.6.8	Le multiplicateur de Fourier et l'égalisateur graphique . . . . .	59
3.7	Propriétés de la DFT . . . . .	61
3.7.1	La périodicité de $\hat{z}$ et $\check{z}$ . . . . .	61
3.7.2	DFT et translation (invariance du spectre par translations) . . . . .	62
3.7.3	DFT et conjugaison . . . . .	66
3.7.4	DFT et convolution . . . . .	67
3.8	La DFT et les opérateurs stationnaires . . . . .	71
3.8.1	La DFT et la diagonalisation des opérateurs stationnaires . . . . .	73
3.8.2	Matrices circulantes . . . . .	75
3.8.3	La caractérisation exhaustive des opérateurs stationnaires . . . . .	76
3.8.4	Filtres passe-haut, passe-bas, passe-bande . . . . .	80
3.8.5	La caractérisation des opérateurs stationnaires via les opérateurs de translation . . . . .	81
3.8.6	Analyse fréquentielle des opérateurs de dérivation (discrète) première et seconde . . . . .	82
3.9	La transformée de Fourier bidimensionnelle (DFT 2D) . . . . .	85
3.9.1	Représentation matricielle de la DFT 2D : produit de Kronecker vs. itération de deux DFT 1D . . . . .	88
3.9.2	Les propriétés de la DFT 2D . . . . .	89
3.9.3	La DFT 2D et les opérateurs stationnaires . . . . .	91
3.9.4	Les opérateurs gradient et Laplacien et leurs action sur les images numériques . . . . .	93
3.9.5	Visualisation du spectre d'amplitude en 2D . . . . .	94
3.9.6	Un exemple remarquable de filtrage d'une image numérique dans l'espace de Fourier : le floutage . . . . .	95
<b>4</b>	<b>La série de Fourier</b> . . . . .	<b>99</b>
4.1	Les espaces de Hilbert . . . . .	99
4.2	Deux espaces de Hilbert importants pour la théorie de Fourier . . . . .	100
4.2.1	$\ell^2(\mathbb{Z})$ : l'espace de Hilbert des suites de carré sommable, ou signaux discrets d'énergie finie . . . . .	100
4.2.2	$L^2([a, b])$ : l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable, ou signaux continues d'énergie finie . . . . .	101
4.3	La relation entre $\ell^2(\mathbb{Z})$ et les systèmes orthonormaux (SON) d'un espace de Hilbert : le théorème de Fisher-Riesz et l'inégalité de Bessel . . . . .	102
4.4	Les systèmes orthonormaux complètes (SONC) dans un espace de Hilbert et leurs propriétés principales . . . . .	103
4.5	La série de Fourier dans $L^2[0, 2\pi]$ . . . . .	105

4.5.1	La transformée de Fourier sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ et sur $L^2[0, 2\pi]$ . . . . .	108
4.5.2	SONC de Fourier dans les espaces de Hilbert $L^2(\mathbb{T})$ et $L^2[a, b]$ . . . . .	109
4.6	Approximation de la série de Fourier en $L^2(\mathbb{T})$ avec la DFT . . . . .	110
4.7	Le SONC et la série de Fourier réelle . . . . .	112
4.8	Convergence ponctuelle de la série de Fourier réelle : le théorème de Dirichlet . . . . .	114
4.8.1	Le phénomène de Gibbs et les sommes de Cesàro . . . . .	115
4.8.2	Le lemme de Riemann-Lebesgue et la vitesse de convergence à 0 des coefficients de Fourier . . . . .	115
<b>5</b>	<b>La transformée de Fourier pour fonctions non-périodiques</b> . . . . .	<b>120</b>
5.1	Transformée de Fourier et transformée de Fourier inverse pour une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ . . . . .	120
5.2	La convolution dans $L^1(\mathbb{R})$ et un exemple remarquable : la convolution avec une Gaussienne . . . . .	121
5.3	Propriétés de la transformée de Fourier . . . . .	123
5.3.1	La localisation des signaux et son effet sur le spectre . . . . .	125
5.4	Le théorème d'échantillonnage de Shannon, Nyquist et Whittaker . . . . .	126
5.4.1	La fréquence de Nyquist : « aliasing » et « oversampling » . . . . .	128
5.5	Application de la transformée de Fourier à la résolution d'équations différentielles en dérivées ordinaires et partielles . . . . .	129
5.5.1	Un exemple de EDO résolue avec la transformée de Fourier . . . . .	129
5.5.2	Transformée de Fourier et EDPs . . . . .	130
5.5.3	Résolution de l'EDP de la propagation de la chaleur avec la transformée de Fourier . . . . .	131

# Chapitre 1

## Une très brève introduction à l'analyse de Fourier

Le sujet de ce cours est l'étude de la théorie et de certaines applications d'une transformation, dite « de Fourier », devenue fondamentale dans la science moderne.

Le mathématicien qui a inventé cette transformation est Jean Baptiste **Joseph Fourier**, né le 21 mars **1768** à *Auxerre* et mort le 16 mai **1830** à *Paris*.



FIGURE 1.1 – Gravure de Fourier faite par Julien Léopold Boilly (Wikipedia).

Fourier<sup>1</sup> a étudié à l'École Normale Supérieure, où il a été l'élève de mathématiciens extraordinaires comme Joseph-Louis **Lagrange** (Turin 1736 – Paris 1813), qui a été son

---

1. *Curiosité* : on doit à Fourier l'introduction de la notation  $\sum$  pour exprimer une somme, écrite dans un mémoire de 1820, avant cette notation on utilisait les points de suspension pour exprimer les sommes finies.

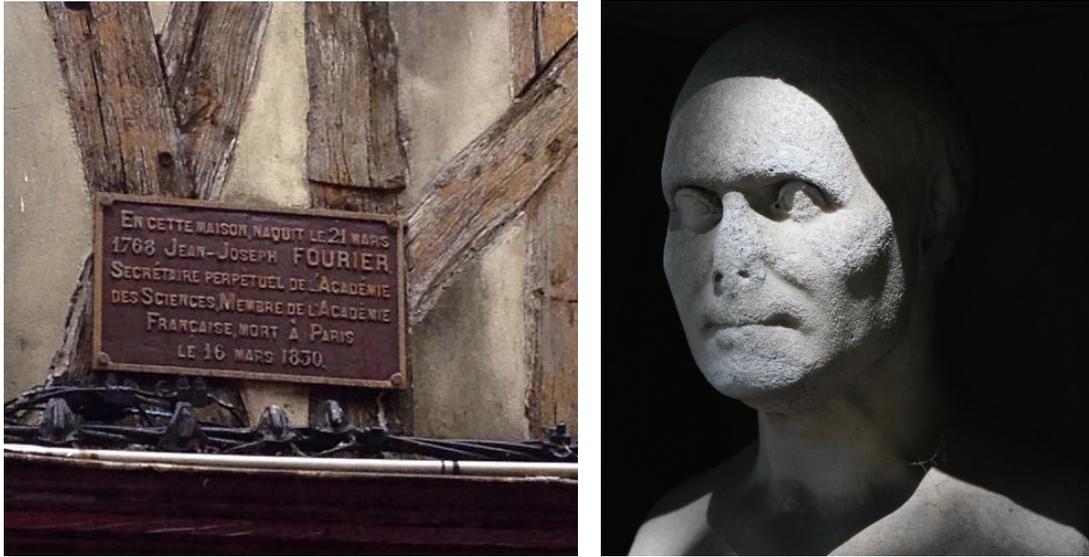


FIGURE 1.2 – *Gauche* : Maison à Auxerres où Fourier est né (image personnelle). *Droite* : Tombe de Fourier dans la Division 18 au cimetière du Père-Lachaise à Paris (Wikipedia).

superviseur de doctorat, Gaspard **Monge** (Beaune 1746 – Paris 1818) et Pierre-Simon de **Laplace** (Beaumont-en-Auge 1749 – Paris 1827).

À **Grenoble**, Fourier développe ses expériences sur la propagation de la chaleur et, en **1822**, il publie un des mémoires les plus influents de la mathématique moderne : **La théorie analytique de la chaleur**.

Dans le mémoire, il formule l’hypothèse (très audacieuse pour cette époque) que la solution de l’équation qui gouverne la diffusion de la chaleur peut s’écrire comme une série de sin et cos ou des exponentielles complexes, comme ceci :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_k \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_k \sin(nx)$$

ainsi que :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{inx}$$

où  $f(x)$  est une fonction périodique de période  $2\pi$ . On verra que les coefficients  $a_n, b_n, n \in \mathbb{N}$ , et  $\gamma_n, n \in \mathbb{Z}$  s’appellent **coefficients de Fourier** et ils peuvent s’écrire explicitement comme des intégrales. Ces intégrales représentent des **produits scalaires** dans un espace fonctionnel qu’on appellera **espace de Hilbert**.

Quand  $f$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  et n’est pas périodique, alors la série de Fourier doit être remplacée par une transformation intégrale appelée **transformée de Fourier** :

$$f(x) \mapsto \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

L’importance de la série et de la transformée de Fourier réside dans le fait que les nombres entiers  $n$  (dans le cas de la série) et la quantité réelles  $\omega$  (dans le cas de l’intégrale), représentent

les **fréquences** des ondes dont la superposition reproduit la fonction  $f$  (dans un sens qu'on définira dans le cours).

La figure 1.3 montre l'approximation de la fonction qui représente un signal triangulaire périodique avec un nombre croissant de termes de la série de Fourier.

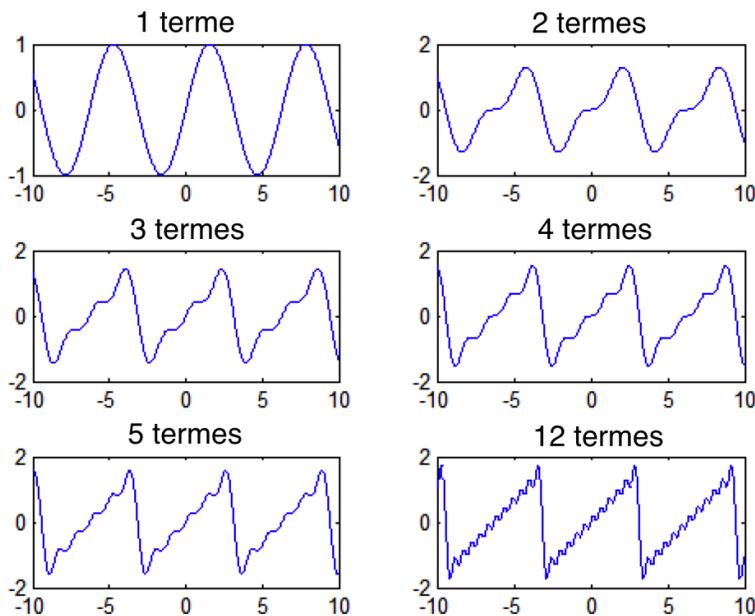


FIGURE 1.3 – Approximation d'un signal triangulaire périodique avec un nombre croissant de termes de la série de Fourier.

L'analyse de la convergence des séries de Fourier et des classes de fonctions pour lesquelles on peut correctement définir la transformée de Fourier, est un problème très compliqué. C'est pourquoi, Lagrange et Laplace ont critiqué très fortement les idées de Fourier et que, d'une manière générale, la communauté mathématique est restée longtemps très *sceptique* devant ses idées.

Néanmoins, en **1829**, son thésard, le grand mathématicien allemand Johann Peter Gustav Lejeune **Dirichlet** (Düren 1805 – Göttingen 1859), arrive à démontrer un ensemble de conditions pour la convergence de la série de Fourier.

Le résultat de Dirichlet a ouvert la porte à l'application de la théorie de Fourier à une grande quantité de domaines différents. Les applications qu'on verra seront les suivantes :

- **Analyse fréquentielle des signaux** (1D : son, 2D : images). Un des champs d'application où la théorie de Fourier est la plus utilisée, est le **traitement des signaux**. On verra, parmi beaucoup d'autres applications, comment analyser une classe très importante d'opérateurs linéaires (les *opérateurs stationnaires*) dans le cadre de la théorie de Fourier et comment concevoir des *filtres* pour modifier le contenu fréquentiel du son et des images numériques. Notamment, on verra le principe de fonctionnement de l'*égalisateur graphique* utilisé par les DJ ;
- **Résolution des équations différentielles** en dérivées ordinaires et partielles (EDO et EDP) : avec la transformée de Fourier, on a la possibilité de *transformer certaines*

*équations différentielles en équations algébriques*, qui sont beaucoup plus simples à résoudre. On verra l'application de cette technique lors de la résolution de l'équation de quatre EDP, qu'on trouve souvent dans les applications :

- l'EDP de la chaleur (on verra la technique originale développée par Fourier !);
- l'EDP des ondes, ou de D'Alembert ;
- l'EDP du potentiel, ou de Laplace ;
- l'EDP du transport.

On va étudier la théorie de Fourier dans trois situations différentes :

- **Transformée de Fourier pour suites  $N$ -périodiques**,  $N \in \mathbb{N}$ , de nombres complexes. Dans ce cas, on parle de la **transformée de Fourier discrète** (ou DFT), qui est toujours la **transformation implémentée par les ordinateurs** quand on analyse des signaux numériques.
- **Transformée de Fourier de fonctions périodiques**, qui met en relation une classe de fonctions périodiques (d'énergie finie) avec la suite des coefficients de Fourier.
- **Transformée de Fourier de fonctions intégrables sur  $\mathbb{R}$  et non périodiques**. Dans ce cas, la transformation de Fourier est écrite via une intégrale. C'est grâce à cette transformation intégrale qu'on pourra résoudre les EDP mentionnées ci-dessus.

Pour chacune de ces transformées, on définira un **espace fonctionnel** de travail, c'est-à-dire un ensemble de fonctions avec des propriétés qui nous permettront de développer la théorie de Fourier dans les trois situations décrites avant.

La définition de ces espaces fonctionnels nécessite des concepts comme le produit scalaire dans les espaces vectoriels complexes et des notions de topologie qu'on introduira dans les chapitres suivants.

On commence par rappeler les définitions et les résultats plus importantes de la théorie des espaces vectoriels complexes avec produit scalaire et de leurs bases orthonormales.

La raison de cet intérêt est très simple à justifier : la représentation matricielle de la DFT est donnée par une matrice (unitaire) de passage de la base canonique à la « base de Fourier ». Le but du chapitre suivant est de donner les compétences pour comprendre la phrase qu'on vient d'écrire et pour savoir travailler avec la DFT.

La référence principale pour les chapitres 2 et 3 de ces polycopiés est le très clair livre de Michael W. **Frazier** : « *An Introduction to Wavelets Through Linear Algebra* », Springer, 1999, un complément à ce livre est le bouquin de M.W. **Wong** : « *Discrete Fourier Analysis* ». Les chapitres 4 et 5 sont, par contre, un mélange de résultats qui viennent de plusieurs livres. Une référence pour ces chapitres peut être l'excellent livre de Andres **Vretblad** : « *Fourier Analysis and Its Applications* », Springer, 2003.

## Chapitre 2

# Les résultats fondamentaux des espaces vectoriels complexes avec produit scalaire

La théorie de Fourier en dimension finie repose sur la construction d'une base dite **orthonormale** dans un espace vectoriel opportun. Cette base est constituée par des exponentielles complexes. L'orthonormalité est liée au concept de produit scalaire.

Il est donc impératif d'introduire les concepts les plus importants relatifs aux espaces vectoriels complexes avec produit scalaire avant de commencer la théorie de Fourier. Pour passer le plus rapidement possible à l'analyse de la théorie de Fourier, on reproduira seulement les preuves les plus simples des théorèmes qu'on verra dans ce chapitre.

On commence par rappeler que, dans les espace Euclidiens réels  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ , le produit scalaire entre deux vecteurs  $v, w$  est défini comme le nombre réel

$$v \bullet w = \langle v, w \rangle = |v||w| \cos(\theta),$$

où  $\theta$  est l'angle le plus petit entre  $v$  et  $w$  et  $||$  représente le module.

On rappelle aussi que, à travers du produit scalaire, on peut définir la projection orthogonale du vecteur  $v$  dans la direction définie par le vecteur  $w$  : la *projection scalaire* de  $v$  en direction  $w$  est définie comme  $|v| \cos(\theta) = \frac{\langle v, w \rangle}{|w|}$  et la *projection vectorielle* est définie comme  $|v| \cos(\theta) \frac{w}{|w|} = \frac{\langle v, w \rangle}{|w|^2} w$ .

La définition générale de produit scalaire et de projection orthogonale dans les espaces vectoriels peut être pensée comme une extension des définition précédentes pour des espaces où notre capacité de représentation graphique des vecteurs devient impossible.

La représentation graphique sera remplacée par la vérification que toutes les propriétés algébriques qu'on attends d'un produit scalaire et d'une projection sont vérifiées. Cette forme de généraliser des concepts « intuitifs » en dimension 2 et 3 est classique dans les mathématiques.

## 2.1 Espaces vectoriels réels et complexes avec produit scalaire

On commence en rappelant la définition d'espace vectoriel réel avec produit scalaire.

**Déf. 2.1.1** Soit  $V$  un espace vectoriel réel de dimension finie  $n < +\infty$ . On dit que le couple  $(V, \langle, \rangle)$  est un **espace vectoriel réel avec produit scalaire** si  $\langle, \rangle$  est une application :

$$\begin{aligned} \langle, \rangle : V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\longmapsto \langle v, w \rangle, \end{aligned}$$

telle que  $\langle, \rangle$  est :

1. **bilinéaire**, i.e.<sup>1</sup> linéaire relativement à chaque argument (l'autre étant fixé) :

$$\langle v_1 + v_2, w_1 + w_2 \rangle = \langle v_1, w_1 \rangle + \langle v_1, w_2 \rangle + \langle v_2, w_1 \rangle + \langle v_2, w_2 \rangle$$

$\forall v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$ , et

$$\langle \alpha v, \beta w \rangle = \alpha \langle v, \beta w \rangle = \beta \langle \alpha v, w \rangle = \alpha \beta \langle v, w \rangle$$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall v, w \in V$  ;

2. **symétrique** :  $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle, \forall v, w \in V$  ;

3. **définie positive** :

$$\begin{cases} \langle v, v \rangle \geq 0 & \forall v \in V; \\ \langle v, v \rangle = 0 & \implies v = 0_V, \text{ le vecteur nul de l'espace vectoriel } V. \end{cases}$$

L'exemple le plus important d'espace vectoriel avec produit scalaire réel est :  $(\mathbb{R}^n, \langle, \rangle)$ , où  $\langle, \rangle$  est le **produit scalaire Euclidien réel**, qui est défini ainsi : soient  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ,  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  écrits avec leurs composantes par rapport à une base  $(b_i)_{i=1}^n$  de  $\mathbb{R}^n$  fixée, alors le produit scalaire Euclidien réel entre  $v$  et  $w$  est :

$$\langle v, w \rangle \equiv \sum_{i=1}^n v_i w_i = v^t \cdot w = v \cdot w^t,$$

où, dans les deux dernières équations, on a écrit avec  $v^t$  et  $w^t$  les vecteurs transposés de  $v$  et  $w$ , et donc on revient à un produit entre un vecteur ligne et un vecteur colonne de la même longueur  $n$ .

La définition de produit scalaire dans des espaces vectoriels complexes est très similaire à la définition dans le cas réel, mais il y a des différences importantes.

On commence par observer que, si  $V$  est un espace vectoriel *complexe*, alors *il ne peut pas exister une transformation bilinéaire et définie positive* sur  $V \times V$ . En fait, dans ce cas on aurait, pour tout vecteur  $v \in V$ ,

$$\langle iv, iv \rangle = i^2 \langle v, v \rangle = -\langle v, v \rangle \leq 0 \text{ car } \langle v, v \rangle \geq 0 \text{ par positivité.}$$

---

1. i.e. est l'abréviation de « id est », l'expression latine équivalente à « c'est-à-dire ». Cette écriture est très utilisée dans les livres de mathématiques.

On verra que, pour définir une norme à partir d'un produit scalaire complexe, est indispensable la propriété de positivité. Donc, on fait le choix de renoncer à la bilinéarité.

On peut penser de demander l'antilinearité, mais elle a le même problème que la bilinéarité, où on dit que  $\langle, \rangle$  est antilinéaire si <sup>2</sup> :

$$\langle \alpha v, \beta w \rangle = \alpha^* \beta^* \langle v, w \rangle$$

et donc  $\langle iv, iv \rangle = (-i)(-i)\langle v, v \rangle = i^2 \langle v, v \rangle = -\langle v, v \rangle^2 \leq 0$ , comme pour le cas de la bilinéarité.

Une simple analyse montre que, pour éviter de perdre la positivité, il suffit de demander la linéarité par rapport à une variable et l'antilinearité par rapport à l'autre.

Cette propriété est dite **sesquilinearité**, i.e. linéaire selon l'une des variables et antilinéaire par rapport à l'autre variable <sup>3</sup>.

Le choix de la variable linéaire et antilinéaire est totalement arbitraire. L'antilinearité relative à la deuxième variable est la *convention* utilisée parmi les *mathématiciens*, tandis que l'antilinearité relative à la première variable est la *convention* typiquement adoptée parmi les *physiciens*.

Pour uniformiser la notation, on considèrera dorénavant toujours la convention utilisée par les mathématiciens, i.e.  $\langle \alpha v, \beta w \rangle = \alpha \beta^* \langle v, w \rangle$ .

Maintenant il est important d'observer que *la sesquilinearité n'est pas compatible avec la symétrie*, en fait, si les deux propriétés sont vérifiées, alors  $\langle v, \alpha w \rangle = \alpha^* \langle v, w \rangle$ , mais aussi  $\langle v, \alpha w \rangle = \langle \alpha w, v \rangle = \alpha \langle w, v \rangle = \alpha \langle v, w \rangle$ . Donc  $\langle v, \alpha w \rangle = \alpha^* \langle v, w \rangle = \alpha \langle v, w \rangle$  et cela peut être vrai si et seulement si  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Par conséquent,  $\langle, \rangle$  ne peut pas être simultanément sesquilinéaire et symétrique si on veut travailler avec des vecteurs qui appartiennent à un espace vectoriel complexe.

L'exemple qu'on vient d'examiner montre que, au lieu de la symétrie, on doit demander la propriété suivante pour toute couple de vecteurs  $v, w$  :  $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle^*$ , i.e. que l'échange de l'ordre des vecteurs dans  $\langle, \rangle$  soit équivalent à la conjugaison complexe. Une transformation qui a cette propriété est dite *hermitienne* <sup>4</sup>.

Ces observations justifient complètement la définition suivante.

**Déf. 2.1.2** Soit  $V$  un espace vectoriel complexe de dimension finie  $n < +\infty$ , i.e. le champ d'où on prend les coefficients scalaires pour les combinaisons linéaires est  $\mathbb{C}$  et non pas  $\mathbb{R}$ . On dit que le couple  $(V, \langle, \rangle)$  est un **espace vectoriel complexe avec produit scalaire** si  $\langle, \rangle$  est une application :

$$\begin{aligned} \langle, \rangle : V \times V &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (v, w) &\longmapsto \langle v, w \rangle, \end{aligned}$$

### 1. *sesquilinéaire* :

$$\langle v_1 + v_2, w_1 + w_2 \rangle = \langle v_1, w_1 \rangle + \langle v_1, w_2 \rangle + \langle v_2, w_1 \rangle + \langle v_2, w_2 \rangle$$

$\forall v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$ , et

$$\xrightarrow[\text{Linéarité 1ère variable}]{\text{Anti-linéarité 2ème variable}} \langle \alpha v, \beta w \rangle = \alpha \langle v, \beta w \rangle = \beta^* \langle \alpha v, w \rangle = \alpha \beta^* \langle v, w \rangle$$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall v, w \in V$  ;

---

2. Les symboles  $z^*$  et  $\bar{z}$  représentent la **conjugaison complexe**, i.e. si  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z = a + ib$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , alors  $z^* = \bar{z} = a - ib$ .

3. Sesqui vient du latin *semisque*, qui veut dire *une fois et demi*, on utilise cette nomenclature pour souligner qu'on n'a pas deux fois la linéarité, mais une fois « et demi », dû à la présence de la conjugaison complexe.

4. Charles Hermite, mathématicien français, 1822 Dieuze - 1901 Paris.

2. *hermitien* :  $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle^*$ ,  $\forall v, w \in V$  ;

3. *définie positive* :

$$\begin{cases} \langle v, v \rangle \geq 0 & \forall v \in V; \\ \langle v, v \rangle = 0 & \implies v = 0_V, \text{ le vecteur nul de l'espace vectoriel } V. \end{cases}$$

Si on considère la somme de  $n$  vecteurs au lieu de deux, la sesquilinearité implique les formules suivantes, qu'on trouvera souvent dans le cours :

$$\boxed{\left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, w \right\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle v_i, w \rangle ;} \quad (2.1)$$

$$\boxed{\left\langle v, \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i^* \langle v, w_i \rangle .} \quad (2.2)$$

L'exemple le plus important d'espace vectoriel avec produit scalaire complexe est  $(\mathbb{C}^n, \langle, \rangle)$ , où  $\langle, \rangle$  est le **produit scalaire Euclidien complexe**, qui est défini ainsi : soient donnés deux vecteurs de  $\mathbb{C}^n$ ,  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  et  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ , écrits avec leurs composantes par rapport à une base  $(b_i)_{i=1}^n$  de  $\mathbb{C}^n$  fixée, alors le produit scalaire Euclidien complexe entre  $v$  et  $w$  est :

$$\langle v, w \rangle \equiv \sum_{i=1}^n v_i w_i^* = v \cdot (w^*)^t = v^t \cdot w^*.$$

## 2.2 Norme et distance associées à un produit scalaire

Si  $(V, \langle, \rangle)$  est un espace vectoriel avec produit scalaire (réel ou complexe) alors on peut définir une norme sur  $V$  comme ça :

$$\begin{aligned} \| \cdot \| : V &\rightarrow \mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty) \\ v &\rightarrow \|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}. \end{aligned}$$

On note que  $\|v\|$  est bien défini car  $\langle v, v \rangle \geq 0 \forall v \in V$ .

On appelle un vecteur  $v \in V$  tel que  $\|v\| = 1$  un **vecteur unitaire**.

Exemples remarquables :

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^n, \langle, \rangle) : \|v\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} ; \\ (\mathbb{C}^n, \langle, \rangle) : \|v\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i v_i^*} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2} , \end{aligned}$$

étant donné que, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z z^* = |z|^2$ , où, si  $z = a + ib$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  : *module* de  $z$ .

À partir d'une norme, on peut toujours définir une **distance** sur  $V$  :

$$d(v, w) = \|v - w\| = \sqrt{\langle v - w, v - w \rangle}, \quad \forall v, w \in V.$$

Donc, un espace vectoriel avec produit scalaire (réel ou complexe) est automatiquement aussi un espace vectoriel normé et un espace vectoriel avec distance, avec la norme et la distance engendrées par le produit scalaire lui même. Le contraire, en général, n'est pas vrai.

Les **propriétés de la norme** sont les suivantes :  $\forall v, w \in V, \forall \alpha \in \mathbb{C}$

1.  $\|v\| \geq 0, \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0_V$  ;
2.  $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$  : **Inégalité de Cauchy-Schwarz** ;
3.  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$  : **Inégalité Triangulaire** ;
4.  $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$ .

Par conséquent, les **propriétés de la distance** sont les suivantes :  $\forall v, w, u \in V$

1.  $d(v, w) \geq 0, d(v, w) = 0 \Leftrightarrow v = w$  ;
2.  $d(v, w) = d(w, v)$ , symétrie ;
3.  $d(v, u) \leq d(v, w) + d(w, u)$  : **Inégalité Triangulaire**.

## 2.3 Familles orthogonales et orthonormales dans des espaces vectoriels avec produit scalaire

La définition « géométrique » d'un produit scalaire entre deux vecteurs  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$  montre que leur produit scalaire est nul si et seulement si  $\theta$ , le plus petit angle entre eux, est  $\pi/2$  (ou  $3\pi/2$ ), car dans ce cas  $\cos(\theta) = 0$ , comme montré dans la figure 2.1.

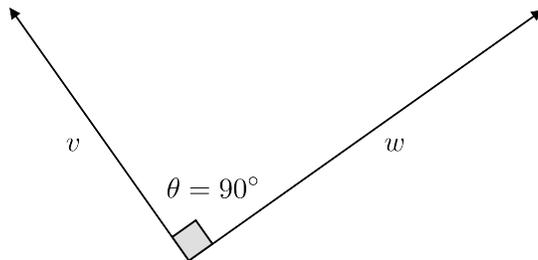


FIGURE 2.1 – Orthogonalité entre deux vecteurs du plan  $\mathbb{R}^2$ .

Dans les espaces vectoriels plus compliqués (par exemple les espaces de polynômes) ou même dans les espaces vectoriels Euclidiens de dimension supérieure à 3, on ne peut plus visualiser les vecteurs et donc on doit *axiomatiser* leur orthogonalité à travers de la nullité de leur produit scalaire.

**Déf. 2.3.1** Soit  $(V, \langle, \rangle)$  un espace vectoriel avec produit scalaire réel ou complexe. Soit  $F = \{v_1, \dots, v_n\}$  une famille de vecteurs de  $V$ , alors :

- $F$  est une **famille orthogonale** de vecteurs si chaque couple de vecteurs différents a pour produit scalaire 0 :

$$\begin{aligned} \langle v_i, v_j \rangle &= 0 \quad \forall i \neq j; \\ &\Updownarrow \\ v_i &\perp v_j \end{aligned}$$

- $F$  est une famille orthonormale si elle est orthogonale et, en plus  $\|v_i\| = 1 \quad \forall i$ .

Une famille orthonormale est, donc, une famille de vecteurs unitaires et orthogonaux entre eux. Par conséquent, on peut la caractériser avec la propriété suivante :

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \text{Famille orthonormale}$$

$\delta_{i,j}$  est dit **symbole de Kronecker** (Leopold Kronecker (Liegnitz 1823 – Berlin 1891)).

On note que chaque vecteur  $v \in V$  peut être **normalisé** pour devenir un vecteur unitaire simplement via la division par sa norme : si on écrit  $\hat{v} = \frac{v}{\|v\|}$ , alors

$$\|\hat{v}\| = \left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = \frac{1}{\|v\|} \|v\| = 1$$

$\uparrow$   
 $\frac{1}{\|v\|} \in \mathbb{R}$

On observe aussi que, en général

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= \|u\|^2 + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \|v\|^2. \end{aligned}$$

C'est donc clair que :

$$u \perp v \iff \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

qui est une généralisation du **théorème de Pythagore**.

## 2.4 Orthogonalité et indépendance linéaire

La condition d'orthogonalité est plus forte que l'indépendance linéaire : en fait, **toute famille orthogonale est libre**.

**Théorème 2.4.1** Soit  $F$  une famille orthogonale de  $(V, \langle, \rangle)$ ,  $F = \{v_1, \dots, v_n\}$ ,  $v_i \neq 0 \forall i$ , alors  $F$  est libre.

*Preuve.* On doit démontrer l'indépendance linéaire des  $v_i$ , i.e. :  $\sum_{i=1}^n a_i v_i = 0 \Rightarrow a_i = 0 \forall i$ . Pour le prouver, on va calculer le produit scalaire entre la combinaison linéaire  $\sum_{i=1}^n a_i v_i$  et un vecteur quelconque  $v_j$  avec  $j \in \{1, \dots, n\}$  :

$$\left\langle \sum_{i=1}^n a_i v_i, v_j \right\rangle \stackrel{(2.1)}{=} \sum_{i=1}^n a_i \langle v_i, v_j \rangle \stackrel{\langle v_i, v_j \rangle \neq 0 \Leftrightarrow i=j}{=} a_j \langle v_j, v_j \rangle = a_j \|v_j\|^2.$$

Par hypothèse, aucun vecteur de  $F$  est nul, donc, l'hypothèse que  $\sum_{i=1}^n a_i v_i = 0$  implique que :

$$\underbrace{\langle 0, v_j \rangle}_{= 0} = a_j \underbrace{\|v_j\|^2}_{\neq 0} \Rightarrow a_j = 0.$$

Comme cela vaut pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ , la famille orthogonale  $F$  est libre.  $\square$

Grâce à la théorie générale des espaces vectoriels en dimension finie, on peut dériver un corollaire immédiat du théorème précédent.

**Corollaire 2.4.1** Une famille orthogonale de  $n$  vecteurs non nuls dans un espace  $(V, \langle, \rangle)$  de dimension  $n$  est une base de  $V$ .

**Déf. 2.4.1** On appelle une famille de  $n$  vecteurs orthogonaux non nuls d'un espace vectoriel  $(V, \langle, \rangle)$  de dimension  $n$ , une **base orthogonale** de  $V$ . Si, en plus, la famille est orthonormale, on l'appelle une **base orthonormale** de  $V$ .

On rappelle que, pour déterminer les composantes d'un vecteur par rapport à une base quelconque on doit résoudre un système linéaire de  $n$  équations avec  $n$  inconnues.

Par contre, si on a une base orthogonale ou orthonormale, les composantes sont déterminées par des produits scalaires, comme le montre le théorème suivant.

On observe que la résolution d'un système linéaire de  $n$  équations avec  $n$  inconnues nécessite, en général, beaucoup plus d'opérations que le calcul de produits scalaires, ceci montre déjà un des avantages de connaître une base orthogonale d'un espace vectoriel.

**Théorème 2.4.2** Soit  $B = \{u_1, \dots, u_n\}$  une base **orthogonale** de  $(V, \langle, \rangle)$ , alors :

$$v = \sum_{i=1}^n \frac{\langle v, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i$$

En particulier, si  $B$  est une base **orthonormale**, alors :

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle u_i.$$

*Preuve.*  $B$  est une base, donc il y a un ensemble des scalaires  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  tels que  $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j$ .

On considère le produit scalaire de cette expression de  $v$  avec un vecteur fixé  $u_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  :

$$\langle v, u_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j, u_i \right\rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle u_j, u_i \rangle \underset{(u_i \perp u_j \ \forall i \neq j)}{=} \alpha_i \langle u_i, u_i \rangle = \alpha_i \|u_i\|^2$$

donc  $\alpha_i = \frac{\langle v, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} \ \forall i = 1, \dots, n$ , et alors  $v = \sum_{i=1}^n \frac{\langle v, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i$ . Si  $B$  est une base orthonormale, alors  $\|u_i\| = 1$  et donc on a la deuxième formule du théorème.  $\square$

**Interprétation géométrique du théorème :** le théorème qu'on vient de démontrer est la généralisation du théorème de décomposition d'un vecteur dans le plan  $\mathbb{R}^2$  ou dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  sur la base canonique des vecteurs unitaires des axes. Pour simplifier, on considère le cas de  $\mathbb{R}^2$  comme dans la figure 2.2.

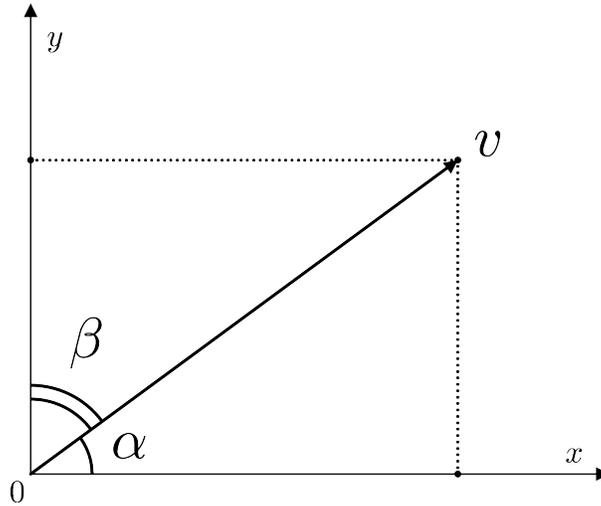


FIGURE 2.2 – Représentation graphique du théorème de décomposition sur la base canonique en  $\mathbb{R}^2$ .

Si  $\hat{i}$  et  $\hat{j}$  sont respectivement les vecteurs unitaires des axes  $x$  et  $y$ , alors le théorème de décomposition dit que :

$$v = \underbrace{\|v\| \cos \alpha}_{\langle v, \hat{i} \rangle} \hat{i} + \underbrace{\|v\| \cos \beta}_{\langle v, \hat{j} \rangle} \hat{j} = \langle v, \hat{i} \rangle \hat{i} + \langle v, \hat{j} \rangle \hat{j},$$

qui est un cas particulier du théorème ci-dessus.

L'importance de souligner ce résultat réside dans le fait que **la série de Fourier peut être vue comme une généralisation ultérieure du théorème de décomposition sur une base orthogonale ou orthonormale.**

## 2.5 La projection orthogonale dans les espaces vectoriels avec produit scalaire

Dans l'espace Euclidien  $\mathbb{R}^2$ , il est clair que le produit scalaire d'un vecteur  $v$  avec un vecteur unitaire  $u$  réalise la projection orthogonale de  $v$  dans la direction donnée par  $u$ .

De la même manière, on peut définir la projection orthogonale  $p$  d'un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  sur le plan engendré par deux vecteurs unitaires comme la somme des projections orthogonales  $p_1$  et  $p_2$  sur les deux vecteurs unitaires considérés séparément, comme il est montré dans la figure 2.3.

Pour pouvoir utiliser cette propriété dans l'analyse de Fourier, on a besoin d'étudier, plus en général, la projection orthogonale dans les espaces vectoriels avec un produit scalaire en dimension finie.

On considère alors  $(V, \langle, \rangle)$ , un espace vectoriel complexe de dimension  $n$  avec produit scalaire, et une **famille orthogonale**  $F = \{u_1, \dots, u_m\}$ ,  $m \leq n$ , de vecteurs non nuls :  $u_i \neq 0_V \forall i = 1, \dots, m$ .

On écrira le sous-espace vectoriel de  $V$  engendré par toutes les combinaisons linéaires des

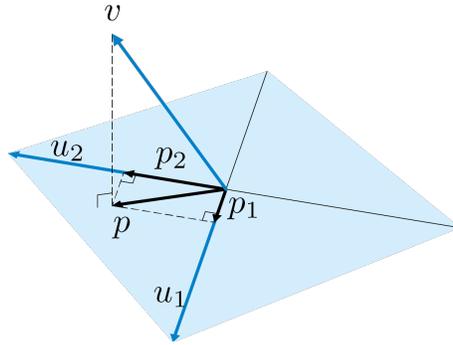


FIGURE 2.3 – Projection orthogonale  $p$  d'un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  sur le plan engendré par deux vecteurs unitaires.

vecteurs de  $F$  comme  $\text{Span}(F)$  :

$$\text{Span}(F) \equiv S = \left\{ s \in V : \exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C} \text{ tels que } s = \sum_{j=1}^m \alpha_j u_j \right\}.$$

On étend d'une façon naturelle la définition de la **projection orthogonale d'un vecteur**  $v \in V$  **sur**  $S = \text{Span}(F)$  comme ceci :

$$P_S(v) = \sum_{i=1}^m \frac{\langle v, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i,$$

il faut noter que la présence de la norme au carré est due au fait qu'il faut *normaliser deux fois*  $u_i$ . On définit l'**opérateur de projection orthogonale**<sup>5</sup> sur  $S$  comme l'application (évidemment) linéaire :

$$\begin{aligned} P_S : V &\longrightarrow S \subseteq V \\ v &\longmapsto P_S(v) = \sum_{i=1}^m \frac{\langle v, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i. \end{aligned}$$

Le théorème suivant montre que la projection orthogonale définie ci-dessus a toutes les propriétés de la projection orthogonale en  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ .

**Théorème 2.5.1** *Avec les notations ci-dessus :*

- 1) Si  $s \in S$  alors  $P_S(s) = s$ , i.e. l'action de  $P_S$  sur les vecteurs de  $S$  est l'identité ;
- 2)  $\forall v \in V$  et  $s \in S$ , le vecteur **résidu** de la projection, i.e.  $v - P_S(v)$ , est  $\perp$  à  $S$  :

$$\langle v - P_S(v), s \rangle = 0 \iff v - P_S(v) \perp s ;$$

- 3)  $\forall v \in V$  et  $s \in S$  :

$$\|v - P_S(v)\| \leq \|v - s\|$$

et l'égalité vaut si et seulement si  $s = P_S(v)$ .

---

5. Aussi dit **projecteur orthogonal**.

Observation importante : la propriété 3) dit que, **parmi tous les vecteurs de  $S$ , le vecteur qui minimise la fonction distance à  $v$ , i.e.  $d : V \times V \rightarrow [0, +\infty[$ ,  $d(v, s) = \|v - s\|$ , est la **projection orthogonale**  $P_S(v) : P_S(v) = \operatorname{argmin}_{s \in S} d(v, s)$ .**

Par ailleurs, la propriété 2) est la généralisation d'un fait géométrique qu'on peut visualiser très facilement en  $\mathbb{R}^2$ , comme dans la figure 2.4.

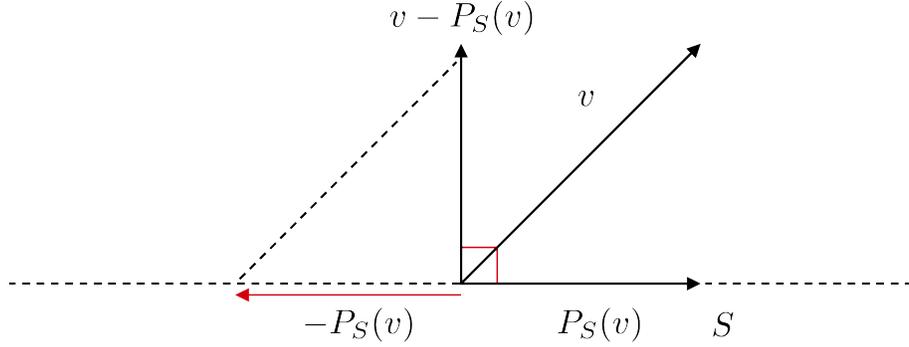


FIGURE 2.4 – Visualisation de la propriété 2) en  $\mathbb{R}^2$ .

*Preuve de 1)* : Soit  $s \in S$ , i.e.  $s = \sum_{j=1}^m \alpha_j u_j$ , alors :

$$P_S(s) = \sum_{i=1}^m \frac{\langle \sum_{j=1}^m \alpha_j u_j, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i \underset{(u_i \perp u_j \ \forall i \neq j)}{=} \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i \langle u_i, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i u_i = s.$$

*Preuve de 2)* : On commence par considérer encore le produit scalaire de  $P_S(v)$  avec un vecteur quelconque  $u_j$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$  fixé :

$$\langle P_S(v), u_j \rangle = \sum_{i=1}^m \frac{\langle v, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} \langle u_i, u_j \rangle \underset{(u_i \perp u_j \ \forall i \neq j)}{=} \frac{\langle v, u_j \rangle}{\|u_j\|^2} \langle u_j, u_j \rangle = \langle v, u_j \rangle$$

d'où

$$\langle v, u_j \rangle - \langle P_S(v), u_j \rangle = 0 \quad \underset{\text{linéarité de } \langle \cdot, \cdot \rangle}{\iff} \quad \langle v - P_S(v), u_j \rangle = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}.$$

Maintenant, si  $s \in S$ , alors  $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_m$  tels que  $s = \sum_{j=1}^m \alpha_j u_j$ , donc

$$\langle v - P_S(v), s \rangle = \langle v - P_S(v), \sum_{j=1}^m \alpha_j u_j \rangle \underset{\text{formule (2.2)}}{=} \sum_{j=1}^m \alpha_j \underbrace{\langle v - P_S(v), u_j \rangle}_{=0} = 0,$$

et la propriété 2) est prouvée.

*Preuve de 3)* : il est utile d'écrire la différence  $v - s$  comme ceci :  $v - P_S(v) + P_S(v) - s$ . La propriété 2) nous dit que  $v - P_S(v) \perp S$ , par contre,  $P_S(v), s \in S$  donc  $P_S(v) - s \in S$ . Par conséquent :  $(v - P_S(v)) \perp (P_S(v) - s)$ .

En utilisant la généralisation du théorème de Pythagore on peut alors écrire :

$$\|v - s\|^2 = \|v - P_S(v) + P_S(v) - s\|^2 = \|v - P_S(v)\|^2 + \underbrace{\|P_S(v) - s\|^2}_{\geq 0} \geq \|v - P_S(v)\|^2,$$

ce qui implique :  $\|v - s\| \geq \|v - P_S(v)\| \forall v \in V, s \in S$ .

Bien évidemment,  $\|P_S(v) - s\|^2 = 0$  si et seulement si  $s = P_S(v)$ , et dans ce cas on a  $\|v - s\|^2 = \|v - P_S(v)\|^2$ .  $\square$

### 2.5.1 Existence d'une base orthonormale : la procédure itérative de Gram-Schmidt

On a vu que quand on a à disposition une base orthonormale, les formules de projection et de décomposition sont plus simples. Le théorème suivant dit que, dans un espace vectoriel de dimension finie avec produit scalaire, on peut toujours construire une base orthonormale à partir d'une famille libre de générateurs.

**Théorème 2.5.2 (Procédure itérative de Gram-Schmidt <sup>6</sup>)** Si  $(v_1, \dots, v_n)$ ,  $n \leq \infty$ , est une base de  $(V, \langle, \rangle)$  alors on peut trouver une base orthonormale de  $(V, \langle, \rangle)$  à partir de  $(v_1, \dots, v_n)$ .

*Preuve.* La preuve est constructive, dans le sens qu'elle donne la méthode pour construire une base orthonormale à partir d'une base quelconque.

— 1ère étape, normalisation de  $v_1$  :

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}.$$

— 2ème étape, comme montré dans la figure 2.5, on projette  $v_2$  en direction de  $u_1$ , i.e. on considère  $\langle v_2, u_1 \rangle u_1$ . Grâce au théorème 2.5.1 on sait que la différence vectorielle  $v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1$  est orthogonale à  $u_1$ , enfin on normalise le résultat :

$$u_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1}{\|v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1\|}.$$

—  $n$ -ième étape, par itération :

$$u_n = \frac{v_n - (\langle v_n, u_{n-1} \rangle u_{n-1} + \dots + \langle v_n, u_1 \rangle u_1)}{\|v_n - (\langle v_n, u_{n-1} \rangle u_{n-1} + \dots + \langle v_n, u_1 \rangle u_1)\|}.$$

$\square$

---

6. Jørgen Pedersen Gram (Nustrup 1850 - Copenhagen 1916), Erhard Schmidt (Tatu 1876 - Berlin 1959).

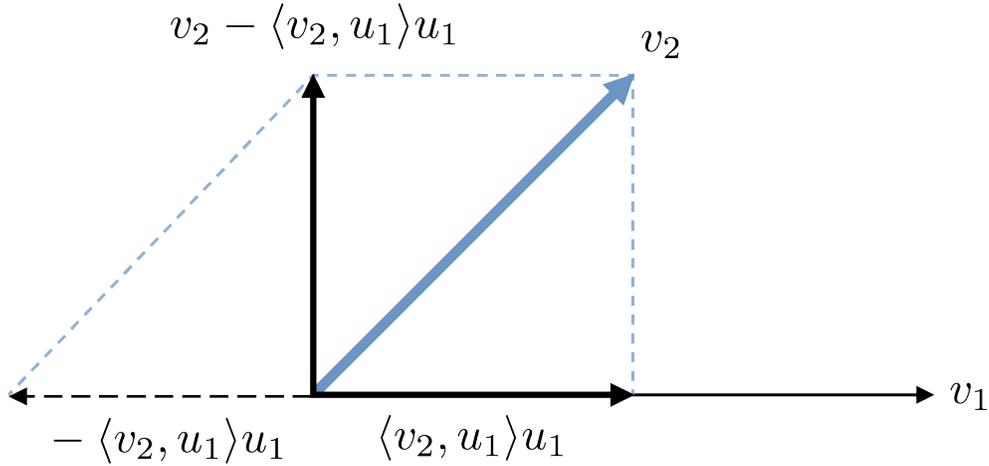


FIGURE 2.5 – Représentation graphique de la deuxième étape de la procédure d’orthonormalisation de Gram-Schmidt.

## 2.6 Les propriétés fondamentales d’une base orthonormale et orthogonale

On résume les propriétés les plus importantes d’une base orthonormale dans le théorème suivant :

**Théorème 2.6.1** *Soit  $(u_1, \dots, u_n)$  une base orthonormale de  $(V, \langle, \rangle)$ ,  $\dim(V) = n$ . Alors,  $\forall v, w \in V$  :*

1. *Théorème de décomposition sur une base orthonormale :*

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle u_i ; \quad (2.3)$$

2. *Identité de Parseval<sup>7</sup> :*

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle \langle u_i, w \rangle ; \quad (2.4)$$

3. *Identité de Plancherel<sup>8</sup> :*

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle v, u_i \rangle|^2 . \quad (2.5)$$

*Preuve de 1) :* c’est une conséquence immédiate du théorème 2.5.1. En fait, comme  $(u_1, \dots, u_n)$  est une base,  $v \in \text{Span}(u_1, \dots, u_n)$ , en plus  $(u_1, \dots, u_n)$  est orthonormale, donc  $v = P_S(v) = \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle u_i$ . La division par  $\|u_i\|^2$  dans la sommation n’est pas nécessaire car  $\|u_i\| = 1 \forall i$ .

7. Marc-Antoine de Parseval des Chênes (Rosières-aux-Salines 1755, Paris 1836).

8. Michel Plancherel (Bussy 1885 - Zurich 1967).

*Preuve de 2)* : en utilisant 1) on peut écrire  $v = \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle u_i$ , et, si on calcule le produit scalaire de  $v$ , écrit comme ceci, avec  $w$ , grâce à la formule (2.1), on a :

$$\langle v, w \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle u_i, w \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle \langle u_i, w \rangle.$$

*Preuve de 3)* : si on écrit  $w = v$  dans le côté gauche de l'identité de Parseval on a  $\langle v, v \rangle = \|v\|^2$ , par contre, à droite on a :

$$\sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle \langle u_i, v \rangle = \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle \langle v, u_i \rangle^* = \sum_{i=1}^n |\langle v, u_i \rangle|^2$$

donc  $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle v, u_i \rangle|^2$ . □

*Observations :*

1. **L'interprétation physique de l'identité de Plancherel** est la suivante : l'énergie de  $v$ , mesurée par sa norme carrée, peut être décomposée par la somme des modules carrés de chaque projection de  $v$  sur les  $n$  directions de la base orthonormale  $(u_1, \dots, u_n)$ . Dans la théorie de Fourier les directions de la base orthonormale seront les harmoniques fondamentales (sinus et cosinus avec des fréquences bien définies), c'est pourquoi on appelle l'analyse de Fourier *analyse harmonique*.
2. Si, au lieu d'être une base orthonormale,  $(u_1, \dots, u_n)$  est une base orthogonale, alors, grâce à la formule du projecteur et au théorème 2.5.1, les résultats du théorème 2.6.1 peuvent être écrits comme ceci :

(a) **Décomposition de  $v \in V$  sur une base orthogonale :**

$$v = \sum_{i=1}^n \frac{\langle v, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i; \tag{2.6}$$

(b) **Identité de Parseval pour une base orthogonale :**

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\langle v, u_i \rangle \langle u_i, w \rangle}{\|u_i\|^2}; \tag{2.7}$$

(c) **Identité de Plancherel pour une base orthogonale :**

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n \frac{|\langle v, u_i \rangle|^2}{\|u_i\|^2}. \tag{2.8}$$

## 2.7 Opérateurs entre espaces vectoriels avec produit scalaire : leurs propriétés et leur représentation matricielle

On sait qu'un opérateur (application) linéaire entre deux espaces vectoriels  $V$  et  $W$  est associé univoquement à une matrice, à condition de fixer une base de  $V$  et une de  $W$ .

Si on considère aussi la structure donnée par la présence d'un produit scalaire, on peut définir une classe très importante des opérateurs : ceux qui conservent le produit scalaire entre vecteurs. La représentation matricielle de ces opérateurs joue un rôle fondamental dans les applications de la théorie de Fourier.

Dans les sections suivantes, on va rappeler les notions essentielles relatives aux opérateurs et matrices qui préservent le produit scalaire.

### 2.7.1 Opérateurs linéaires et matrices

On commence par introduire des *notations* qui nous permettront de simplifier l'écriture de beaucoup de formules dans le cours. On considère la situation suivante :

$$\begin{array}{lll} L : & V & \longrightarrow W \\ & v & \longmapsto L(v) = w \\ \dim : & n & m \\ \text{bases : } & E = (v_j)_{j=1}^n & F = (w_i)_{i=1}^m \end{array}$$

Comme  $E$  est une base de  $V$ , on peut écrire tout vecteur  $v \in V$  comme une combinaison linéaire des vecteurs de  $E$  :

$$v = \sum_{j=1}^n a_j v_j,$$

les coefficients  $a_j$  sont les composantes de  $v$  relative à  $E$ , pour souligner ceci on va écrire :

$$[v]_E = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Également, si on a

$$w = \sum_{i=1}^m b_i w_i$$

on représente les composantes de  $w$  par rapport à  $F$  comme ceci :

$$[w]_F = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Donné une matrice  $A$  ( $m \times n$ ) quelconque et un vecteur colonne  $v$  ( $n \times 1$ ) :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

alors  $Av$  est un vecteur colonne ( $m \times 1$ ) :

$$Av = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}v_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}v_j \end{pmatrix},$$

i.e., chaque ligne  $i$  de  $Av$  est donnée par la formule :

$$\boxed{(Av)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}v_j} \quad \forall i = 1, \dots, m. \quad (2.9)$$

On rappelle aussi que le produit matriciel entre une matrice ( $m \times n$ ),  $A = (a_{ij})$ , et une matrice ( $n \times p$ ),  $B = (b_{jk})$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $k = 1, \dots, p$  est une matrice ( $m \times p$ ),  $C = (c_{ik})$  où

$$\boxed{c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}},$$

qui correspond, au *produit scalaire Euclidien réel* de la ligne  $i$  de  $A$  avec la colonne  $k$  de  $B$  (même quand les matrices sont complexes).

Le produit matriciel est *associatif*, i.e.  $(AB)C = A(BC)$  (quand le produit a du sens, bien sûr), mais *en général* il n'est pas commutatif :  $AB \neq BA$ .

Quand  $AB = BA$  on dit que les matrices *commutent*. On peut définir le **commutateur** entre  $A$  et  $B$  comme la matrice suivante :  $[A, B] = AB - BA$ , bien évidemment  $A$  et  $B$  commutent si et seulement si leur commutateur  $[A, B]$  est la matrice nulle (qui n'a que de 0 partout).

Parmi toutes les matrices que l'on peut imaginer, il existe une seule matrice  $A$  associée à l'opérateur linéaire  $L : V \rightarrow W$  à condition qu'on ait fixé les bases  $E$  et  $F$  auparavant.

Pour déterminer cette matrice, on va appliquer  $L$  à tous les vecteurs de la base  $(v_j)_{j=1}^n$  de  $V$ , en obtenant  $n$  vecteurs avec  $m$  composantes (en tant que vecteurs de  $W$ ) :  $Lv_j \in W$ ,  $j = 1, \dots, n$ . On peut décomposer ces vecteurs sur la base  $(w_i)_{i=1}^m$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} L(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{m1}w_m = \sum_{i=1}^m a_{i1}w_i \\ L(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{m2}w_m = \sum_{i=1}^m a_{i2}w_i \\ \vdots \\ L(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{mn}w_m = \sum_{i=1}^m a_{in}w_i \end{array} \right.$$

i.e.

$$L(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij}w_i \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}. \quad (2.10)$$

**Théorème 2.7.1** Avec les notations antérieures, la matrice<sup>9</sup>

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

est la seule matrice qui satisfait l'équation suivante :

$$[Lv]_F = A[v]_E \quad \forall v \in V. \quad (2.12)$$

Pour cette raison  $A$  est dite **matrice associée à  $L$  via les bases  $E$  et  $F$** . L'écriture rigoureuse de  $A$  est la suivante :  $A_L^{E,F}$ .

*Preuve.* Soit  $v$  un vecteur quelconque de  $V$ , avec une décomposition sur la base  $E$  donnée par

$$v = \sum_{j=1}^n c_j v_j, \text{ donc } [v]_E = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}. \text{ On va appliquer } L \text{ à } v :$$

$$\begin{aligned} L(v) &= L\left(\sum_{j=1}^n c_j v_j\right) \stackrel{\text{linéarité de } L}{=} \sum_{j=1}^n c_j L(v_j) \\ &\stackrel{\text{eq. (2.10)}}{=} \sum_{j=1}^n c_j \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} c_j\right) w_i, \end{aligned}$$

où dans le dernier cas on a utilisé le fait que les sommes *finies* sont toujours interchangeables entre elles.

$$\text{Donc on a : } L(v) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} c_j\right) w_i, \text{ et alors, par définition :}$$

$$[L(v)]_F = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} c_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} c_j \end{pmatrix}.$$

La ligne  $i$  de  $[L(v)]_F$  est  $\sum_{j=1}^n a_{ij} c_j$ , mais grâce à l'eq. (2.9), cela est exactement la ligne  $i$  de  $A[v]_E$ , donc  $[L(v)]_F = A[v]_E$ .

L'unicité de la matrice  $A$  est immédiate à démontrer : si, par l'absurde,  $B \neq A$  satisfaisait  $[L(v)]_F = B[v]_E \forall v \in V$ , alors, par différence, on aurait :

$$0 = [L(v)]_F - [L(v)]_F = A[v]_E - B[v]_E = (A - B)[v]_E,$$

i.e.  $(A - B)[v]_E = 0 \forall v \in V$ , mais cela est possible si et seulement si  $A - B = 0$ , la matrice nulle, i.e.  $A = B$ , qui est contradictoire avec le fait qu'on avait supposé  $B \neq A$ .  $\square$

---

9. La colonne  $i$  de  $A$  a comme éléments les coefficients de la combinaison linéaire qui exprime  $L(v_i)$  en fonction des vecteurs de la base  $F$ .

On observe que :

- Le nombre de *lignes* de  $A$  est  $m = \text{dimension de l'espace d'arrivé } W$  ;
- Le nombre de *colonnes* de  $A$  est  $n = \text{dimension de l'espace domaine } V$ .

Donc  $A$  est *carrée* si et seulement si  $\text{dim}(V) = \text{dim}(W)$ . C'est le cas des **endomorphismes**, i.e. opérateurs linéaires dont le domaine et l'image sont le même me espace vectoriel.

L'ensemble des endomorphismes d'un espace vectoriel  $V$  de dimension  $n$  est lui-même un espace vectoriel, de dimension  $n^2$ , par rapport à la somme des applications linéaires et au produit par un scalaire du même champ que  $V$ . On écrira l'espace vectoriel des endomorphismes de  $V$  comme  $\text{End}(V)$ . Si on interprète  $V$  comme espace domaine et comme espace d'arrivé d'un endomorphisme  $L \in \text{End}(V)$ , alors on a la possibilité de lui associer une matrice par rapport à une seule base  $E$  de  $V$  ou à deux bases différentes  $E$  et  $F$ . Dans le premier cas, on parlera tout simplement de la matrice associée à  $L$  par rapport à la base  $E$  et on écrira  $A_L^{E,E} = A_L^E$ . La section suivante analyse de deuxième cas.

C'est le cas qu'on considérait désormais, car il est le plus intéressant pour le développement de la théorie de la transformée de Fourier.

### 2.7.2 Changement de la base dans un espace vectoriel

Imaginons d'avoir, dans un espace vectoriel  $V$  de dimension  $n$ , une base  $E = (v_j)_{j=1}^n$  et une base  $F = (w_i)_{i=1}^n$ . On se pose le problème de déterminer la matrice  $P$  qui satisfait l'équation :

$$[v]_F = P[v]_E, \tag{2.13}$$

i.e. la matrice qui permet de passer de  $[v]_E$ , la représentation de  $v$  par rapport à la base  $E$ , à  $[v]_F$ , la représentation de  $v$  par rapport à la base  $F$ .

L'équation (2.12) du théorème 2.7.1 implique que la matrice  $A_L^{E,F}$  associée à un endomorphisme  $L \in \text{End}(V)$  par rapport aux bases  $E$  et  $F$  satisfait la relation  $[Lv]_F = A_L^{E,F}[v]_E$ , ça suffit alors de considérer l'endomorphisme identité  $\text{id}: V \rightarrow V$ ,  $\text{id}(v) = v \forall v \in V$ , pour obtenir la relation (2.13) :

$$P = A_{\text{id}}^{E,F}.$$

On peut expliciter les éléments de la matrice  $P$  en utilisant la relation (2.10) dans laquelle il faut bien sûr remplacer  $L$  avec  $\text{id}$  et  $m$  avec  $n$  :

$$v_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} w_i, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

On appelle  $P$  la **matrice de passage de la base  $E$  à la base  $F$** .  $P$  est toujours inversible et  $P^{-1}$  est la matrice de passage de la base  $F$  à la base  $E$ .

Dans le développement de la théorie de la transformée de Fourier discrète, le résultat suivant sera très important.

**Théorème 2.7.2** *Soient :*

- $L : V \rightarrow V$  un endomorphisme
- $E, F$  : deux bases de  $V$
- $A$  la matrice associée à  $L$  par rapport à  $E$
- $P$  la matrice de passage de la base  $E$  à la base  $F$

Alors  $B = P^{-1}AP$  est la matrice associée à  $L$  par rapport à  $F$ .

Bien évidemment, on a  $PB = PP^{-1}AP \Rightarrow PBP^{-1} = APP^{-1}$ , i.e.

$$B = P^{-1}AP \iff A = PBP^{-1}.$$

Une telle relation entre  $A$  et  $B$  est dite **conjugaison matricielle** (à ne pas confondre avec la conjugaison complexe!). On dit que deux matrices liées par une conjugaison matricielle sont **semblables**.

Être semblables est une relation d'équivalence dans l'ensemble des matrices, un des buts les plus importants de l'algèbre linéaire consiste à trouver la représentation la plus « simple » dans la classe d'équivalence par similarité d'une matrice.

Dans les cours d'algèbre linéaire on démontre que, si une matrice est diagonalisable, alors cette représentation simple est donnée par la matrice diagonale avec les valeurs propres sur la diagonale.

## 2.8 Opérateurs qui conservent le produit scalaire

Soit  $L : (V, \langle, \rangle) \rightarrow (V, \langle, \rangle)$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $V$  avec un produit scalaire  $\langle, \rangle$ . On dit que  $L$  **conserve le produit scalaire** si

$$\langle v, w \rangle = \langle Lv, Lw \rangle \quad \forall v, w \in V.$$

**Théorème 2.8.1**  $L : (V, \langle, \rangle) \rightarrow (V, \langle, \rangle)$  conserve le produit scalaire  $\iff L$  transforme les bases orthonormales de  $V$  en autres bases orthonormales de  $V$ .

*Preuve.*

$\implies$  : on suppose que  $L$  conserve le produit scalaire. Si  $(u_i)_{i=1}^n$  est une base orthonormale, alors  $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{i,j}$  et donc, comme  $L$  conserve  $\langle, \rangle$ ,  $\langle Lu_i, Lu_j \rangle = \langle u_i, u_j \rangle = \delta_{i,j}$ . Ceci montre que la famille  $(Lu_i)_{i=1}^n$  est une base orthonormale de  $V$ .

$\impliedby$  : on suppose que  $L$  transforme bases orthonormales en bases orthonormales. Soit  $(u_i)_{i=1}^n$  une base orthonormale de  $V$ , alors  $(Lu_i)_{i=1}^n$  est une base orthonormale de  $V$ . Pour prouver que  $L$  conserve le produit scalaire, ça suffit de développer une couple de vecteurs  $v, w \in V$  sur  $(u_i)_{i=1}^n$ , leur transformés via  $L$  sur  $(Lu_i)_{i=1}^n$  et comparer les identités de Parseval dans les deux cas. En fait, grâce à (2.3) on peut écrire :

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle u_i, \quad w = \sum_{i=1}^n \langle w, u_i \rangle u_i$$

et

$$Lv = L \left( \sum_{i=1}^n \underbrace{\langle v, u_i \rangle}_{\in \mathbb{C}} u_i \right) \stackrel{\text{(linéarité de } L)}{=} \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle Lu_i.$$

Également :

$$Lw = \sum_{i=1}^n \langle w, u_i \rangle Lu_i.$$

Grâce à l'identité de Parseval (2.4) on peut écrire :

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle \langle u_i, w \rangle, \quad (2.14)$$

et aussi :

$$\langle Lv, Lw \rangle = \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle \langle u_i, w \rangle. \quad (2.15)$$

Si on compare les identités (2.14) et (2.15) on obtient que  $\langle Lv, Lw \rangle = \langle v, w \rangle \forall v, w \in V$ , i.e.  $L$  conserve le produit scalaire.  $\square$

C'est clair que si  $L$  conserve le produit scalaire, alors, en particulier,  $L$  conserve la norme (pour démontrer cela, ça suffit de considérer  $v = w$ ) :

$$\langle Lv, Lv \rangle = \langle v, v \rangle \implies \|Lv\| = \|v\|$$

pour tout vecteur  $v \in V$ .

Alors,  $L$  transforme  $0_V$  en  $0_V$  et seulement cela, car  $0_V$  est le seul vecteur qui a pour norme 0. Donc  $\text{Ker}(L) = \{0_V\}$  et  $L$  est inversible.

On peut résumer ces propriétés dans le théorème suivant.

**Théorème 2.8.2** *Soit  $L \in \text{End}(V)$ , où  $(V, \langle, \rangle)$  est un espace vectoriel avec produit scalaire (réel ou complexe). Si  $L$  conserve le produit scalaire, alors :*

1.  $L$  transforme bases orthonormales de  $V$  en bases orthonormales (et vice-versa) ;
2.  $L$  conserve la norme induite par le produit scalaire ;
3.  $\text{Ker}(L) = \{0_V\}$ , donc  $L$  est inversible, i.e. il existe  $L^{-1} \in \text{End}(V)$ .

## 2.9 Valeurs et vecteurs propres d'un opérateur linéaire qui conserve le produit scalaire et matrices unitaires

On rappelle que, donné un endomorphisme  $L : V \rightarrow V$ , on dit que  $\lambda \in \mathbb{C}$  est une **valeur propre** pour  $L$  s'il existe  $v \in V$ ,  $v \neq 0_V$ , tel que :  $Lv = \lambda v$  ;  $v$  est dit **vecteur propre** pour  $L$  relatif à  $\lambda$ .

L'interprétation géométrique est la suivante : l'action de  $L$  sur  $v$  est la simple multiplication scalaire (*homothétie*). En particulier, si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors  $v$  est tout simplement *dilaté* (si  $|\lambda| > 1$ ), *comprimé* (si  $|\lambda| < 1$ ), *inversé* (si  $\lambda < 0$ ), ou *laissé fixe* ( $\lambda = 1$ ).

Si  $\lambda \in \mathbb{C}$ , alors  $\lambda = \rho e^{i\theta}$ , où  $\rho \geq 0$  est le module et  $\theta$  est l'argument. Dans ce cas l'action de  $L$  sur le vecteur propre  $v$  est une rotation-homothétie : *rotation de l'angle  $\theta$  et homothétie du facteur  $\rho$* .

Les valeurs propres d'un opérateur qui conserve le produit scalaire ont une forme très spécifique, comme dit dans le théorème suivant.

**Théorème 2.9.1** *Si  $L \in \text{End}(V)$  conserve le produit scalaire d'un espace vectoriel complexe  $V$ , alors les valeurs propres de  $L$  peuvent seulement être de la forme :  $\lambda = e^{i\theta}$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ .*

*Preuve.* On écrit l'équation pour les valeurs propres :  $Lv = \lambda v$ ,  $v \neq 0_V$ . Si  $L$  conserve  $\langle, \rangle$ , alors on sait que  $L$  conserve aussi la norme :  $\|Lv\| = \|v\|$ . Mais  $\|Lv\| = \|\lambda v\|$ , donc  $\|v\| = |\lambda| \|v\|$ . Ceci vaut si et seulement si  $|\lambda| = 1$ , mais les nombres complexes avec module unitaire sont exactement  $\lambda = e^{i\theta}$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ .  $\square$

On passe maintenant à la relation avec les matrices. On sait qu'un opérateur linéaire  $L \in \text{End}(V)$  qui conserve le produit scalaire est inversible. Si  $U$  et  $U^{-1}$  sont les matrices qui représentent  $L$  et  $L^{-1}$  par rapport à une base orthonormale  $(u_i)_{i=1}^n$ , alors on peut démontrer que la relation entre elles est la suivante :

$$U^{-1} = (U^*)^t \iff U(U^*)^t = (U^*)^t U = I,$$

i.e. l'inverse  $U^{-1}$  est la transposée de la matrice conjuguée. Inverser une matrice est un processus qui nécessite beaucoup d'opérations, donc le fait de pouvoir inverser une matrice unitaire simplement avec la transposition et la conjugaison est très utile dans la pratique.

On appelle  $U$  une **matrice unitaire** et on utilise un symbole spécial pour la matrice conjuguée et transposée :  $\boxed{(U^*)^t = U^\dagger}$ , qu'on lit «  $U$  dague », ou matrice *adjointe*.

On peut résumer les propriétés des matrices unitaires comme ceci.

**Théorème 2.9.2** *Soit  $U$  une matrice complexe  $n \times n$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1.  $U$  conserve le  $\langle, \rangle$  :  $\langle Uv, Uw \rangle = \langle v, w \rangle \forall v, w \in V$  ;
2.  $U$  est une isométrie :  $\|Uv\| = \|v\| \forall v \in V$ , et donc il existe  $U^{-1}$  ;
3.  $U$  est unitaire :  $U^{-1} = U^\dagger$  ;
4. Les **lignes** et les **colonnes** de  $U$  sont une base orthonormale de  $\mathbb{C}^n$  par rapport au produit scalaire Euclidien complexe ;
5. Les valeurs propres de  $U$  ont la forme :  $\lambda = e^{i\theta}$ .

### 2.9.1 Le cas réel

Les résultats qu'on vient d'examiner changent si  $V$  est un espace vectoriel réel. Dans ce cas, si  $L \in \text{End}(V)$  conserve le produit scalaire, alors les valeurs propres de  $L$  peuvent être seulement  $\lambda = \pm 1$  et la matrice associée à  $L$  via une base orthonormale de  $V$  est une **matrice orthogonale**  $O$  telle que :

$$O^{-1} = O^t \iff OO^t = O^t O = I,$$

i.e. l'inverse de  $O$  est la transposée.

On peut résumer les propriétés des matrices orthogonales comme ceci.

**Théorème 2.9.3** *Soit  $O$  une matrice réelle  $n \times n$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1.  $O$  conserve le  $\langle, \rangle$  :  $\langle Ov, Ow \rangle = \langle v, w \rangle \forall v, w \in V$  ;
2.  $O$  est une isométrie :  $\|Ov\| = \|v\| \forall v \in V$ , et donc il existe  $O^{-1}$  ;
3.  $O$  est orthogonale :  $O^{-1} = O^t$  ;
4. Les lignes et les colonnes de  $O$  sont une base orthonormale de  $\mathbb{R}^n$  par rapport au produit scalaire Euclidien réel ;
5. Les valeurs propres de  $O$  ont la forme :  $\lambda = \pm 1$ .

## 2.10 Rappel sur la diagonalisation des endomorphismes et matrices

La diagonalisation des matrices est une des plus importantes opérations de l'algèbre linéaire, en fait, travailler avec une matrice diagonale est beaucoup plus simple et rapide qu'avec une matrice quelconque.

Rappeler les concepts fondamentales de la théorie de la diagonalisation est utile car une des plus remarquables applications de la transformée de Fourier est la diagonalisation des opérateurs stationnaires.

**Déf. 2.10.1** Un *endomorphisme*  $L : V \rightarrow V$  est dit **diagonalisable** (ou *simple*) s'il existe une **base** de  $V$  donnée par des **vecteurs propres** de  $L$ .

Allons voir la motivation qui est à la base de la définition : s'il existe  $(v_i)_{i=1}^n$ , base de  $V$  de vecteurs propres de  $L$  avec valeurs propres  $(\lambda_i)_{i=1}^n$ , alors :

$$\begin{cases} Lv_1 = \lambda_1 v_1 = \lambda_1 v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n \\ \vdots \\ Lv_n = \lambda_n v_n = 0v_1 + 0v_2 + \dots + \lambda_n v_n \end{cases}$$

Donc, grâce à (2.10), la matrice  $A$  associée à  $L$  via la base de vecteurs propres  $(v_i)_{i=1}^n$  est :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Cela explique la définition de diagonalisabilité donnée ci-dessus.

On a aussi une définition de diagonalisabilité pour les matrices.

**Déf. 2.10.2** Une **matrice** carrée  $A$  est **diagonalisable** si elle est « semblable » à une matrice diagonale, i.e. il existe une matrice inversible  $C$  telle que  $C^{-1}AC = D$  et  $D$  est diagonale.

Le théorème suivant explique pourquoi on a le droit d'utiliser le même mot, *diagonalisable*, dans deux définitions qui concernent les endomorphismes et les matrices.

**Théorème 2.10.1**  $L$  est diagonalisable (comme endomorphisme) si et seulement si  $A$  est diagonalisable (comme matrice), où  $A$  est la matrice associée à  $L$  avec n'importe quelle base.

Il existe une théorie générale très élégante relative à la diagonalisabilité des endomorphismes et des matrices, mais, pour les buts de ce cours, le résultat suivant sera suffisant.

**Théorème 2.10.2** *Soient :*

- $V$  : espace vectoriel complexe de dimension  $n$  avec un produit scalaire ;
- $L \in \text{End}(V)$  ;
- $A$  : matrice associée à  $L$  par rapport à la base canonique de  $\mathbb{C}^n$  ;
- $F$  : base orthonormale de  $V$  donnée par de vecteur propres de  $A$  ;
- $P$  : matrice  $n \times n$  qui a comme colonnes les vecteurs de la base  $V$ , i.e. les vecteurs propres de  $A$ .

*Alors :*

1.  $P$  est unitaire, i.e.  $P^{-1} = P^\dagger$ , et elle est la matrice de passage de la base  $F$  de vecteurs propres de  $A$  à la base canonique de  $\mathbb{C}^n$  ;
2.  $L$  et  $A$  sont diagonalisables et :

$$D = P^{-1}AP, \quad A = PDP^{-1},$$

où :  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  et  $\lambda_j$  est la valeur propre associée au  $j$ -ième vecteur propre de  $L$ .

## Chapitre 3

# La transformée de Fourier discrète « DFT »

Avec le rappel qu'on a fait sur les espaces vectoriels complexes avec produit scalaire et leurs propriétés, on peut introduire la transformée de Fourier discrète d'une façon très simple.

Il s'agit tout simplement de prouver que certaines fonctions des exponentiels complexes sont une base orthonormale pour un espace vectoriel complexe avec produit scalaire de dimension finie.

D'un point de vue mathématique la transformée de Fourier discrète est un simple changement de base dans un espace vectoriel, néanmoins, son interprétation a une importance et une utilité énorme dans les applications, en particulier dans le cadre de la théorie des signaux, comme on verra dans la section 3.6.

### 3.1 L'espace $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ et sa base canonique

Pour introduire l'espace vectoriel où on travaillera pour construire la DFT, on va faire des petits changements dans la notation qu'on a utilisée jusqu'à maintenant.

On considèrera encore des vecteurs complexes avec un nombre  $N$ ,  $1 < N < +\infty$ , de composantes, mais on va interpréter un vecteur de  $\mathbb{C}^N$  comme une suite finie.

On commence par définir  $\mathbb{Z}_N$ .

**Déf. 3.1.1** On dit que deux entiers  $i, j \in \mathbb{Z}$  sont **congrus modulo  $N$**  si leur différence est divisible par  $N$ , i.e.

$$\frac{a - b}{N} = m \in \mathbb{Z},$$

cela implique qu'on peut écrire  $a = b + mN$ . La notation (dite de Gauss) pour deux entiers congrus modulo  $N$  est la suivante :

$$a \equiv b \pmod{N}.$$

Il est possible de démontrer que être congrus modulo  $N$  est une relation d'équivalence en  $\mathbb{Z}$ . Comme toute relation d'équivalence, elle crée une partition de  $\mathbb{Z}$  en classes d'équivalence distinctes. On écrit l'ensemble de ces classes d'équivalences comme

$$\mathbb{Z}_N = \mathbb{Z} \pmod{N}.$$

Une suite (finie) sur  $\mathbb{Z}_N$  à valeurs complexes est une fonction :

$$\begin{aligned} z &: \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{C} \\ j &\mapsto z(j). \end{aligned}$$

Dans la pratique, on va appliquer l'arithmétique qu'on appelle circulaire ou de l'horloge, qui consiste en identifier une suite définie sur  $\mathbb{Z}_N$  comme une suite définie sur  $\{0, 1, \dots, N-1\}$  et étendue à  $\mathbb{Z}$  par  $N$ -périodicité :

$$\boxed{z(j + mN) = z(j)} \quad \forall j, m \in \mathbb{Z},$$

i.e., si on connaît la définition de  $z(j)$  quand  $j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ , pour déterminer  $z(j)$  quand  $j \notin \{0, \dots, N-1\}$ , on doit ajouter à  $j$  un multiple entier de  $N$ , qu'on écrit  $mN$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , tel que  $\bar{j} = j + mN \in \{0, 1, \dots, N-1\}$  et après on définit  $z(j + mN) = z(\bar{j})$ . Voyons un exemple.

*Exemple* :  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_{12})$ ,  $z = (1, i, i, \sqrt{2}i, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 2)$ , i.e.

$$\begin{cases} z(0) = 1 \\ z(1) = z(2) = i \\ z(3) = \sqrt{2}i \\ z(4) = z(5) = z(6) = 0 \\ z(7) = -1 \\ z(8) = z(9) = z(10) = 0 \\ z(11) = 2. \end{cases}$$

étendue par 12-périodicité à  $\mathbb{Z}$ , déterminer  $z(-21)$ . Comme  $N = 12$ , on doit chercher l'entier  $m \neq 0$  tel que  $-21 + 12m \in \{0, 1, \dots, 11\}$  :

$$-21 + 12m = \begin{cases} -21 + 12 = -9 & m = 1 \\ -21 + 24 = 3 & m = 2 \\ -21 + 36 = 15 & m = 3 \\ \dots \end{cases}$$

La valeur de  $m$  qui fait que  $-21 + 12m$  soit inclus dans  $\{0, \dots, 11\}$  est  $m = 2$  et dans ce cas on a  $-21 + 2 \cdot 12 = 3$ , ce qui implique  $z(-21) = z(3) = \sqrt{2}i$ .

Malgré le fait qu'on identifiera souvent  $\mathbb{Z}_N$  avec l'ensemble des représentants canoniques  $\{0, 1, \dots, N-1\}$ , **on peut penser  $z$  défini sur n'importe quel sous-ensemble de  $\mathbb{Z}$  donné par  $N$  entiers consécutifs, et pas forcément sur  $\{0, \dots, N-1\}$** , on utilisera cette convention pendant tout le reste des photocopies sans le spécifier ultérieurement.

L'espace vectoriel complexe dans lequel on va travailler est l'ensemble de toutes les suites sur  $\mathbb{Z}_N$  à valeurs complexes :

$$\boxed{\ell^2(\mathbb{Z}_N) = \{z : \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{C}\}}.$$

La raison de cette notation particulière sera plus claire dans la suite du cours, pour le moment il faudra l'accepter.

$\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  est un espace vectoriel complexe avec les opérations de somme et de multiplication scalaire usuelles, i.e. donnés  $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ , la somme et la multiplication par un scalaire complexe sont définies comme ceci :

$$\begin{aligned} z + w &: \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{C} \\ j &\mapsto (z + w)(j) = z(j) + w(j), \\ \alpha z &: \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{C} \\ j &\mapsto (\alpha z)(j) = \alpha z(j). \end{aligned}$$

$\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  a dimension  $N$ , en fait, l'application qui associe à chaque suite  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  ses images  $(z(0), z(1), \dots, z(N-1))$  :

$$\begin{aligned} \ell^2(\mathbb{Z}_N) &\longleftrightarrow \mathbb{C}^N \\ z &\longleftrightarrow (z(0), z(1), \dots, z(N-1)) = \begin{pmatrix} z(0) \\ z(1) \\ \vdots \\ z(N-1) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

est un *isomorphisme linéaire* (la preuve est laissée comme exercice). On utilisera la représentation de  $z$  comme vecteur ligne ou comme vecteur colonne selon nos besoins.

Grâce à l'isomorphisme ci-dessus, on peut définir la **base canonique**  $B$  de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  comme l'ensemble des  $N$  suites suivantes :

$$B = (e_0, e_1, \dots, e_{N-1}), \quad e_j(k) = \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k \neq j. \end{cases}$$

On peut aussi introduire un **produit scalaire** dans  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  avec :

$$\langle z, w \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} z(k)w(k)^*,$$

donc  $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  sont orthogonales si et seulement si  $\langle z, w \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} z(k)w(k)^* = 0$ .

La norme induite par ce produit scalaire est :

$$\|z\| = \left( \sum_{k=0}^{N-1} |z(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

qu'on appellera « **norme**  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  ».

### 3.1.1 La base orthogonale des exponentiels complexes de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$

Le système de fonctions qu'on va définir sera essentiel pour le développement de l'analyse de Fourier.

Avant de définir ce système, on rappelle que :

1.  $z \in \mathbb{C}$  quelconque,  $z = \rho[\cos \alpha + i \sin \alpha] = \rho e^{i\alpha}$ ,  $\rho, \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\rho \geq 0$  ;
2. Formules de Euler :  $\cos \alpha = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$ ,  $\sin \alpha = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$  ;
3.  $|z| = 1 \Leftrightarrow z = e^{i\alpha}$  ;
4.  $e^{i\alpha} = e^{i(\alpha+2\pi k)}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  ;
5. Comme cas particulier du point ci-dessus, si  $\alpha = 0$  on trouve :

$$\boxed{e^{2\pi i k} = 1} \quad \forall k \in \mathbb{Z} ;$$

6.  $e^{i\alpha} e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$  ;
7.  $(e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha}$  ;
8.  $(e^{i\alpha})^* = e^{-i\alpha}$  ;
9. Donné  $z = \rho e^{i\alpha}$ , les solutions de l'équation  $w^N = z$  sont les  $N$  racines complexes données par la formule :  $w_m = \sqrt[N]{\rho} e^{i \frac{2\pi m + \alpha}{N}}$ ,  $m = 0, \dots, N-1$  ;
10. En particulier :

$$\text{Racines } N\text{-ièmes de l'unité : } \boxed{\omega_m = e^{2\pi i \frac{m}{N}}}, \quad m = 0, \dots, N-1.$$

La dernière information qu'on a besoin de rappeler est la formule de la sommation géométrique, définie par

$$S_k = 1 + z + z^2 + \dots + z^{k-1} + z^k = \sum_{j=0}^k z^j.$$

Si  $z = 1$ , alors  $S_k = k + 1$ . Si  $z \neq 1$ , on observe que :

$$(1 - z)S_k = 1 + z + z^2 + \dots + z^k - (z + z^2 + \dots + z^k + z^{k+1}) = 1 - z^{k+1},$$

et donc :

$$\sum_{j=0}^k z^j = \begin{cases} \frac{1-z^{k+1}}{1-z} & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \\ k+1 & \text{si } z = 1. \end{cases}$$

On considère maintenant les suites de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  définies par des exponentiels complexes, comme ceci :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m & : \mathbb{Z}_N \longrightarrow \mathbb{C} \\ n & \longmapsto \mathcal{E}_m(n), \end{aligned}$$

où :

$$\begin{cases} \mathcal{E}_0(n) = 1 \\ \mathcal{E}_1(n) = e^{2\pi i \frac{n}{N}} \\ \mathcal{E}_2(n) = e^{2\pi i \frac{2n}{N}} \\ \vdots \\ \mathcal{E}_{N-1}(n) = e^{2\pi i \frac{(N-1)n}{N}}. \end{cases}$$

Donc :

- $\mathcal{E}_0$  est la suite constante  $\mathcal{E}_0(n) \equiv 1 \forall n \in \mathbb{Z}_N$  ;
- $\mathcal{E}_1$  est la suite  $\mathcal{E}_1 = \left(1, e^{2\pi i \frac{1}{N}}, e^{2\pi i \frac{2}{N}}, \dots, e^{2\pi i \frac{(N-1)}{N}}\right)$  ;
- $\mathcal{E}_2$  est la suite  $\mathcal{E}_2 = \left(1, e^{2\pi i \frac{2}{N}}, e^{2\pi i \frac{4}{N}}, \dots, e^{2\pi i \frac{2(N-1)}{N}}\right)$  ;
- $\mathcal{E}_{N-1}$  est la suite  $\mathcal{E}_{N-1} = \left(1, e^{2\pi i \frac{N-1}{N}}, e^{2\pi i \frac{2(N-1)}{N}}, \dots, e^{2\pi i \frac{(N-1)^2}{N}}\right)$ .

La suite générale de l'ensemble est :

$$\boxed{\mathcal{E}_m(n) = e^{2\pi i \frac{mn}{N}} = (\omega_m)^n} \quad \forall m, n = 0, \dots, N-1,$$

où  $(\omega_m)^n$  est la puissance  $n$ -ième des racines  $N$ -èmes de l'unité,  $\forall n \in \{0, \dots, N-1\}$ , en fait :

$$(\omega_m)^n = \left(e^{2\pi i \frac{m}{N}}\right)^n = e^{2\pi i \frac{mn}{N}}.$$

Grâce à la formule  $z = e^{i\alpha} = [\cos \alpha + i \sin \alpha]$ , on sait que le système qu'on vient de définir est **un ensemble de suites de valeurs qui oscillent avec des fréquences différentes**, car les arguments des fonctions cos et sin changent avec les coefficients  $m$  et  $n$ . Comme on le verra bientôt, la signification de ces fréquences a une importance centrale dans l'analyse de Fourier.

Pour le moment, il est plus important de démontrer que le système des exponentiels qu'on vient de définir est une base orthogonale de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . La preuve nécessite un lemme préliminaire.

**Lemme 3.1.1** *Pour tout  $j, k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$  ça vaut la formule :*

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i n \frac{j-k}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i n \frac{k-j}{N}} = N\delta_{j,k} = \begin{cases} N & j = k \\ 0 & j \neq k. \end{cases} \quad (3.1)$$

On reviendra après sur l'interprétation physique de cette formule très importante. Avant de faire la preuve on observe que dans le cas  $j, k \in \mathbb{Z}_N$ ,  $j \neq k$ , on a que  $j - k \in \{1, 2, \dots, N-1\}$ , donc  $\frac{j-k}{N} = -\frac{k-j}{N} \notin \mathbb{Z}$ .

*Preuve.* On fait la preuve pour la première sommation, il sera clair que la même démonstration vaut aussi pour la deuxième. On commence par utiliser les propriétés des exponentiels complexes pour réécrire la formule comme ceci :

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i n \frac{j-k}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} \left( e^{2\pi i \frac{j-k}{N}} \right)^n .$$

On analyse les deux cas suivants :

- Si  $j = k$ , les exponentiels dans la somme sont égaux à 1, car  $e^{2\pi i \frac{0}{N}} = 1$ , et donc

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i n \frac{j-j}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N.$$

- Si  $j \neq k$ , les exponentiels sont  $\neq 1$ , alors, grâce à la formule de la sommation géométrique :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \left( e^{2\pi i \frac{j-k}{N}} \right)^n &= \frac{1 - \left( e^{2\pi i \frac{j-k}{N}} \right)^{N-1+1}}{1 - e^{2\pi i \frac{j-k}{N}}} \\ &= \frac{1 - e^{2\pi i \frac{(j-k)N}{N}}}{1 - e^{2\pi i \frac{j-k}{N}}} \\ &= \frac{1 - e^{2\pi i (j-k)}}{1 - e^{2\pi i \frac{j-k}{N}}}. \end{aligned}$$

Comme  $j - k = m \in \mathbb{Z}$ ,  $e^{2\pi i (j-k)} = 1$ , alors le numérateur de la dernière formule est 0 toutefois que  $j \neq k$ . Par contre, le dénominateur ne s'annule jamais, car, comme observé avant de la preuve, si  $j \neq q$ , alors  $\frac{j-k}{N} \notin \mathbb{Z}$ . Donc, dans ce cas la sommation vaut 0.  $\square$

Maintenant, on peut démontrer facilement que  $\mathcal{E}$  est une base orthogonale de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ .

**Théorème 3.1.1**  $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_0, \dots, \mathcal{E}_{N-1})$  est une base orthogonale de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ .

*Preuve.*  $\mathcal{E}$  est donnée par  $N$  éléments d'un espace vectoriel  $N$  dimensionnel avec produit scalaire, donc si on prouve que  $\mathcal{E}$  est une famille orthogonale, alors on démontre le théorème. En fait, on sait qu'une famille orthogonale est libre, et une famille libre de  $N$  vecteurs dans un espace vectoriel de dimension  $N$  est une base.

On va donc calculer les produits scalaires  $\langle \mathcal{E}_j, \mathcal{E}_k \rangle$ ,  $\forall j, k \in \{0, \dots, N-1\}$  :

$$\langle \mathcal{E}_j, \mathcal{E}_k \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{E}_j(n) \mathcal{E}_k(n)^* = \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{jn}{N}} e^{-2\pi i \frac{kn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{(j-k)n}{N}} = N\delta_{j,k},$$

où on a utilisé le Lemme 3.1 pour arriver à la dernière égalité, qui montre que  $\langle \mathcal{E}_j, \mathcal{E}_k \rangle = N\delta_{j,k}$ , i.e. les éléments de la base sont orthogonaux entre eux.  $\square$

Si dans l'équation  $\langle \mathcal{E}_j, \mathcal{E}_k \rangle = N\delta_{j,k}$  on considère  $j = k = m$ , alors  $\langle \mathcal{E}_m, \mathcal{E}_m \rangle = N\delta_{m,m} = N$ , donc :

$$\boxed{\|\mathcal{E}_m\|^2 = N}, \quad \boxed{\|\mathcal{E}_m\| = \sqrt{N}}, \quad \forall m \in \{0, 1, \dots, N-1\}.$$

On va examiner deux exemples dans lesquels les exponentiels complexes ont une expression particulièrement simple :  $N = 2$  et  $N = 4$  ( $N = 3$  ne donne pas une expression de la base orthonormale de Fourier si simple).

—  $N = 2$ .  $\ell^2(\mathbb{Z}_2) = \{z = (z(0), z(1)) \in \mathbb{C}^2\}$ , dans ce cas  $\mathcal{E}_m(n) = e^{2\pi i \frac{mn}{2}} = e^{\pi i mn}$  et donc :

$$m = 0 : \quad \mathcal{E}_0 = (e^{\pi i 0 \cdot 0}, e^{\pi i 0 \cdot 1}) = (1, 1)$$

$$m = 1 : \quad \mathcal{E}_1 = (e^{\pi i 1 \cdot 0}, e^{\pi i 1 \cdot 1}) = (1, e^{\pi i})$$

Mais  $e^{\pi i} = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1$ , donc  $\mathcal{E}_1 = (1, -1)$ . Alors,

$$\mathcal{E} = ((1, 1), (1, -1)), \quad (3.2)$$

est la base des exponentiels complexes de  $\ell^2(\mathbb{Z}_2)$ . Noter la présence d'une suite constante, la première, et d'une suite oscillante, la deuxième. On reviendra après sur cette forme particulière de la base.

—  $N = 4$ .  $\ell^2(\mathbb{Z}_4) = \{z = (z(0), z(1), z(2), z(3)) \in \mathbb{C}^4\}$ , la base de Fourier sera donnée par quatre suites complexes de quatre composantes. C'est laissé comme simple exercice de vérifier que la base des exponentiels complexes de  $\ell^2(\mathbb{Z}_4)$  est :

$$\mathcal{E} = ((1, 1, 1, 1), (1, i, -1, -i), (1, -1, 1, -1), (1, -i, -1, i)). \quad (3.3)$$

On peut utiliser les résultats (2.6), (2.7), (2.8) de la section 2.6 pour écrire les formules suivantes, qui sont valides pour deux éléments  $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  quelconques :

— Décomposition sur la base orthogonale  $\mathcal{E}$  :

$$z = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\langle z, \mathcal{E}_m \rangle}{N} \mathcal{E}_m \quad (3.4)$$

— Identité de Parseval pour la base orthogonale  $\mathcal{E}$  :

$$\langle z, w \rangle = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\langle z, \mathcal{E}_m \rangle \langle \mathcal{E}_m, w \rangle}{N} \quad (3.5)$$

— Identité de Plancherel pour  $\mathcal{E}$  :

$$\|z\|^2 = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{|\langle z, \mathcal{E}_m \rangle|^2}{N}. \quad (3.6)$$

On calculera explicitement les expressions ci-dessus dans la section 3.3.

On a la possibilité de renormaliser la base  $\mathcal{E}$  de plusieurs manières, dans les deux sections suivantes on montrera les deux les plus répandues, qui permettront aussi de définir la transformée de Fourier discrète.

### 3.2 La base orthonormale de Fourier de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$

Dans la section précédente on a vu que la norme  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  de toutes les suites  $\mathcal{E}_m$  est  $\sqrt{N}$ , donc il est évident qu'on peut obtenir une base orthonormale si on divise par  $\sqrt{N}$ . Ceci justifie la définition suivante.

**Déf. 3.2.1** On appelle base orthonormale de Fourier de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  l'ensemble

$$E = (E_0, E_1, E_2, \dots, E_{N-1})$$

des  $N$  suites  $E_m \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$

$$\begin{aligned} E_m &: \mathbb{Z}_N \longrightarrow \mathbb{C} \\ n &\longmapsto E_m(n), \end{aligned}$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_0(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \\ E_1(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i \frac{n}{N}} \\ E_2(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i \frac{2n}{N}} \\ \vdots \\ E_{N-1}(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i \frac{(N-1)n}{N}}. \end{array} \right.$$

La suite générale de la base orthonormale de Fourier est :

$$\boxed{E_m(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i \frac{mn}{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} (\omega_m)^n} \quad \forall m, n = 0, \dots, N-1,$$

et la formule d'orthonormalité :  $\langle E_j, E_k \rangle = \delta_{j,k}$  est valide.

Grâce aux formules (3.2) et (3.3) on peut dire que :

$$E = \frac{1}{\sqrt{2}} ((1, 1), (1, -1)) \tag{3.7}$$

est la base orthonormale de Fourier de  $\ell^2(\mathbb{Z}_2)$  et

$$E = \frac{1}{2} ((1, 1, 1, 1), (1, i, -1, -i), (1, -1, 1, -1), (1, -i, -1, i)). \tag{3.8}$$

est la base orthonormale de Fourier de  $\ell^2(\mathbb{Z}_4)$ .

La traduction du théorème 2.6.1 dans  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  avec la base orthonormale de Fourier est la suivante. Donnés les éléments  $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  quelconques, on a :

— Décomposition sur la base orthonormale de Fourier :

$$z = \sum_{m=0}^{N-1} \langle z, E_m \rangle E_m \quad (3.9)$$

— Identité de Parseval :

$$\langle z, w \rangle = \sum_{m=0}^{N-1} \langle z, E_m \rangle \langle E_m, w \rangle \quad (3.10)$$

— Identité de Plancherel :

$$\|z\|^2 = \sum_{m=0}^{N-1} |\langle z, E_m \rangle|^2. \quad (3.11)$$

### 3.3 La base orthogonale de Fourier de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$

Malgré la constante de normalisation  $1/\sqrt{N}$ , qui apparaît dans la définition de la base orthonormale de Fourier, est le choix le plus naturel pour la normalisation de la base  $\mathcal{E}$  de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , dans les applications pratiques une autre normalisation est plus souvent utilisée. La raison est la suivante : avec le choix qu'on montrera tout de suite, beaucoup de formules peuvent être écrites d'une façon plus simple.

**Déf. 3.3.1** On appelle base orthogonale de Fourier de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  l'ensemble

$$F = (F_0, F_1, F_2, \dots, F_{N-1})$$

des  $N$  suites  $F_m \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$

$$\begin{aligned} F_m &: \mathbb{Z}_N &\longrightarrow & \mathbb{C} \\ &n &\longmapsto & F_m(n), \end{aligned}$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_0(n) = \frac{1}{N} \\ F_1(n) = \frac{1}{N} e^{2\pi i \frac{n}{N}} \\ F_2(n) = \frac{1}{N} e^{2\pi i \frac{2n}{N}} \\ \vdots \\ F_{N-1}(n) = \frac{1}{N} e^{2\pi i \frac{(N-1)n}{N}}. \end{array} \right.$$

La suite générale de la base orthogonale de Fourier est :

$$\boxed{F_m(n) = \frac{1}{N} e^{2\pi i \frac{mn}{N}} = \frac{1}{N} (\omega_m)^n} \quad \forall m, n = 0, \dots, N-1.$$

Les relations parmi les trois bases  $\mathcal{E}$ ,  $E$  et  $F$  sont les suivantes :

$$E_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{N}}, \quad F_m = \frac{\mathcal{E}_m}{N}, \quad F_m = \frac{E_m}{\sqrt{N}} \quad \forall m \in \{0, 1, \dots, N\}. \quad (3.12)$$

Grâce aux formules ci-dessus on peut calculer facilement les bases orthogonales de Fourier de  $\ell^2(\mathbb{Z}_2)$  et de  $\ell^2(\mathbb{Z}_4)$  :

— Base orthogonale de Fourier de  $\ell^2(\mathbb{Z}_2)$  :

$$F = \frac{1}{2} ((1, 1), (1, -1)) \quad (3.13)$$

— Base orthogonale de Fourier de  $\ell^2(\mathbb{Z}_4)$  :

$$F = \frac{1}{4} ((1, 1, 1, 1), (1, i, -1, -i), (1, -1, 1, -1), (1, -i, -1, i)). \quad (3.14)$$

Toujours grâce à (3.12) on peut déterminer l'équivalent des formules (3.9) (ou 3.4), (3.10) (ou 3.5) et (3.11) (ou 3.6) pour deux éléments  $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  quelconques :

— Décomposition sur la base orthogonale de Fourier :

$$z = N \sum_{m=0}^{N-1} \langle z, F_m \rangle F_m$$

— Identité de Parseval pour la base orthogonale de Fourier :

$$\langle z, w \rangle = N \sum_{m=0}^{N-1} \langle z, F_m \rangle \langle F_m, w \rangle$$

— Identité de Plancherel pour la base orthogonale de Fourier :

$$\|z\|^2 = N \sum_{m=0}^{N-1} |\langle z, F_m \rangle|^2.$$

Il est utile de résumer dans la table suivante la différence parmi les bases et les formules :

$$\mathcal{E}_m(n) = e^{2\pi i \frac{mn}{N}}, \quad E_m(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i \frac{mn}{N}}, \quad F_m(n) = \frac{1}{N} e^{2\pi i \frac{mn}{N}}.$$

Base	Décomposition	Identité de Parseval	Identité de Plancherel
$\mathcal{E}$	$z = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\langle z, \mathcal{E}_m \rangle}{N} \mathcal{E}_m$	$\langle z, w \rangle = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\langle z, \mathcal{E}_m \rangle \langle \mathcal{E}_m, w \rangle}{N}$	$\ z\ ^2 = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{ \langle z, \mathcal{E}_m \rangle ^2}{N}$
$E$	$z = \sum_{m=0}^{N-1} \langle z, E_m \rangle E_m$	$\langle z, w \rangle = \sum_{m=0}^{N-1} \langle z, E_m \rangle \langle E_m, w \rangle$	$\ z\ ^2 = \sum_{m=0}^{N-1}  \langle z, E_m \rangle ^2$
$F$	$z = N \sum_{m=0}^{N-1} \langle z, F_m \rangle F_m$	$\langle z, w \rangle = N \sum_{m=0}^{N-1} \langle z, F_m \rangle \langle F_m, w \rangle$	$\ z\ ^2 = N \sum_{m=0}^{N-1}  \langle z, F_m \rangle ^2.$

TABLE 3.1 –

### 3.4 Les coefficients de Fourier et la transformée de Fourier discrète (DFT)

La définition de la transformée de Fourier discrète change selon les auteurs et les applications. Les deux définitions les plus répandues utilisent la base orthonormale  $E$  et un mélange des bases orthogonales  $\mathcal{E}$  et  $F$ .

Les deux choix sont utiles pour des raisons différentes :

- Utiliser la base orthonormale  $E$  permet d'obtenir des opérateurs unitaires ;
- Utiliser un mélange des bases orthogonales  $\mathcal{E}$  et  $F$  permet de simplifier beaucoup de formules, notamment la formule de la convolution, qu'on verra plus tard dans ce chapitre, qui est très utilisée dans les applications.

Même si on donnera les définitions de transformée de Fourier avec les deux choix de bases, on travaillera avec les formules qui viennent des bases orthogonales  $\mathcal{E}$  et  $F$ . Cette décision a été prise principalement par cohérence avec les formules de beaucoup de logiciels, notamment MATLAB.

On commence par reconsidérer la décomposition

$$z = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\langle z, \mathcal{E}_m \rangle}{N} \mathcal{E}_m = \sum_{m=0}^{N-1} \langle z, \mathcal{E}_m \rangle \frac{\mathcal{E}_m}{N},$$

mais  $\mathcal{E}_m/N = F_m$ , donc :

$$z = \sum_{m=0}^{N-1} \langle z, \mathcal{E}_m \rangle F_m,$$

i.e. on peut décomposer un élément  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  quelconque sur la base orthogonale de Fourier  $F$  avec des composantes données par les produits scalaires de  $z$  avec les éléments de la base  $\mathcal{E}$ .

En rappelant la définition du produit scalaire de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \langle z, \mathcal{E}_m \rangle &= \sum_{n=0}^{N-1} z(n) [\mathcal{E}_m(n)]^* = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) \left( e^{2\pi i \frac{mn}{N}} \right)^* \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}}. \end{aligned}$$

**Déf. 3.4.1** *Donné  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  quelconque, on appelle les valeurs complexes  $\langle z, \mathcal{E}_m \rangle$ ,  $m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ , les coefficients de Fourier de  $z$ , qu'on écrit avec  $\hat{z}(m)$ . Explicitement :*

$$\boxed{\hat{z}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}}} \ll \text{Coefficients de Fourier de } z \gg . \quad (3.15)$$

On écrit avec  $\hat{z} \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  la suite des coefficients de Fourier de  $z$  :

$$\hat{z} = (\hat{z}(0), \hat{z}(1), \hat{z}(2), \dots, \hat{z}(N-1)). \quad (3.16)$$

On appelle l'opérateur linéaire qui transforme  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  en la suite  $\hat{z} \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  de ses coefficients de Fourier, i.e.

$$\begin{aligned} \text{DFT} \equiv \hat{\cdot} \equiv \mathcal{F} : \ell^2(\mathbb{Z}_N) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_N) \\ z &\longmapsto \text{DFT}(z) \equiv \hat{z} \equiv \mathcal{F}(z), \\ \hat{z}(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} \quad \forall m \in \{0, 1, \dots, N-1\}, \end{aligned}$$

la **transformée de Fourier discrète**, qu'on écrira DFT « Discrete Fourier Transform », à partir de maintenant.

Il faut observer que **la variable de  $z$  est  $n$ , tandis que la variable de  $\hat{z}$  est  $m$** . Dans la section 3.6 on donnera l'interprétation de  $n$  et  $m$  dans la théorie des signaux :  $n$  est la valeur discrète d'un instant temporel (ou d'une position spatiale), où on mesure un signal  $z$ , par contre  $m$  est proportionnel à la fréquence d'oscillation d'une onde (dite harmonique), multiple d'une fréquence fondamentale. Donc, la DFT permet de passer d'une description en termes d'échantillons temporels (ou spatiales) d'un signal, à une description en terme de fréquences du signal même. Dans la section 3.6 on formalisera cette affirmation.

Avec les définitions ci-dessus, on peut écrire la décomposition de  $z$  comme ceci :

$$z = \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m) F_m, \quad (3.17)$$

i.e. les coefficients de Fourier de  $z$  sont les composantes de  $z$  dans la base orthogonale de Fourier  $F$  :

$$\hat{z} = [z]_F. \quad (3.18)$$

Si on utilise la notation qu'on vient d'introduire, on peut réécrire le théorème de décomposition sur la base orthonormale de Fourier et les identités de Parseval et Plancherel comme cela :

— **Décomposition de  $z$  sur la base orthogonale de Fourier :**

$$\boxed{z(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m) e^{2\pi i \frac{mn}{N}} \quad \forall n = 0, 1, \dots, N-1} \quad (3.19)$$

— **Identité de Parseval :**

$$\boxed{\langle z, w \rangle = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m) \hat{w}(m)^* = \frac{1}{N} \langle \hat{z}, \hat{w} \rangle} \quad (3.20)$$

— **Identité de Plancherel :**

$$\boxed{\|z\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |\hat{z}(m)|^2 = \frac{1}{N} \|\hat{z}\|^2.} \quad (3.21)$$

### 3.4.1 La transformée de Fourier inverse (IDFT)

Il est intéressant de comparer les formules (3.15) et (3.19) :

$$\hat{z}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n)e^{-2\pi i \frac{mn}{N}}, \quad z(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m)e^{2\pi i \frac{mn}{N}}, \quad \forall n, m \in \{0, 1, \dots, N-1\}.$$

La première relation dit que, si on connaît les valeurs  $z(n)$ , alors on peut reconstruire les valeurs  $\hat{z}(m)$  grâce à la formule (3.15).

La deuxième relation dit que, si on connaît les valeurs  $\hat{z}(m)$ , alors on peut reconstruire les valeurs  $z(n)$  grâce à la formule (3.19).

Ceci montre une « dualité » entre les deux formules : on peut passer de la suite  $z$  à la suite  $\hat{z}$  et vice-versa via les relations (3.15) et (3.19).

On va formaliser cette dualité avec la définition et le théorème qui suivent.

**Déf. 3.4.2** On appelle l'opérateur linéaire :

$$\begin{aligned} \text{IDFT} \equiv \check{\cdot} \equiv \mathcal{F}^{-1} &: \ell^2(\mathbb{Z}_N) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_N) \\ z &\longmapsto \text{IDFT}(z) \equiv \check{z} \equiv \mathcal{F}^{-1}(z), \end{aligned}$$

$$\boxed{\check{z}(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} z(m)e^{2\pi i \frac{mn}{N}}} \quad \forall n \in \{0, 1, \dots, N-1\},$$

la **transformée de Fourier discrète inverse**, qu'on écrira IDFT « Inverse Discrete Fourier Transform », à partir de maintenant.

**Théorème 3.4.1** La IDFT est l'opérateur linéaire inverse de la DFT et vice-versa :

$$\text{IDFT} = \text{DFT}^{-1}, \quad \text{DFT} = \text{IDFT}^{-1},$$

autrement dit :

$$\check{\check{z}} = z, \quad \hat{\hat{z}} = z \quad \forall z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N).$$

*Preuve.* On doit démontrer que la composition entre DFT et IDFT et entre IDFT et DFT donne l'opérateur identité  $id$  :  $\text{DFT} \circ \text{IDFT} = \text{IDFT} \circ \text{DFT} = id$ ,  $id(z) = z$ ,  $\forall z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ .

On commence par vérifier que, si on a une suite  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  quelconque, et on applique la DFT pour obtenir la suite des coefficients de Fourier  $\hat{z} \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , alors on peut revenir à la suite initiale via l'application de la IDFT :

$$\begin{array}{ccccc} \ell^2(\mathbb{Z}_N) & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{Z}_N) & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{Z}_N) \\ z & \xrightarrow{\text{DFT}} & \hat{z} & \xrightarrow{\text{IDFT}} & \check{\hat{z}} = z. \end{array}$$

Avant d'écrire la composition, on souligne qu'il ne faut pas confondre l'indice de sommation, dont le symbole n'a aucune importance, avec les variables fixées  $n, m$  de  $\check{z}(n)$  et  $\hat{z}(m)$ . Pour éviter ce problème, on utilise  $j$  comme symbole de sommation de la première transformation, qui est celle écrite à l'intérieur de l'expression composée.

$$\begin{aligned}
\check{z}(n) &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m) e^{2\pi i \frac{mn}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left( \sum_{j=0}^{N-1} z(j) e^{-2\pi i \frac{mj}{N}} \right) e^{2\pi i \frac{mn}{N}} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} z(j) e^{2\pi i m \frac{n-j}{N}} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} z(j) \left( \sum_{m=0}^{N-1} e^{2\pi i m \frac{n-j}{N}} \right) \\
&\stackrel{\text{(Lemme 3.1)}}{=} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} z(j) N \delta_{j,n} \\
&= z(n) \quad \forall n \in \{0, 1, \dots, N-1\}.
\end{aligned}$$

Maintenant on vérifie que la composition inverse donne encore l'identité :

$$\begin{array}{ccccc}
\ell^2(\mathbb{Z}_N) & \xrightarrow{\text{IDFT}} & \ell^2(\mathbb{Z}_N) & \xrightarrow{\text{DFT}} & \ell^2(\mathbb{Z}_N) \\
z & \mapsto & \check{z} & \mapsto & \hat{\check{z}} = z.
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\check{z}}(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} \check{z}(n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} \left( \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} z(j) e^{2\pi i \frac{jn}{N}} \right) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} z(j) e^{2\pi i n \frac{j-m}{N}} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} z(j) \left( \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i n \frac{j-m}{N}} \right) \\
&\stackrel{\text{(Lemme 3.1)}}{=} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} z(j) N \delta_{j,m} \\
&= z(m) \quad \forall m \in \{0, 1, \dots, N-1\}.
\end{aligned}$$

Donc,  $\check{z}(n) = z(n)$  et  $\hat{\check{z}}(m) = z(m)$ ,  $\forall n, m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$  et le théorème est prouvé.  $\square$

On note la grande similarité entre DFT et IDFT : seulement le coefficient  $1/N$  et le signe de l'exponentiel complexe changent.

C'est utile de souligner les formules qu'on vient de démontrer :

$$\boxed{\check{z}(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m) e^{2\pi i \frac{mn}{N}} = z(n)} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_N,$$

$$\boxed{\hat{\check{z}}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} \check{z}(n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} = z(m)} \quad \forall m \in \mathbb{Z}_N.$$

**Déf. 3.4.3** On appelle la couple  $(z, \hat{z}) \in \ell^2(\mathbb{Z}_N) \times \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  une **couple de Fourier**.

### 3.4.2 Définition de DFT et IDFT avec la base orthonormale de Fourier

Une définition alternative des coefficients de Fourier, DFT et IDFT, qu'on trouve surtout dans la littérature mathématique plus théorique, utilise la base orthonormale de Fourier  $E$  :

#### Analyse de Fourier discrète orthonormale :

—  $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  ;

— Coefficients de Fourier :

$$\hat{z}(m) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}}, \quad (3.22)$$

*l'écriture  $\hat{z}$  dans les formules suivantes de cette liste (et seulement celles-ci) fait référence aux coefficients de Fourier ci-dessus.*

— Décomposition sur la base orthonormale de Fourier :

$$z(m) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{z}(n) e^{2\pi i \frac{mn}{N}}.$$

— DFT :

$$\hat{z}(m) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} \quad \forall m \in \{0, 1, \dots, N-1\}.$$

— IDFT :

$$\check{z}(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} z(m) e^{2\pi i \frac{mn}{N}} \quad \forall n \in \{0, 1, \dots, N-1\}.$$

— Identité de Parseval :

$$\langle z, w \rangle = \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m) \hat{w}(m)^* = \langle \hat{z}, \hat{w} \rangle.$$

— Identité de Plancherel :

$$\|z\|^2 = \sum_{m=0}^{N-1} |\hat{z}(m)|^2 = \|\hat{z}\|^2.$$

On voit que l'avantage le plus important d'utiliser la base orthonormale de Fourier pour définir les objets de l'analyse de Fourier discrète est que la DFT et la IDFT sont des opérateurs qui conservent le produit scalaire, et donc aussi la norme, par conséquent, ils sont représentés avec des matrices unitaires, comme on le verra plus tard.

On observe aussi que, indépendamment de la définition qu'on utilise, *le produit des coefficients de  $\hat{z}$  et  $\check{z}$  doit toujours être égal à  $1/N$  pour garantir que  $\text{IDFT} = \text{DFT}^{-1}$ .*

**Observation importante :** Dans le reste du cours, on utilisera seulement les définitions de objets de l'analyse de Fourier discrète qu'on a introduit dans les sections 3.4 et 3.4.1.

### 3.4.3 La base (orthonormale) de Fourier réelle

On peut écrire la base de Fourier et la DFT avec une notation réelle. L'avantage d'avoir une base de Fourier réelle est que, si  $z$  est réel, alors on peut éviter l'introduction de composantes imaginaires. On considère simplement la base de Fourier orthonormale pour simplicité.

Il faut distinguer si  $N$  est paire ou impaire. On commence par le cas  $N$  paire :  $N = 2M$ ,  $M \in \mathbb{N}$ ,  $M \geq 1$ . Alors,  $\forall n = 0, 1, \dots, N - 1$ , on écrit :

$$\begin{cases} c_0(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \\ c_m(n) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cos\left(\frac{2\pi mn}{N}\right) & m = 1, 2, \dots, M - 1 \\ c_M(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \cos\left(\frac{2\pi \frac{N}{2} n}{N}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{N}} \\ s_m(n) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sin\left(\frac{2\pi mn}{N}\right) & m = 1, 2, \dots, M - 1. \end{cases}$$

Si  $N = 2M + 1$  est impaire, alors on définit encore  $c_0$ ,  $c_m$  et  $s_m$  comme ci-dessus, mais bien sûr le cas  $m = N/2$  ne doit pas être considéré car  $N/2$  dans ce cas n'est pas un nombre entier.

**Théorème 3.4.2** *L'ensemble  $\{c_0, c_1, \dots, c_{M-1}, c_M, s_1, \dots, s_{M-1}\}$  quand  $N = 2M$  ou l'ensemble  $\{c_0, c_1, \dots, c_{M-1}, s_1, \dots, s_{M-1}\}$  quand  $N = 2M + 1$  est une base orthonormale de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . Donc, pour tout  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  :*

$$z = \sum_{m=0}^M \langle z, c_m \rangle c_m + \sum_{m=1}^{M-1} \langle z, s_m \rangle s_m \quad (N = 2M), \quad z = \sum_{m=0}^{M-1} \langle z, c_m \rangle c_m + \sum_{m=1}^{M-1} \langle z, s_m \rangle s_m \quad (N = 2M + 1)$$

**Déf. 3.4.4** *On appelle base orthonormale réelle de Fourier de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  l'ensemble de suites de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$   $\{c_0, c_1, \dots, c_{M-1}, c_M, s_1, \dots, s_{M-1}\}$  quand  $N = 2M$ , ou l'ensemble de suites de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$   $\{c_0, c_1, \dots, c_{M-1}, s_1, \dots, s_{M-1}\}$  quand  $N = 2M + 1$ .*

La relation avec les coefficients de Fourier est donnée par les formules suivantes.

$$\begin{cases} \langle z, c_0 \rangle = \frac{\hat{z}(0)}{\sqrt{N}} \\ \langle z, c_M \rangle = \frac{\hat{z}(M)}{\sqrt{N}} \\ \langle z, c_m \rangle = \frac{1}{\sqrt{2N}} (\hat{z}(m) + \hat{z}(N - m)), & m = 1, 2, \dots, M - 1 \\ \langle z, s_m \rangle = \frac{-i}{\sqrt{2N}} (\hat{z}(m) - \hat{z}(N - m)), & m = 1, 2, \dots, M - 1 \\ \hat{z}(0) = \sqrt{N} \langle z, c_0 \rangle \\ \hat{z}(M) = \sqrt{N} \langle z, c_M \rangle \\ \hat{z}(m) = \sqrt{N/2} (\langle z, c_m \rangle - i \langle z, s_m \rangle), & m = 1, 2, \dots, M - 1 \\ \hat{z}(m) = \sqrt{N/2} (\langle z, c_{N-m} \rangle + i \langle z, s_{N-m} \rangle), & m = M + 1, M + 2, \dots, N - 1. \end{cases}$$

### 3.5 Interprétation matricielle de la DFT et IDFT

Par définition, la DFT transforme les suites de  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  représentées dans la base canonique  $B$  de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  en suites de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  représentées dans la base orthogonale  $F$  de Fourier de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  (3.17) :

$$\begin{aligned} \text{DFT} : \quad \ell^2(\mathbb{Z}_N) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_N) \\ z = [z]_B &\longmapsto \text{DFT}(z) = \hat{z} = [z]_F \end{aligned}$$

Donc, la DFT est l'opérateur de passage de la base canonique  $B$  de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  à la base de Fourier  $F$  de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  et, par conséquent, la IDFT est l'opérateur de passage inverse, de  $F$  à  $B$ .

On veut trouver la représentation matricielle des opérateurs linéaires DFT et IDFT. Pour cela, on introduit une notation habituelle dans la littérature relative à la DFT :  $\omega_N = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$ . Grâce aux propriétés des exponentiels complexes on peut écrire :

$$\omega_N^{mn} = e^{-2\pi i \frac{mn}{N}}$$

et donc les coefficients de Fourier peuvent être réécrits comme ceci :

$$\hat{z}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) \omega_N^{mn}.$$

On définit la matrice  $W_N$  qui a comme éléments  $\omega_N^{mn}$  :

$$w_{mn} = \omega_N^{mn},$$

i.e. explicitement :

$$W_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \omega_N^3 & \dots & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \omega_N^6 & \dots & \omega_N^{2(N-1)} \\ 1 & \omega_N^3 & \omega_N^6 & \omega_N^9 & \dots & \omega_N^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \omega_N^{3(N-1)} & \dots & \omega_N^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice  $N \times N$  est dite **matrice de Vandermonde-Fourier**<sup>1</sup>. Elle est **symétrique** :  $W_N = W_N^t$ , i.e.  $w_{mn} = w_{nm}$  (ce qui est une conséquence évidente de la définition de  $w_{mn}$  car  $\omega_N^{mn} = \omega_N^{nm}$ ) et chaque ligne ou colonne est donnée par la progression géométrique<sup>2</sup> d'une puissance de  $\omega_N$ .

La convention intrinsèque quand on considère  $W_N$  consiste à considérer la variabilité de l'indice des lignes et des colonnes entre 0 et  $N - 1$  (au lieu de la variabilité canonique de 1 jusqu'à  $N$ ), c'est grâce à cette convention qu'on a tous les éléments de la première ligne ( $m = 0$ ) et de la première colonne ( $n = 0$ ) égaux à 1.

Si on applique  $W_N$  à  $z$  *identifié avec un vecteur colonne* de  $\mathbb{C}^N$ , alors, par définition de produit matriciel, on obtient un vecteur  $W_N z$  dont la  $m$ -ième composante  $(W_N z)(m)$  est

---

1. Alexandre-Théophile Vandermonde (1735 Paris - 1796 Paris).  
 2. On rappelle qu'une progression géométrique de raison  $r$  est la suite de puissances  $1 = r^0, r = r^1, r^2, r^3, \dots, r^n$ .

donnée par<sup>3</sup> :

$$(W_N z)(m) = \sum_{n=0}^{N-1} w_{mn} z(n) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} = \hat{z}(m),$$

ça vaut  $\forall m \in \mathbb{Z}_N$ , donc :

$$\boxed{\hat{z} = W_N z} \quad \forall z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N).$$

Avec les mêmes considérations, on peut vérifier que la IDFT est implémentée via la matrice conjuguée de  $W_N$  normalisée par le coefficient  $1/N$  (la transposition n'est pas nécessaire car  $W_N$  est symétrique) :

$$\boxed{W_N^{-1} = \frac{1}{N} W_N^*}, \quad \boxed{\check{z} = W_N^{-1} z} \quad \forall z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N).$$

$W_N$  est la *matrice de passage de base de  $B$  à  $F$* , et  $W_N^{-1} = \frac{1}{N} W_N^*$  est la *matrice de passage de base de  $F$  à  $B$* .

*Observation* : si on utilise la définition de DFT correspondant à l'éq. (3.22), i.e. via la base orthonormale de Fourier, alors la matrice associée devient  $\tilde{W}_N = W_N/\sqrt{N}$ , qui est une matrice unitaire, et donc sa matrice inverse est  $\tilde{W}_N^*$ .

Exemples :

—  $N = 2$  :  $\omega_2 = e^{-2\pi i/2} = e^{-i\pi} = \cos(\pi) - i \sin(\pi) = -1$ , donc

$$W_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

d'où :

$$W_2^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

—  $N = 4$  :  $\omega_4 = e^{-2\pi i/4} = e^{-i\pi/2} = \cos(\pi/2) - i \sin(\pi/2) = -i$ , donc

$$W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & (-i)^2 & (-i)^3 \\ 1 & (-i)^2 & (-i)^4 & (-i)^6 \\ 1 & (-i)^3 & (-i)^6 & (-i)^9 \end{pmatrix},$$

d'où :

$$W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

La matrice inverse est :

$$W_4^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

---

3. C'est le produit Euclidien réel de la  $m$ -ième ligne de  $W_N$ , i.e.  $(w_{m0}, w_{m1}, \dots, w_{m(N-1)})$  fois les composantes  $(z(0), z(1), \dots, z(n))$  de  $z$ .

On observe que la matrice  $W_4^{-1}$  a comme colonnes la base *orthogonale*  $F$  de  $\ell^2(\mathbb{Z}_4)$  comme vu dans la formule eq. (3.14), ce qui est cohérent avec le fait qu'elle est la matrice de passage de la base *orthogonale*  $F$  à la base canonique de  $\ell^2(\mathbb{Z}_4)$ .

### 3.5.1 « FFT » : Fast Fourier Transform

On vient de voir que l'action de la DFT sur un signal  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  peut être représentée comme un produit matriciel. Par conséquent, on a besoin de calculer  $N$  multiplications pour chaque élément  $\hat{z}(m)$  de la suite  $\hat{z} \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . Comme  $\hat{z}$  a  $N$  composantes, l'algorithme de calcul de la DFT a une complexité de  $\mathcal{O}(N^2)$ .

Pour des signaux de grande dimension, cette complexité implique que la DFT est très lente, c'est pour cela que la transformée de Fourier a été utilisée presque seulement dans un cadre théoriques, plutôt que dans les applications, jusqu'aux années 60 du XX siècle.

Heureusement, **Cooley et Tukey**, en 1965, ont utilisé des symétries cachées dans la DFT pour construire un algorithme rapide pour le calcul de la DFT, ils ont appelé l'algorithme Fast Fourier Transform « FFT ».

La FFT a une complexité de l'ordre de  $\mathcal{O}(N \log N)$  et elle permet de calculer la transformée de Fourier d'un signal de grande dimension dans l'ordre d'une fraction de secondes avec les ordinateurs modernes.

En particulier, la FFT est très efficace quand la dimension des signaux est une puissance de 2. Cela explique pourquoi le format typique des images numériques est de 512 ou 1024, comme ceci on peut manipuler ces images efficacement avec la FFT.

Le développement de la FFT est considéré comme *une des plus grandes avancées scientifique du XXème siècle*, car il a permis d'utiliser dans une quantité énorme d'applications pratiques la transformée de Fourier.

## 3.6 La transformée de Fourier dans le traitement des signaux

La théorie de Fourier est appliquée dans beaucoup de domaines, par exemple la résolution des équations différentielles ordinaires et partielles, la physique classique et quantique, les statistiques et probabilités et le traitement des signaux.

C'est surtout dans le premier et le dernier domaine qu'on appliquera les résultats de l'analyse de Fourier. Dans cette section on commencera à voir l'importance de la théorie de Fourier dans le traitement des signaux en dimension 1 (1D).

### 3.6.1 La formule de synthèse des signaux 1D : décomposition sur la base des harmoniques

Un signal discret 1D de dimension  $N$  peut être défini comme l'ensemble des  $N$  échantillons d'une variable, qui peut être dépendant du temps, d'une dimension spatiale ( $x, y$  ou  $z$ ), ou d'un autre paramètre avec un seul degré de liberté.

Deux exemples remarquables de signaux discret 1D qui dépendent du temps ou d'une dimension spatiale sont :

- l'ensemble de valeurs d'intensité d'un morceau de musique échantillonné en correspondance de  $N$  instants temporels différents ;
- l'ensemble de valeurs de niveau de gris d'une ligne ou d'une colonne d'une image échantillonné en correspondance de  $N$  positions différentes.

On peut traiter un signal discrète 1D dans le cadre de la théorie de Fourier avec les identifications basiques suivantes :

- la représentation mathématique abstraite d'un signal discret 1D est donnée par une suite  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  ;
- $n \in \mathbb{Z}_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$  représente la valeur du paramètre (temps, dimension spatiale, etc.) où on mesure les échantillons du signal. L'unité de mesure de  $n$  est typiquement le second ou le mètre ;
- l'énergie du signal  $z$  est associée à la norme carrée  $\|z\|^2$ .

On veut maintenant interpréter la formule de décomposition sur la base de Fourier, les coefficients de Fourier, la DFT et IDFT et l'identité de Plancherel dans le cadre du traitement des signaux.

L'interprétation de l'identité de Plancherel est la plus simple : l'énergie du signal  $z$  est décomposée dans la somme des modules carrés des coefficients de Fourier.

La formule de décomposition sur la base de Fourier, eq. (3.19), dans le domaine du traitement des signaux est dite

$$\text{Formule de synthèse} : z(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m) e^{2\pi i \frac{mn}{N}} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_N.$$

Avec cette formule on peut reconstruire (ou synthétiser, d'où le nom) le signal  $z$  grâce à la connaissance des coefficients de Fourier  $\hat{z}(m)$  et aux fonctions oscillantes  $e^{2\pi i \frac{mn}{N}}$ .

On discutera l'importance de cette formule dans le cours, mais on peut déjà comprendre l'utilité de la formule de synthèse si on prend en considération la figure 3.1, qui montre un signal audio.

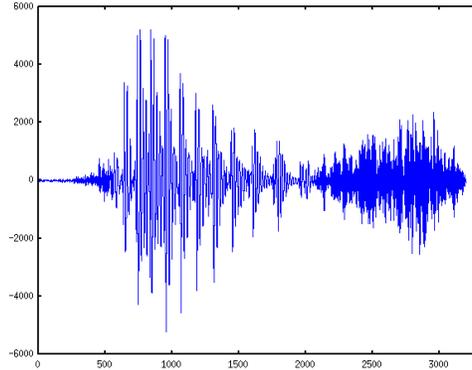


FIGURE 3.1 – Un exemple de signal audio.

Pour pouvoir manipuler le signal audio de la figure, on peut avoir besoin de lui associer une expression analytique. Pour ce faire, on ne peut pas calibrer une composition de fonctions élémentaires, par contre, on peut calculer les coefficients de Fourier  $\hat{z}(m)$  du signal et après le reconstruire analytiquement avec la formule de synthèse.

Les fonctions qu'on utilise dans l'opération de synthèse du signal sont :

$$e^{2\pi i \frac{m}{N} n} = \cos\left(2\pi \frac{m}{N} n\right) + i \sin\left(2\pi \frac{m}{N} n\right). \quad (3.25)$$

Quand  $m = 0$  on n'a pas d'oscillations, mais à partir de  $m = 1$  jusqu'à  $m = N - 1$  les fonctions  $e^{2\pi i \frac{m}{N} n}$  oscillent avec une certaine fréquence (donc l'unité de mesure  $m$  est le *hertz* ou le *rad/s*) qu'on va discuter en détaille dans la section 3.6.4. Ces fonctions ont un nom spéciale, dérivé de la musique, comme le montre la définition suivante.

**Déf. 3.6.1 (Harmoniques)** *La fonction  $n \mapsto e^{2\pi i \frac{1}{N} n}$  est dite harmonique (discrète<sup>4</sup>) fondamentale et les fonctions  $n \mapsto e^{2\pi i \frac{m}{N} n}$  pour  $m = 1, 2, \dots, N - 1$  sont dites harmoniques (discrètes) d'ordre supérieur.*

### 3.6.2 Signification des coefficients de Fourier et spectres d'un signal 1D

La formule de synthèse montre que le signal  $z$  dans la valeur  $n$  de son paramètre est reconstruit par une combinaison linéaire d'ondes harmoniques avec fréquences multiples de  $1/N$  via le coefficient de multiplication  $m : \{0, 1/N, 2/N, \dots, (N - 1)/N\}$ . Les scalaires complexes de la combinaison linéaire sont les coefficients de Fourier  $\hat{z}(m)$ .

Chaque coefficient de Fourier  $\hat{z}(m) \in \mathbb{C}$  peut être écrit ainsi :

$$\hat{z}(m) = a(m) + ib(m) = |\hat{z}(m)| e^{i \text{Arg}(\hat{z}(m))}$$

où  $|\hat{z}(m)| = \sqrt{a(m)^2 + b(m)^2}$  est le module du coefficient de Fourier  $\hat{z}(m)$  et  $\text{Arg}(\hat{z}(m)) = \arctan\left(\frac{b(m)}{a(m)}\right)$  est son argument.

Il est donc évident que le « poids » qui mesure l'importance de chaque harmonique  $e^{2\pi i \frac{m}{N} n}$  dans la reconstruction du signal  $z$  est le module du coefficient de Fourier  $\hat{z}(m)$  :

**$|\hat{z}(m)|$  : mesure de l'importance de l'harmonique  $e^{2\pi i \frac{m}{N} n}$  dans la reconstruction de  $z$ .**

4. On spécifie le fait que les harmoniques sont discrètes, car les harmonique continues sont données par les fonctions  $t \mapsto e^{2\pi i m \nu t} = e^{i m \omega t}$ , où  $\nu$  est la fréquence et  $\omega = 2\pi \nu$  est la pulsation.

Dû à cela, dans le cadre du traitement des signaux, on appelle la formule des coefficients de Fourier :

$$\text{Formule d'analyse} : \hat{z}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n)e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} \quad \forall m \in \mathbb{Z}_N,$$

car avec  $\hat{z}$  on peut *analyser les composantes fréquentielles d'un signal*.

Si le signal discrète  $z$  dépend du temps  $t$  (ou d'une dimension spatiale  $x$ ), alors on dit que la transformation  $z \rightarrow \hat{z}$  réalisée par la DFT permet de passer de la **représentation temporelle (ou spatiale)** du signal à la **représentation fréquentielle**, ou à l'**espace de Fourier**.

La transformée de Fourier est souvent définie comme *l'équivalent du prisme de Newton pour les mathématiques*. Le prisme de Newton permet de décomposer la lumière dans les composantes fréquentielles « cachées » qui correspondent aux couleurs spectrales. La transformée de Fourier nous permet de mettre en évidence les composantes fréquentielles « cachées » dans un signal quelconque.

Cette analogie a amené à donner les définitions suivantes :

**Déf. 3.6.2** *Donné  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , on appelle :*

- $\{|\hat{z}(m)|, m \in \mathbb{Z}_N\}$  : **spectre d'amplitude** de  $z$ , ou plus simplement **spectre** de  $z$  ;
- $\{|\hat{z}(m)|^2, m \in \mathbb{Z}_N\}$  : **spectre de puissance** de  $z$  ;
- $\{\text{Arg}(\hat{z}(m)), m \in \mathbb{Z}_N\}$  : **spectre de phases** de  $z$ .

On reviendra sur la signification de ces spectres plus tard.

Maintenant, on veut observer que, parmi les coefficients de Fourier il y en a un spéciale :  $\hat{z}(0)$ , qui donne une information sur la valeur moyenne de  $z$ , en fait :

$$\hat{z}(0) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n)e^{2\pi i \frac{0n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) = N\langle z \rangle \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\hat{z}(0) = N\langle z \rangle},$$

où  $\langle z \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} z(n)$  est la valeur moyenne du signal  $z$ .

Si on introduit cette expression de  $\hat{z}(0)$  dans la formule de synthèse et on sépare le premier terme du reste de la sommation on obtient :

$$z(n) = \frac{1}{N}N\langle z \rangle + \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N-1} \hat{z}(m)e^{2\pi i \frac{mn}{N}}, \quad \text{i.e.} \quad \boxed{z(n) = \langle z \rangle + \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N-1} \hat{z}(m)e^{2\pi i \frac{mn}{N}}},$$

on dit que le coefficient de Fourier  $\hat{z}(0)$  est la composante « DC » de la formule de synthèse, tandis que les autres termes constituent la composante « AC ». Cette nomenclature vient de l'électrotechnique, où on appelle le courant continue DC « Direct Current » (courant de fréquence nulle) et le courant alternatif AC « Alternating Current ».

On peut interpréter la formule qu'on vient de déterminer en disant que  $z$  est décomposée dans la somme de sa valeur moyenne et des détails plus fins reconstruits par les harmoniques d'ordre supérieur avec des poids donnés par les coefficients de Fourier de  $z$ .

### 3.6.3 La formule de synthèse et les coefficients de Fourier de l'impulsion unitaire $\delta$

C'est instructif de comparer la formule de synthèse avec la formule (3.1), i.e.

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i n \frac{j-k}{N}} = N \delta_{j,k} = \begin{cases} N & j = k \\ 0 & j \neq k, \end{cases}$$

si on réécrit  $j - k = m \in \mathbb{Z}_N$ , on échange  $m$  avec  $n$  (ce qui est possible car sont deux valeurs quelconques de  $\mathbb{Z}_N$ ) et on normalise par  $N$ , alors la formule dévient

$$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{2\pi i n \frac{m}{N}} = \delta(n) = e_0(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n = 1, \dots, N-1, \end{cases}$$

On appelle  $\delta$  l'*impulsion unitaire*. La formule précédente est donc la formule de synthèse de l'impulsion unitaire, dans laquelle on voit que tous les coefficients de Fourier sont unitaires :

$$\widehat{\delta}_0(m) = 1 = \left| \widehat{\delta}_0(m) \right| \quad \forall m \in \mathbb{Z}_N.$$

Ce résultat est très profond : *la DFT transforme un signal complètement localisé dans une valeur de son paramètre en un signal complètement délocalisé dans son spectre : les harmoniques relatives à toutes les fréquences interviennent avec le même poids dans la reconstruction du signal.*

La généralisation de ce comportement à espaces plus compliqués que  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , notamment  $L^2(\Omega)$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  qu'on examinera plus tard, est à la base de la compréhension de ce qu'on appelle le *principe d'indétermination de Heisenberg*, un des noyaux conceptuels de la mécanique quantique.

Si on calcule les coefficients de Fourier du signal constant  $z(n) = \frac{1}{N}$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}_N$ , on obtient :

$$\widehat{z}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} = \delta_0(m) = \begin{cases} 1 & m = 0 \\ 0 & m = 1, \dots, N-1, \end{cases}$$

donc, la DFT d'un signal constant (et donc complètement délocalisé) est une impulsion unitaire dans le domaine de Fourier.

On peut donner une interprétation physique de la formule du lemme (3.1) :  $e^{2\pi i n \frac{m}{N}} = \cos(2\pi n \frac{m}{N}) + i \sin(2\pi n \frac{m}{N}) = 0$  si et seulement si  $\cos(2\pi n \frac{m}{N}) = 0$  et  $\sin(2\pi n \frac{m}{N}) = 0$  quand  $m \in \{1, 2, \dots, N-1\}$ . Donc, le résultat qu'on vient de voir affirme que la superposition de  $N-1$  fonctions harmonique avec des fréquences multiples entières entre elles est nulle, i.e. elles sont sujettes à un phénomène d'interférence destructive.

La formule de synthèse dit que il faut donner des poids différents aux harmoniques pour pouvoir reconstruire un signal différent de zéro.

### 3.6.4 Hautes et basses fréquences $m$ dans la formule de synthèse

On veut comprendre plus en profondeur la signification des coefficients fréquentiels  $m$  dans l'ensemble d'harmoniques :

$$\left\{ e^{2\pi i \frac{mn}{N}} = \cos\left(2\pi \frac{mn}{N}\right) + i \sin\left(2\pi \frac{mn}{N}\right), n = 0, 1, \dots, N-1 \right\},$$

qui représente la valeur des harmoniques dans chacun des  $N$  paramétrés  $n$ .

Pour simplifier l'analyse, on considère seulement la partie réelle de l'ensemble ci-dessus, i.e.

$$H_m = \left\{ \cos\left(2\pi \frac{mn}{N}\right), n = 0, 1, \dots, N-1 \right\},$$

les considérations qu'on fera sur le cosinus peuvent être répétées pour le sinus.

On discute du comportement de  $\cos\left(2\pi \frac{mn}{N}\right)$  quand  $m$  prend les valeurs de 0 jusqu'à  $N-1$ ,  $N$  *paire* (on discutera plus tard du cas  $N$  impaire) :

- $m = 0$  : comme on l'a déjà vu, dans ce cas *on a pas d'oscillations*, mais une suite de valeurs constantes,  $\cos\left(2\pi \frac{0n}{N}\right) = 1$ , donc

$$H_0 = \{1, 1, \dots, 1\};$$

- $m = 1$  :

$$H_1 = \left\{ 1, \cos\left(2\pi \frac{1}{N}\right), \cos\left(2\pi \frac{2}{N}\right), \dots, \cos\left(2\pi \frac{N-1}{N}\right) \right\},$$

les valeurs de  $H_1$  représentent  $N$  échantillons d'*une oscillation du cosinus*. Le cycle n'est pas terminé car on ne considère pas la valeur  $n = N$ , qui permettrait d'obtenir  $\cos\left(2\pi \frac{N}{N}\right) = \cos(2\pi) = 1$ . Dans la figure 3.2 on montre le graphe de  $H_m$  pour  $m = 1$ ,  $N = 16$ .

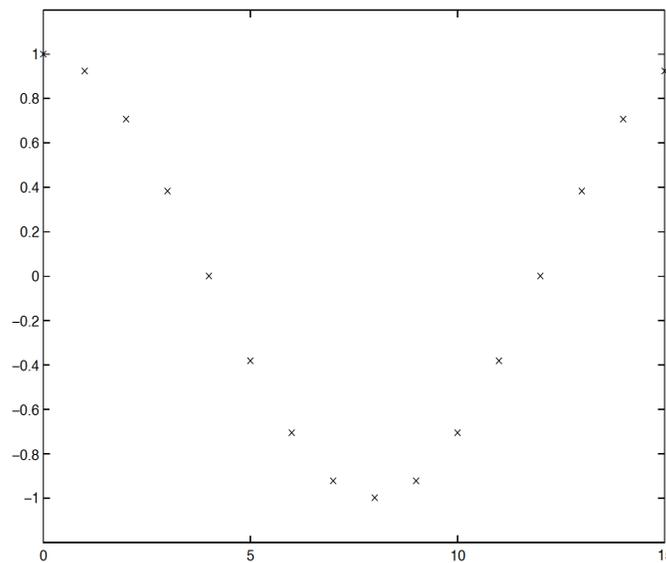


FIGURE 3.2 –  $H_m$  pour  $m = 1, N = 16$ .

—  $m = 2$  :

$$H_2 = \left\{ 1, \cos\left(2\pi\frac{2}{N}\right), \cos\left(2\pi\frac{4}{N}\right), \dots, \cos\left(2\pi\frac{2\frac{N}{2}}{N}\right) = 1, \dots, \cos\left(2\pi\frac{2(N-1)}{N}\right) \right\},$$

les valeurs de  $H_2$  représentent  $N$  échantillons de *deux oscillations du cosinus*. En fait, en correspondance de  $n = N/2$ , un cycle du cosinus est terminé. Dans la figure 3.3 on montre le graphe de  $H_m$  pour  $m = 2, N = 16$ . On voit que pour  $n = 8 = 16/2$  la valeur du cosinus est 1.

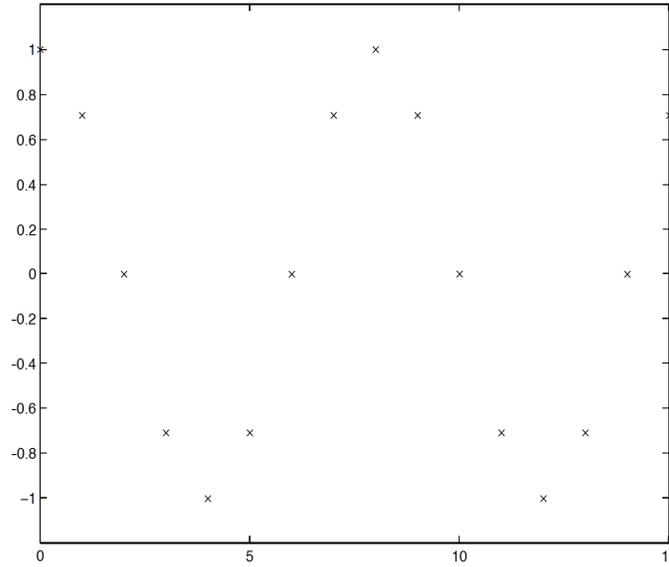


FIGURE 3.3 –  $H$  pour  $m = 2, N = 16$ .

— Si on augmente  $m$  jusqu'à  $N/2$ , on augmente la fréquence des oscillations du cosinus, comme le montre la figure 3.4, qui représente le graphe de  $H_m$  avec  $m = 7, N = 16$ . La fréquence maximale est obtenue quand  $m = N/2$ , en fait, dans ce cas,  $\cos\left(2\pi\frac{\frac{N}{2}n}{N}\right) = \cos(\pi n)$ , donc

$$H_{\frac{N}{2}} = \{(-1)^n, n = 0, 1, \dots, N - 1\}$$

comme le montre la figure 3.5 avec le graphe de  $H_m$  pour  $m = 8, N = 16$ .

— On pourrait penser que la fréquence des oscillations du cosinus augmente jusqu'à  $N - 1$ , mais ceci n'est pas vrai. En fait, à *partir de*  $n = N/2 + 1$ , la *fréquence des oscillations du cosinus décroît*. Pour comprendre ce comportement, on considère  $\cos\left(2\pi\frac{nm}{N}\right)$  quand  $m \in \left\{\frac{N}{2} + 1, \frac{N}{2} + 2, \dots, N - 1\right\}$  et on fait un changement de variable :

$$k = N - m \Leftrightarrow m = N - k, \quad m \in \left\{\frac{N}{2} + 1, \frac{N}{2} + 2, \dots, N - 1\right\} \Leftrightarrow k \in \left\{\frac{N}{2} - 1, \dots, 2, 1\right\},$$

donc quand  $m$  croît de  $\frac{N}{2} + 1$  jusqu'à  $N - 1$ ,  $k$  décroît de  $\frac{N}{2} - 1$  jusqu'à 1. Si on introduit le changement de variable dans le cosinus on obtient :

$$\cos\left(2\pi\frac{n(N-k)}{N}\right) = \cos\left(2\pi n - 2\pi\frac{nk}{N}\right) = \cos\left(-2\pi\frac{nk}{N}\right) = \cos\left(2\pi\frac{nk}{N}\right),$$

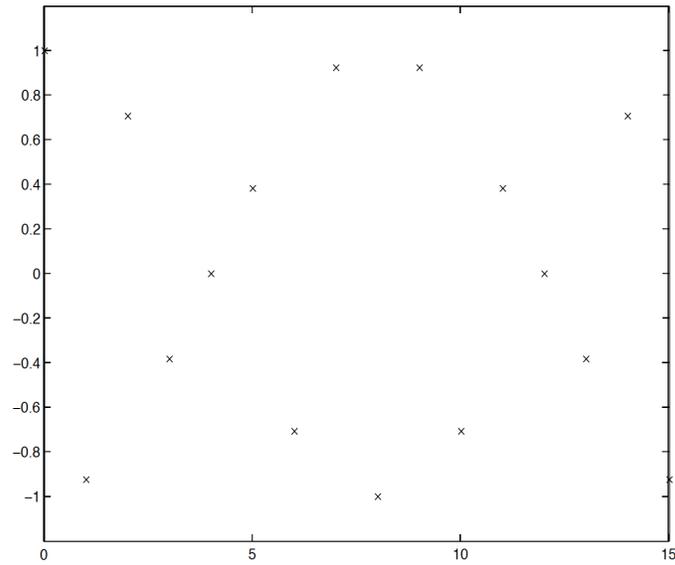


FIGURE 3.4 –  $H_m$  pour  $m = 7, N = 16$ .

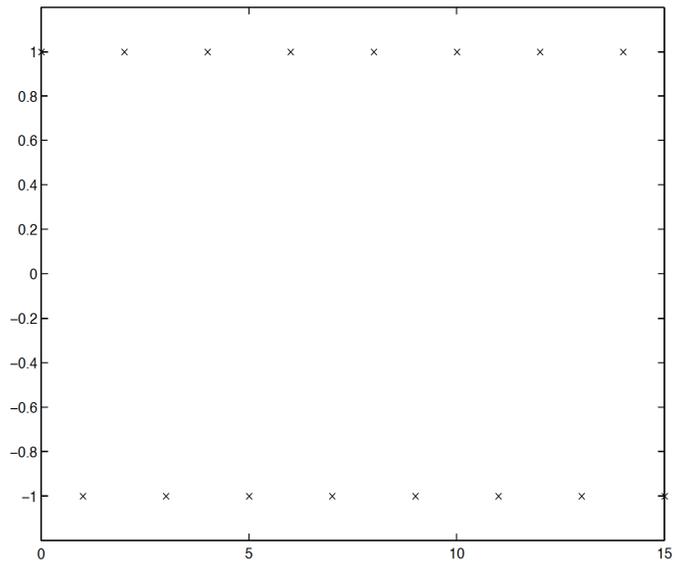


FIGURE 3.5 –  $H_m$  pour  $m = 8, N = 16$ .

on a utilisé la périodicité et la parité du cosinus.  
Par conséquent,

$$\cos\left(2\pi\frac{nm}{N}\right), m \in \left\{\frac{N}{2} + 1, \frac{N}{2} + 2, \dots, N - 1\right\} \Leftrightarrow \cos\left(2\pi\frac{nk}{N}\right), k \in \left\{\frac{N}{2} - 1, \dots, 1\right\},$$

Donc, le nombre d'oscillations harmoniques est maximal pour  $m = N/2$  et symétrique par rapport à cette valeur. Par exemple, le graphe de  $H_m$  pour  $m = 9, N = 16$  est exactement égal au graphe de la figure 3.4, qui représente le graphe

de  $H_m$  avec  $m = 7, N = 16$ . Ainsi comme le graphe de  $m = 15, N = 16$  est exactement égal au graphe de la figure 3.2, qui représente le graphe de  $H_m$  avec  $m = 1, N = 16$ .

- Bien sûr, si  $N$  est *impair*, alors ce qu'on vient de dire est valide pour  $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ , la partie entière de  $\frac{N}{2}$ , i.e. l'entier le plus proche et non supérieur à  $\frac{N}{2}$ .

Les considérations précédentes expliquent pourquoi on appelle :

- **Hautes fréquences** : les valeurs de  $m$  proches de  $\frac{N}{2}$  ;
- **Basses fréquences** : les valeurs de  $m$  proches de 0 ou à  $N - 1$ .

Donc, si dans la formule de synthèse d'un signal discrète  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  on a des coefficients de Fourier  $\hat{z}(m)$  avec un module élevé pour des valeurs de  $m$  proches de  $N/2$ , le signal sera caractérisé par des variations plutôt violentes (par exemple un son aigu, comme pour les *cymbales*). Par contre, si les coefficients de Fourier avec le module plus élevé sont en correspondance des valeurs de  $m$  proches de 0 et à  $N - 1$ , alors le signal sera caractérisé par des variations plus douces (par exemple un bruit grave, comme pour les *tambours*).

La fréquence  $m = N/2$  est dite **fréquence de Nyquist**<sup>5</sup>. Elle est la fréquence harmonique la plus élevée qui peut apparaître dans la formule de synthèse de  $N$  échantillons d'un signal. On reviendra sur ce point très important quand on discutera le théorème d'échantillonnage.

Un exemple utile est donné par un « chirp » (gazouillis), i.e. un signal avec des oscillations qui deviennent de plus en plus rapides, typique de certains oiseaux, mais aussi de certaines images, comme dans la figure 3.6.

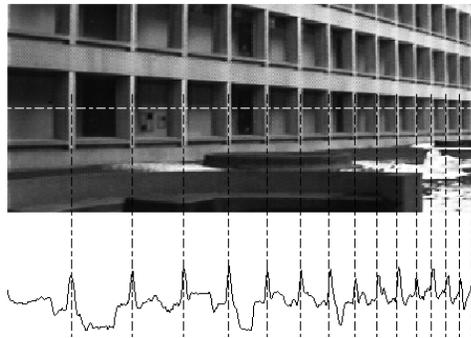


FIGURE 3.6 – Chirp obtenu via une « scanline », i.e. les valeurs d'intensité des pixels d'une ligne d'une image numérique.

La modélisation d'un chirp discret est la suivante :

$$z(n) = \sin\left(\frac{\pi n^2}{T}\right), \quad n \in \mathbb{Z}_N, \quad (3.26)$$

dans la première ligne de la figure 3.7 on montre trois différents chirps avec  $T = 256, 512, 1024$ , tous échantillonnés avec  $N = 128$ . Les graphes des modules des coefficients de Fourier de ces chirps sont montrés dans la deuxième ligne de la figure 3.7. On voit que les coefficients de Fourier  $\hat{z}(m)$  avec  $m$  proches à  $m = 128/2 = 64$  ont un module non négligeable seulement pour le premier chirp, qui a des fréquences élevées. Par contre, pour les deux derniers chirps, seulement les coefficients de Fourier  $\hat{z}(m)$  avec  $m$  proches à  $m = 0$  et  $m = 128$  ont un module non négligeable.

5. Harry Nyquist, ingénieur suédois (1889-1976).

### 3.6.5 Visualisation du spectre d'amplitude

La caractérisation des hautes fréquences  $m$  comme celles proches à  $N/2$  n'est pas intuitive. Pour éviter ce problème, certains auteurs identifient  $\mathbb{Z}_N$  aux ensembles suivants :

$$\text{Si } N = 2M \text{ (paire), } \mathbb{Z}_N = \{-M + 1, -M + 2, \dots, -1, 0, 1, \dots, M - 1, M\}, \quad (3.27)$$

$$\text{Si } N = 2M + 1 \text{ (impaire), } \mathbb{Z}_N = \{-M, -M + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, M - 1, M\}. \quad (3.28)$$

Grâce à ces translations, les hautes fréquences correspondent aux valeurs de  $m$  proches à  $M$  et les basses fréquences aux valeurs de  $m$  proches de 0. La troisième ligne de la figure 3.7 montre comment les spectres d'amplitude changent avec la translation.

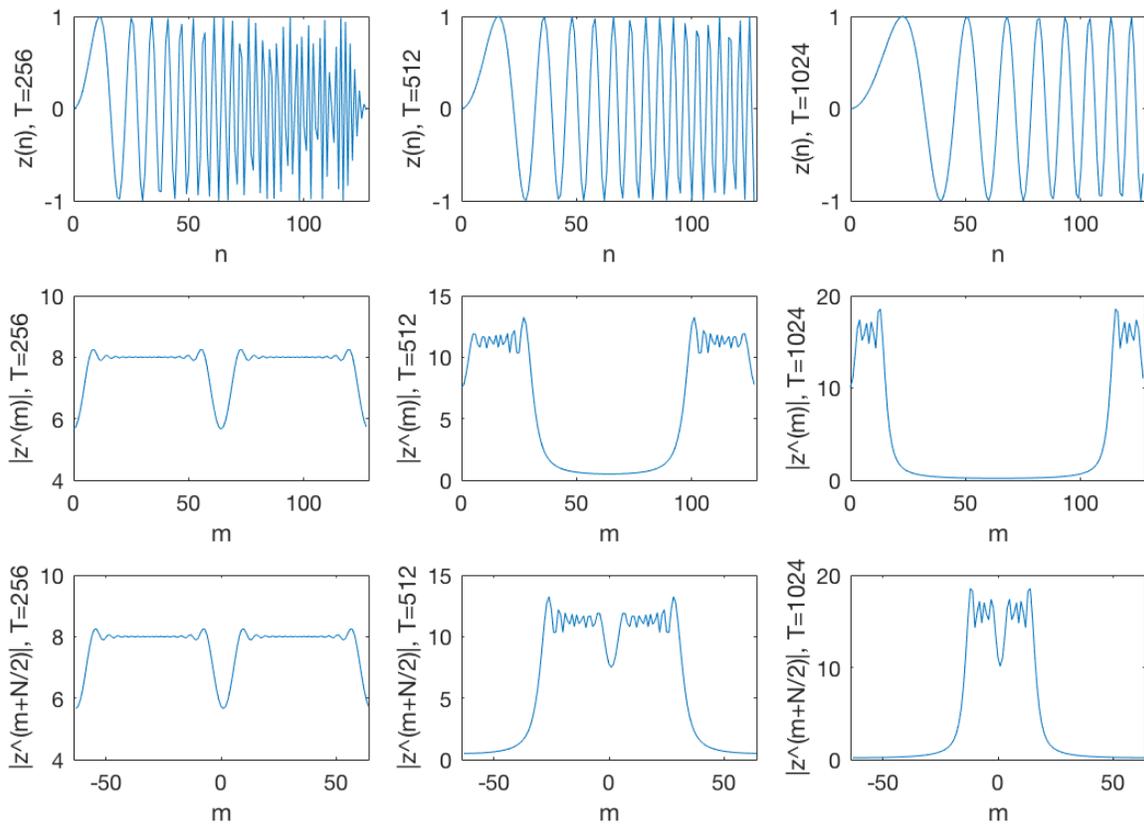


FIGURE 3.7 – Première ligne, de gauche à droite : chirps obtenus avec la formule (3.26),  $T = 256, 512, 1024$  et  $N = 128$ . Abscisses :  $n$ , ordonnées :  $z(n)$ . Deuxième ligne, de gauche à droite : modules des coefficients de Fourier des chirps de la première ligne. Troisième ligne, de gauche à droite : modules des coefficients de Fourier des chirps de la première ligne **translatés** pour avoir les basses fréquences dans le centre et les hautes aux côtés gauche et droit.

On peut observer que le chirp avec des fréquences plus élevées a un spectre d'amplitude qui s'étale loin de la fréquence centrale, par contre les deux chirps avec fréquences plus basses ont leur spectres d'amplitude confinés à côté de la région centrale.

Dans les trois cas, on note que l'amplitude de  $\hat{z}(0)$  est petite, cela est dû au fait que les oscillations positives et négatives tendent à se balancer et donc que  $\langle z \rangle$  tend vers 0.

Le code Matlab pour générer les graphes des spectres d'amplitude est disponible ci-dessous.

```

1 % samples
2 n=0:127;
3 n_centered=-63:64;
4 % signals
5 z1=sin(pi*n.^2/256); z2=sin(pi*n.^2/512); z3=sin(pi*n.^2/1024);
6 % non centered amplitude spectra
7 w1=abs(fft(z1)); w2=abs(fft(z2)); w3=abs(fft(z3));
8 % centered amplitude spectra, fftshift implements the centering
9 v1=abs(fftshift(fft(z1))); v2=abs(fftshift(fft(z2))); ...
   v3=abs(fftshift(fft(z3)));
10 %graphs :
11 subplot(3,3,1); plot(n,z1); subplot(3,3,2); plot(n,z2); subplot(3,3,3); ...
   plot(n,z3);
12 subplot(3,3,4); plot(n,w1); subplot(3,3,5); plot(n,w2); subplot(3,3,6); ...
   plot(n,w3);
13 subplot(3,3,7); plot(n_centered,v1); subplot(3,3,8); plot(n_centered,v2); ...
   subplot(3,3,9); plot(n_centered,v3);

```

### 3.6.6 Filtrage de signaux dans la représentation fréquentielle

Grâce à la DFT on peut modifier très facilement le contenu fréquentiel d'un signal, par exemple pour augmenter l'importance des basses ou des hautes fréquences.

Le schéma standard consiste à passer à l'espace de Fourier avec la DFT et après à manipuler les coefficients de Fourier, selon nos nécessités, avec un *filtre*  $f : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , qui peut être une transformation linéaire o non-linéaire. On termine par l'application de la IDFT à la suite des coefficients de Fourier modifiés pour reconstruire le signal original avec les modifications fréquentielles désirées.

Le schéma du traitement des signaux dans la représentation fréquentielle est montré dans la figure 3.8.

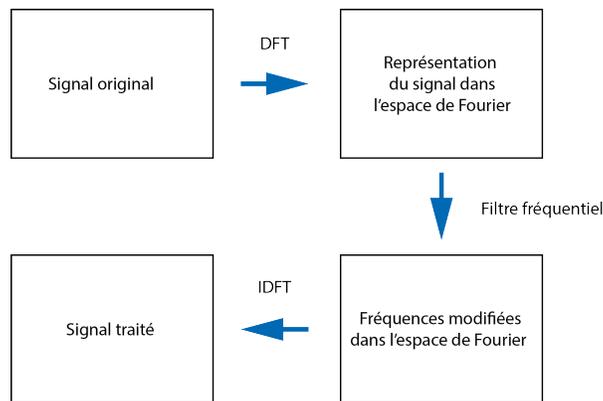


FIGURE 3.8 – Schéma d'un filtrage dans le domaine de Fourier.

On souligne que dans la composition de transformations  $IDFT \circ f \circ DFT$  seulement  $f$  peut changer l'énergie du signal, car la composition entre la transformée de Fourier et la transformation inverse donne l'identité et donc elle préserve l'énergie du signal original.

Parmi toutes les filtres  $f$ , il existe un filtre très importante, qu'on va définir dans la sous-section 3.6.7 et qui nous permettra de définir le concept de multiplicateur de Fourier dans la sous-section 3.6.8.

### 3.6.7 L'opérateur de multiplication et sa représentation matricielle diagonale

Soit  $w : \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{C}$  une suite fixé de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ .

**Déf. 3.6.3** On appelle **opérateur de multiplication** par la suite  $w$ , l'application linéaire ci-dessous :

$$\begin{aligned} M_w : \ell^2(\mathbb{Z}_N) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_N) \\ z &\longmapsto M_w(z) = w \cdot z, \end{aligned}$$

où  $M_w(z) = w \cdot z : \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{C}$  est la suite définie par produit ponctuel entre  $w$  et  $z$  :

$$\boxed{M_w z(n) = (w \cdot z)(n) = w(n) \cdot z(n)} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_N.$$

On observe que, si on représente  $z$  comme un vecteur colonne dans la base canonique de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , alors la matrice associée à l'opérateur  $M_w$  par rapport à la base canonique de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  est une matrice diagonale  $D_w$  qui a comme éléments diagonaux les composantes de la suite  $w$ , en fait :

$$D_w z = \begin{pmatrix} w(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w(N-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(0) \\ \vdots \\ z(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w(0)z(0) \\ \vdots \\ w(N-1)z(N-1) \end{pmatrix}.$$

*Exemple d'opérateur de multiplication* : on considère la suite de  $\ell^2(\mathbb{Z}_6)$  donnée par  $z = (2, 3 - i, 2i, 4 + i, 0, 1)$  et la suite  $w(n) = i^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}_6$ , alors :

$$(w(0) = 1, w(1) = i, w(2) = -1, w(3) = -i, w(4) = 1, w(5) = i),$$

et donc

$$(M_w z)(n) = (1 \cdot 2, i \cdot (3 - i), -1 \cdot 2i, -i \cdot (4 + i), 1 \cdot 0, i \cdot 1) = (2, 3i + 1, -2i, -4i + 1, 0, i).$$

On peut maintenant introduire le multiplicateur de Fourier.

### 3.6.8 Le multiplicateur de Fourier et l'égalisateur graphique

Ici on va donner un exemple remarquable de filtre fréquentiel, dit multiplicateur de Fourier, qu'on va rencontrer aussi dans la section 3.8.

**Déf. 3.6.4** Donnée une suite  $w : \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{C}$ , on appelle **multiplicateur de Fourier** par la suite  $w$ , l'opérateur ci-dessous :

$$\begin{aligned} T_{(w)} : \ell^2(\mathbb{Z}_N) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_N) \\ z &\longmapsto T_{(w)}(z) = \widehat{w \cdot \hat{z}}, \end{aligned}$$

i.e.  $T_{(w)}$  est l'opérateur donné par la composition suivante :

$$\boxed{T_{(w)} = \text{IDFT} \circ M_w \circ \text{DFT}},$$

i.e.

$$\begin{array}{ccccccc}
\ell^2(\mathbb{Z}_N) & \xrightarrow{\text{DFT}} & \ell^2(\mathbb{Z}_N) & \xrightarrow{M_w} & \ell^2(\mathbb{Z}_N) & \xrightarrow{\text{IDFT}} & \ell^2(\mathbb{Z}_N) \\
z & \mapsto & \text{DFT}(z) = \hat{z} & \mapsto & M_w(\text{DFT}(z)) = w \cdot \hat{z} & \mapsto & \text{IDFT}(M_w(\text{DFT}(z))) = \widetilde{w \cdot \hat{z}}.
\end{array}$$

Si on applique la DFT aux deux côtés de la définition de  $T_{(w)}$ , on voit que l'action du multiplicateur de Fourier est diagonale dans la base de Fourier  $F$  :

$$\text{DFT } T_{(w)}z = [T_{(w)}z]_F = M_w \circ \text{DFT } z = M_w \hat{z}, \quad \forall z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N). \quad (3.29)$$

Alors,  $T_{(w)}$  multiplie les coefficients de Fourier de  $z$  par les composantes de la suite  $w$  (ce qui explique le nom de l'opérateur). Donc, on peut :

- **Atténuer les basses fréquences** du signal  $z$  en choisissant une suite  $w(m)$  avec  $|w(m)|$  petit quand  $m \simeq 0$  et  $m \simeq N - 1$  ;
- **Atténuer les hautes fréquences** du signal  $z$  en choisissant une suite  $w(m)$  avec  $|w(m)|$  petit quand  $m \simeq N/2$  ;
- **Booster (amplifier) les basses fréquences** du signal  $z$  en choisissant une suite  $w(m)$  avec  $|w(m)|$  grand quand  $m \simeq 0$  et  $m \simeq N - 1$  ;
- **Booster les hautes fréquences** du signal  $z$  en choisissant une suite  $w(m)$  avec  $|w(m)|$  grand quand  $m \simeq N/2$ .

Ceci est utilisé dans l'égalisateur graphique représenté dans la figure 3.9 pour régler le niveau des aigües et des basses dans un signal audio.

Bien évidemment, si on opère les translations de  $\mathbb{Z}_N$  définies par les formules (3.27) ou (3.28), le cas échéant, alors il faut définir à nouveau les suites  $w(n)$  pour s'adapter au fait que, dans ce cas, les basses fréquences sont seulement celles proches de  $m = 0$ .



FIGURE 3.9 – Un exemple d'égalisateur graphique. On dit graphique car les fréquences sont ordonnées selon un graphe qui permet de comprendre d'une façon immédiate si la fréquence qu'on change est haute ou basse.

### 3.7 Propriétés de la DFT

Dans cette section on démontrera les plus importantes propriétés de la DFT. On commence par rappeler la propriété de translation de l'indice d'une sommation :

$$\sum_{i=n_0}^n a_i = \sum_{i=n_0-k}^{n-k} a_{i+k} = \sum_{i=n_0+k}^{n+k} a_{i-k}, \quad (3.30)$$

qu'on utilisera souvent, et on anticipe un lemme qui sera très utile dans le développement de plusieurs démonstrations.

**Lemme 3.7.1** Soit  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $N$ -périodique,  $N \in \mathbb{N}$  :

$$f(n + aN) = f(n) \quad \forall a, n \in \mathbb{Z}.$$

Alors, pour tout  $m \in \mathbb{Z}$  :

$$\boxed{\sum_{n=m}^{m+N-1} f(n) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)},$$

i.e. la somme de  $f$  ( $N$ -périodique) sur tout intervalle de taille  $N$  est constante.

*Preuve.* Si  $m = 0$  il n'y a rien à prouver, soit alors  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $m \neq 0$ . On commence à considérer  $m > 0$ , alors :

$$\sum_{n=m}^{m+N-1} f(n) = \sum_{n=0}^{m+N-1} f(n) - \sum_{n=0}^{m-1} f(n) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) + \sum_{n=N}^{m+N-1} f(n) - \sum_{n=0}^{m-1} f(n),$$

mais, en utilisant (3.30),

$$\sum_{n=N}^{m+N-1} f(n) = \sum_{n=0}^{m-1} f(n + N) = \sum_{n=0}^{m-1} f(n)$$

grâce à la  $N$ -périodicité de  $f$ , donc :

$$\sum_{n=m}^{m+N-1} f(n) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) + \sum_{n=0}^{m-1} f(n) - \sum_{n=0}^{m-1} f(n) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n).$$

Si  $m < 0$ , la démonstration est analogue. □

#### 3.7.1 La périodicité de $\hat{z}$ et $\check{z}$

Par la suite, on examinera les plus importantes propriétés des objets de la théorie de Fourier discrète et on les appliquera à des problèmes pratiques. Néanmoins, il y a une propriété qu'on doit démontrer tout de suite pour pouvoir interpréter correctement l'analyse de Fourier discrète : la périodicité de  $\hat{z}$  et  $\check{z}$ .

Par calcul direct, si  $a \in \mathbb{Z}$ , on obtient que :

$$\hat{z}(m + aN) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i \frac{(m+aN)n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} e^{-2\pi i \frac{aNn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} e^{-2\pi a ni} = \hat{z}(m),$$

car  $e^{-2\pi ani} = \cos(2\pi an) - i \sin(2\pi an) = 1$ . Avec le même calcul on arrive à démontrer que  $\check{z}(n + aN) = \check{z}(n) \forall a \in \mathbb{Z}$ .

Donc, exactement comme pour les suites  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , on peut étendre la définitions de  $\hat{z}$  et  $\check{z}$  à  $\mathbb{Z}$  en définissant les deux *suites N-périodiques* :

$$\begin{aligned} \hat{z} : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ m &\longmapsto \boxed{\hat{z}(m) = \hat{z}(m + aN)}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \check{z} : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ n &\longmapsto \boxed{\check{z}(n) = \check{z}(n + aN)}, \end{aligned}$$

où  $a \in \mathbb{Z}$  est tel que  $m + aN \in \mathbb{Z}_N$ , ou  $n + aN \in \mathbb{Z}_N$ , respectivement.

### 3.7.2 DFT et translation (invariance du spectre par translations)

On veut examiner maintenant comment varie la DFT d'un signal  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  si on fait une translation de  $z$  avec une quantité différente de  $N$ . Pour formaliser ceci, on va introduire un autre opérateur de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ .

**Déf. 3.7.1** Soit  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . On appelle **opérateur de translation à droite** de la quantité  $k$ , l'application linéaire ci-dessous :

$$\begin{aligned} R_k : \ell^2(\mathbb{Z}_N) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_N) \\ z &\longmapsto R_k(z), \end{aligned}$$

où  $R_k(z) : \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{C}$  est la suite définie par la formule :

$$\boxed{R_k z(n) = z(n - k)} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_N.$$

*Exemple d'opérateur de translation* :  $N = 6, k = 2, z = (2, 3 - i, 2i, 4 + i, 0, 1)$ . Alors :

$$\begin{cases} R_2 z(0) = z(0 - 2) = z(-2) = z(-2 + 6) = z(4) = 0 \\ R_2 z(1) = z(1 - 2) = z(-1) = z(-1 + 6) = z(5) = 1 \\ \vdots \end{cases}$$

on obtient :  $R_2 z = (0, 1, 2, 3 - i, 2i, 4 + i)$ , on voit que l'effet de  $R_2$  sur  $z$  est juste de déplacer à droite de 2 positions les éléments de la suite. Droite = Right en anglais, c'est pour cela qu'on trouve souvent l'opérateur de translation à droite écrit avec la lettre  $R$ .

On observe que les 2 derniers éléments sont tournés dans les deux premières positions comme dans un cercle. Pour cette raison  $R_k$  est aussi connu comme **opérateur de translation circulaire** ou *opérateur de rotation*.

On veut comprendre comment caractériser la composition de l'opérateur de translation avec la DFT et, inversement, de la DFT avec l'opérateur de translation. On commence avec la dernière composition :  $\text{DFT}(z(n - k))$ , i.e.

$$\begin{array}{ccccc}
\ell^2(\mathbb{Z}_N) & \xrightarrow{R_k} & \ell^2(\mathbb{Z}_N) & \xrightarrow{\text{DFT}} & \ell^2(\mathbb{Z}_N) \\
z & \longmapsto & R_k z & \longmapsto & (\text{DFT} \circ R_k)z = \text{DFT}(R_k z) = \widehat{R_k z}.
\end{array}$$

Le théorème suivant montre que l'action de l'opérateur  $R_k$  est transformée par la DFT en la multiplication par un exponentiel complexe.

**Théorème 3.7.1** *Soit  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  et soit  $k \in \mathbb{Z}$ . Alors :*

$$\widehat{R_k z}(m) = e^{-2\pi i \frac{mk}{N}} \hat{z}(m) \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \quad (3.31)$$

i.e. si on définit la suite  $\omega_N^k \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ ,  $\omega_N^k(m) = \omega_N^{mk} = e^{-2\pi i \frac{mk}{N}} \quad \forall m \in \mathbb{Z}$ , alors :

$$\boxed{\text{DFT} \circ R_k = M_{\omega_N^k} \circ \text{DFT}}. \quad (3.32)$$

*Preuve.*

$$\begin{aligned}
\widehat{R_k z}(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} (R_k z)(n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} z(n-k) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} \\
&= \sum_{n=-k}^{N-k-1} z(n-k+k) e^{-2\pi i \frac{m(n+k)}{N}} \\
&= \sum_{n=-k}^{N-k-1} z(n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} e^{-2\pi i \frac{mk}{N}}.
\end{aligned}$$

Le facteur  $e^{-2\pi i \frac{mk}{N}}$  ne dépend pas de l'indice  $n$ , donc on peut le sortir de la sommation :

$$\begin{aligned}
\widehat{R_k z}(m) &= e^{-2\pi i \frac{mk}{N}} \sum_{n=-k}^{N-k-1} z(n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} \\
&\stackrel{\text{(Lemme 3.7.1)}}{=} e^{-2\pi i \frac{mk}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} \\
&= e^{-2\pi i \frac{mk}{N}} \hat{z}(m).
\end{aligned}$$

On a pu appliquer le lemme 3.7.1 car, par hypothèse,  $z$  est  $N$ -périodique et l'exponentielle  $e^{-2\pi i \frac{mn}{N}}$  est elle-même une fonction  $N$ -périodique.  $\square$

On observe que, si on écrit  $\hat{z}(m) = |\hat{z}(m)| e^{i \text{Arg}(\hat{z}(m))}$ , alors, comme  $\left| e^{-2\pi i \frac{mk}{N}} \right| = 1$ , le produit  $e^{-2\pi i \frac{mk}{N}} \hat{z}(m)$  change seulement la phase de  $\hat{z}(m)$ , c'est pour cette raison qu'on dit que **la DFT transforme la translation dans un changement de phase.**

**Invariance du spectre par translation.** Le théorème ci-dessus théorème montre une limitation importante de la transformée de Fourier. En fait :

$$\left| e^{-2\pi i \frac{mk}{N}} \right| = 1 \implies |\widehat{R_k z}(m)| = |\hat{z}(m)| \quad \forall m, k \in \mathbb{Z},$$

donc, les modules des coefficients de Fourier de  $z$  et de toutes ses translations sont égaux. Par conséquent, **dans le module des coefficients de Fourier  $|\hat{z}(m)|$ , on a l'information sur l'importance de la fréquence  $m$  dans le signal  $z$ , mais pas de sa position dans le signal même.**

Pour souligner encore plus clairement ce comportement, reconsidérons l'impulsion unitaire et faisons une translation quelconque :  $R_k \delta$ , le spectre de ce signal est  $|R_k \delta(m)| = |e^{-2\pi i \frac{mk}{N}} \hat{\delta}(m)|$ , mais on a vu que  $\hat{\delta}(m) = 1$  pour tout  $m \in \mathbb{Z}_N$ , donc  $|R_k \delta(m)| = |e^{-2\pi i \frac{mk}{N}}| = 1$ . Ceci montre que le spectre de l'impulsion unitaire et celui de toutes ses translations sont exactement les mêmes ! Donc, la seule information du spectre ne peut pas permettre de reconstruire la localisation spatiale du signal, pour le faire il faut utiliser aussi l'information donnée par la phase, qui, néanmoins, n'est pas une quantité simple à interpréter et manipuler.

Une alternative est donnée par deux transformations qui *localisent* la transformée de Fourier : la transformée de Gabor et la transformée en ondelettes. L'étude de ces opérateurs va au delà du but de ce cours.

Maintenant on analyse la composition entre l'opérateur de translation et la DFT :  $\hat{z}(m-k)$ , i.e.

$$\begin{array}{ccccc} \ell^2(\mathbb{Z}_N) & \xrightarrow{\text{DFT}} & \ell^2(\mathbb{Z}_N) & \xrightarrow{R_k} & \ell^2(\mathbb{Z}_N) \\ z & \mapsto & \text{DFT}(z) & \mapsto & (R_k \circ \text{DFT})z = \hat{z}(m-k). \end{array}$$

**Théorème 3.7.2** Avec les hypothèses du théorème 3.7.1 ça vaut la formule :

$$(R_k \hat{z})(m) = \hat{z}(m-k) = \left( e^{2\pi i \frac{nk}{N}} z \right) (m), \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \quad (3.33)$$

i.e.

$$R_k \circ \text{DFT} = \text{DFT} \circ M_{(\omega_N^k)^*}. \quad (3.34)$$

*Preuve.*

$$(R_k \hat{z})(m) = \hat{z}(m-k) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i \frac{(m-k)n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} \left( e^{2\pi i \frac{kn}{N}} z(n) \right) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} = \left( e^{2\pi i \frac{kn}{N}} z \right) (m). \quad \square$$

On peut résumer les propriétés qu'on vient d'analyser avec les couples de Fourier suivantes : Elles montrent que l'opération de translation dans la représentation originale de  $z$  devient un changement de phase dans l'espace de Fourier et que, vice-versa, l'opérations de translation dans l'espace de Fourier correspond à un changement de phase (avec une phase conjuguée) dans la représentation originale de  $z$ .

Représentation originale	Espace de Fourier
$z(n - k)$	$e^{-2\pi i \frac{km}{N}} \hat{z}(m)$
$e^{2\pi i \frac{kn}{N}} z(n)$	$\hat{z}(m - k)$

Un **cas remarquable** est donné par la situation suivante :  $N$  pair et  $k = N/2$ , alors :

$$e^{-\frac{2\pi im}{N} \frac{N}{2}} = e^{-\pi im} = (e^{-\pi i})^m = (-1)^m$$

et :

$$e^{\frac{2\pi in}{N} \frac{N}{2}} = e^{\pi in} = (e^{\pi i})^n = (-1)^n.$$

Alors :

$$\text{DFT} \left( z \left( n - \frac{N}{2} \right) \right) = (-1)^m \hat{z}(m), \quad \hat{z} \left( m - \frac{N}{2} \right) = (\widehat{(-1)^n z})(m), \quad (3.35)$$

on voit que multiplier par  $(-1)^n$  la suite  $z$  correspond à faire une translation de  $N/2$  de son spectre. Cette opération est donc une alternative à la translation de l'espace des paramètres  $\mathbb{Z}_N$  (formules (3.27) et (3.28)) pour centrer le spectre en  $m = 0$ !

Une application intéressante de la formule de la DFT de la translation est donnée par le calcul des coefficients de Fourier de l'impulsion unitaire : on a vu que  $\hat{\delta}_0(m) = 1 \forall m \in \mathbb{Z}_N$ , donc, si on considère  $R_k \delta_0(n) = \delta_0(n - k)$ , alors  $\widehat{R_k \delta_0}(m) = e^{-2\pi i \frac{mk}{N}} \hat{\delta}_0(m) = e^{-2\pi i \frac{mk}{N}}$ . Cela montre que le spectre de l'impulsion unitaire translatée de la quantité  $k$  est encore complètement délocalisé :  $|\widehat{R_k \delta_0}(m)| = 1 \forall m \in \mathbb{Z}_N$ . La différence avec le cas de l'impulsion unitaire non-translatée c'est que, pour elle, le spectre est réel et donc  $|\hat{\delta}_0(m)| = \hat{\delta}_0(m) = 1 \forall m \in \mathbb{Z}_N$ .

Pour terminer, une observation sur le rapport entre la formule (3.32) et la représentation diagonale de l'opérateur  $R_k$ . Si on compose les membres de gauche et de droite de la formule (3.32) avec la IDFT on obtient :

$$\text{DFT} \circ R_k \circ \text{IDFT} = M_{\omega_N^k}.$$

Si on écrit avec  $A_k$  et  $D_{\omega_N^k}$  (diagonale, cfr. section 3.6.7) les matrices associées à l'opérateur  $R_k$  et  $M_{\omega_N^k}$  par rapport à la base canonique, alors on peut réécrire l'équation antérieure comme ceci :

$$W_N A_k W_N^{-1} = D_{\omega_N^k},$$

qui montre que la matrice  $A_k$  associée à l'opérateur de translation  $R_k$  est semblable à la matrice diagonale  $D_{\omega_N^k}$ .

La matrice inversible qui réalise la conjugaison matricielle entre  $A_k$  et  $D_{\omega_N^k}$  est la matrice de Vandermonde-Fourier  $W_N$ , donc on peut dire que l'action de l'opérateur de translation  $R_k$  est diagonale dans l'espace de Fourier. On reviendra sur le concept de diagonalisation d'un opérateur linéaire dans la sous-section 3.7.4 et, plus en profondeur, dans la section 3.8.

### 3.7.3 DFT et conjugaison

Donnée une suite  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , on définit la suite complexe conjuguée  $z^*$  comme ceci :  $z^* = (z^*(0), z^*(1), \dots, z^*(N-1))$ , i.e.  $z^*(n) = z(n)^* \forall n \in \mathbb{Z}_N$ .

Le théorème suivant montre la relation entre DFT et conjugaison.

**Théorème 3.7.3** *Pour toute  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  ça vaut que :*

$$\widehat{z^*}(m) = (\widehat{z}(-m))^* = (\widehat{z}(N-m))^* \quad \forall m \in \mathbb{Z}_N.$$

*Preuve.*

$$\widehat{z^*}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n)^* e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} = \left( \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{2\pi i \frac{mn}{N}} \right)^* = \left( \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i \frac{(-m)n}{N}} \right)^* = (\widehat{z}(-m))^*,$$

$(\widehat{z}(N-m))^* = (\widehat{z}(-m))^*$  par périodicité. □

**Corollaire 3.7.1**  *$z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  est réelle, i.e.  $z(n) \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{Z}_N$ , si et seulement si*

$$\widehat{z}(m) = (\widehat{z}(-m))^* = (\widehat{z}(N-m))^*, \quad \forall m \in \mathbb{Z}_N.$$

*$\widehat{z} \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  est réelle, i.e.  $\widehat{z}(m) \in \mathbb{R} \forall m \in \mathbb{Z}_N$ , si et seulement si*

$$z(n) = (z(-n))^* = (z(N-n))^*, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_N.$$

*Preuve.* Comme la DFT est un isomorphisme de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ ,  $z$  est réelle, i.e.  $z = z^*$ , si et seulement si  $\widehat{z} = \widehat{z^*}$ , mais, grâce au théorème ci-dessus, ça vaut quand  $\widehat{z}(m) = (\widehat{z}(-m))^* = (\widehat{z}(N-m))^*$ .

$\widehat{z}$  est réelle si et seulement si  $\widehat{z} = (\widehat{z})^*$ , mais le théorème ci-dessus dit que  $(\widehat{z}(-m))^* = \widehat{z^*}(m) \forall m \in \mathbb{Z}_N$ , ce qui implique  $(\widehat{z}(m))^* = \widehat{z^*}(-m)$ , par simple échange de variable  $m \leftrightarrow -m$ .  
Donc :

$$\text{IDFT}((\widehat{z}(m))^*) = \text{IDFT}(\widehat{z^*}(-m)) = \text{IDFT}(\text{DFT}(z^*(-m))) = z^*(-n) = (z(-n))^*.$$

Par conséquent,  $\widehat{z}$  est réelle  $\iff \widehat{z}(m) = (\widehat{z}(m))^* \iff \text{IDFT}(\widehat{z}(m)) = \text{IDFT}((\widehat{z}(m))^*) \iff z(n) = (z(-n))^* = (z(N-n))^* \forall n \in \mathbb{Z}_N$ . □

Une conséquence immédiate du résultat ci-dessus est le corollaire suivant.

**Corollaire 3.7.2** *Si  $z, \widehat{z} \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  sont simultanément réelles si et seulement si elles sont symétriques par rapport à 0, i.e.  $z(n) = z(-n)$  et  $\widehat{z}(m) = \widehat{z}(-m)$ ,  $\forall m, n \in \mathbb{Z}_N$ .*

### 3.7.4 DFT et convolution

Une des plus importantes propriétés de la transformée de Fourier est liée à l'opération de convolution. Pour introduire cette opération on va rappeler la formule relative au produit de polynômes.

$$\text{Si } P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_ix^i \text{ et } Q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m = \sum_{j=0}^m b_jx^j,$$

alors :

$$P(x)Q(x) = \sum_{\ell=0}^{n+m} c_\ell x^\ell, \quad \text{où} \quad c_\ell = \sum_{k=0}^{\ell} a_{\ell-k}b_k = \sum_{k=0}^{\ell} a_k b_{\ell-k}. \quad (3.36)$$

Exemple :  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ ,  $Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ , alors :

$$P(x)Q(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)x^3 + (a_2b_2)x^4,$$

les coefficients des puissances de la variable  $x$  vérifient la formule (3.36). On observe que, dans les coefficients  $c_\ell$ , on a une somme de produits des coefficients  $a_i$  et  $b_j$ , avec la particularité que la somme des indice  $i + j$  est toujours égale à  $\ell$  et que l'indice d'une variable croît et l'indice de l'autre décroît.

Cela c'est la caractéristique qui définit l'opération de convolution (discrète), qu'on va introduire dans l'espace  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ .

**Déf. 3.7.2** Soient  $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . La convolution entre  $z$  et  $w$ , écrite  $z * w$ , est la suite de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  avec composantes définies par :

$$(z * w)(n) = \sum_{k=0}^{N-1} z(n-k)w(k) = \sum_{k=0}^{N-1} w(n-k)z(k), \quad \forall n \in \mathbb{Z}_N.$$

La convolution est *symétrique*, i.e.  $z * w = w * z$ , grâce à la commutativité du produit en  $\mathbb{C}$ .

Exemple :  $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z}_4)$ ,  $z = (1, 1, 0, 2)$ ,  $w = (i, 0, 1, 2)$ , avec la périodicité canonique :  $z(n + kN) = z(n)$  et  $w(n + kN) = w(n) \forall n \in \mathbb{Z}_N$  et  $k \in \mathbb{Z}$ . Alors :

$$\begin{aligned} (z * w)(0) &= \sum_{k=0}^{4-1} z(0-k)w(k) = \sum_{k=0}^3 z(-k)w(k) \\ &= z(0)w(0) + z(-1)w(1) + z(-2)w(2) + z(-3)w(3) \\ &= z(0)w(0) + z(4-1)w(1) + z(4-2)w(2) + z(4-3)w(3) \\ &= z(0)w(0) + z(3)w(1) + z(2)w(2) + z(1)w(3) \\ &= 1 \cdot i + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ &= i + 2 \end{aligned}$$

On obtient également :  $(z * w)(1) = 2 + i$ ,  $(z * w)(2) = 1 + 2i$ ,  $(z * w)(3) = 1 + 3i$ , et donc :  $(z * w) = (i + 2, 2 + i, 1 + 2i, 1 + 3i)$ .

L'interaction entre DFT et convolution a la propriété magnifique décrite dans le théorème suivant.

**Théorème 3.7.4** Soient  $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . Alors :

$$\boxed{\text{DFT}(z * w)(m) = \hat{z}(m) \cdot \hat{w}(m)} \iff \boxed{(z * w)(n) = \text{IDFT}(\hat{z} \cdot \hat{w})(n)} \quad \forall n, m \in \mathbb{Z} \quad (3.37)$$

$$\boxed{\text{IDFT}(\hat{z} * \hat{w})(n) = Nz(n) \cdot w(n)} \iff \boxed{(\hat{z} * \hat{w})(m) = N \text{DFT}(z \cdot w)(m)} \quad \forall n, m \in \mathbb{Z} \quad (3.38)$$

i.e. la transformée de Fourier de la convolution entre  $z$  et  $w$  est le produit ponctuel des transformées de Fourier et, vice-versa, la transformée de Fourier inverse de la convolution entre  $\hat{z}$  et  $\hat{w}$  est  $N$  fois le produit ponctuel de  $z$  et  $w$ . Autrement dit, on a les couples de Fourier suivantes :

Représentation originale	Espace de Fourier
$z * w$	$\hat{z} \cdot \hat{w}$
$Nz \cdot w$	$\hat{z} * \hat{w}$

*Preuve.* Par définition :

$$\widehat{(z * w)}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} (z * w)(n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} \left( \sum_{k=0}^{N-1} z(n-k)w(k) \right) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}}.$$

On réécrit l'exponentiel comme ceci :

$$e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} = e^{-2\pi i \frac{m(n-k+k)}{N}} = e^{-2\pi i \frac{m(n-k)+mk}{N}} = e^{-2\pi i \frac{m(n-k)}{N}} e^{-2\pi i \frac{mk}{N}}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \widehat{(z * w)}(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} z(n-k)w(k) e^{-2\pi i \frac{m(n-k)}{N}} e^{-2\pi i \frac{mk}{N}} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} w(k) e^{-2\pi i \frac{mk}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} z(n-k) e^{-2\pi i \frac{m(n-k)}{N}} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} w(k) e^{-2\pi i \frac{mk}{N}} \sum_{n=-k}^{N-k-1} z(n-k+k) e^{-2\pi i \frac{m(n-k+k)}{N}} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} w(k) e^{-2\pi i \frac{mk}{N}} \sum_{n=-k}^{N-k-1} z(n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} w(k) e^{-2\pi i \frac{mk}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} \\ &\stackrel{\text{(Lemme 3.7.1)}}{=} \hat{w}(m) \hat{z}(m) = \hat{z}(m) \hat{w}(m), \end{aligned}$$

on observe qu'on a pu appliquer le Lemme 3.7.1 car il est valide pour n'importe quel  $k \in \mathbb{Z}$ . Alors :

$$\widehat{(z * w)}(m) = \hat{z}(m) \hat{w}(m), \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

La preuve du fait que  $\text{IDFT}(\hat{z} * \hat{w})(n) = z(n) \cdot w(n)$  est très similaire. Par définition :

$$\text{IDFT}(\hat{z} * \hat{w})(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} (\hat{z} * \hat{w})(m) e^{2\pi i \frac{mn}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left( \sum_{k=0}^{N-1} \hat{z}(m-k) \hat{w}(k) \right) e^{2\pi i \frac{mn}{N}}.$$

On réécrit l'exponentiel comme ceci :

$$e^{2\pi i \frac{mn}{N}} = e^{2\pi i \frac{n(m-k+k)}{N}} = e^{2\pi i \frac{n(m-k)+nk}{N}} = e^{2\pi i \frac{n(m-k)}{N}} e^{2\pi i \frac{nk}{N}}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \text{IDFT}(\hat{z} * \hat{w})(n) &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{z}(m-k) \hat{w}(k) e^{2\pi i \frac{n(m-k)}{N}} e^{2\pi i \frac{nk}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{w}(k) e^{2\pi i \frac{nk}{N}} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m-k) e^{2\pi i \frac{n(m-k)}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{w}(k) e^{2\pi i \frac{nk}{N}} \sum_{m=-k}^{N-k-1} \hat{z}(m-k+k) e^{2\pi i \frac{n(m-k+k)}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{w}(k) e^{2\pi i \frac{nk}{N}} \sum_{m=-k}^{N-k-1} \hat{z}(m) e^{2\pi i \frac{mn}{N}} \\ &\stackrel{(\text{Lemme 3.7.1})}{=} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{w}(k) e^{2\pi i \frac{nk}{N}} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m) e^{2\pi i \frac{mn}{N}} \\ &= N \left( \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{w}(k) e^{2\pi i \frac{nk}{N}} \right) \cdot \left( \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m) e^{2\pi i \frac{mn}{N}} \right) \\ &= N \text{IDFT} \hat{w}(n) \cdot \text{IDFT} \hat{z}(n) = N w(n) \cdot z(n) = N z(n) \cdot w(n). \end{aligned}$$

□

*Observations :*

- Pendant les étapes de la preuve, on ne peut pas remplacer  $\sum_{k=0}^{N-1} w(k) e^{-2\pi i \frac{mk}{N}}$  avec  $\hat{w}(m)$  avant de la dernière étape, car dans la deuxième sommation il y a encore l'indice  $k$ . Seulement quand on élimine la présence de  $k$  on peut remplacer avec  $\hat{w}(m)$ .
- Les formules (3.37) montrent une espèce de propriété distributive par rapport à la convolution et au produit ponctuel : **quand la DFT est appliquée à un produit de convolution, elle est répartie sur les facteurs et la convolution devient un produit ponctuel**, vice-versa, **quand la IDFT est appliquée à un produit produit ponctuel, elle est répartie sur les facteur et le produit ponctuel devient une convolution**. Donc :

$$\text{DFT}(\check{z} * \check{w}) = z \cdot w, \quad \text{IDFT}(z \cdot w) = \check{z} * \check{w} \quad \forall z, w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N). \quad (3.39)$$

- Grâce à la transformée de Fourier, *on peut transformer une opération complexe comme la convolution dans le simple produit de transformées de Fourier* (qu'on peut calculer rapidement avec la FFT). Ce résultat est très utilisé dans les applications de traitement

des signaux. Si on utilise la normalisation relative à la base orthonormale pour définir la DFT, alors on voit apparaître de coefficients dans la formule de la DFT de la convolution. Ces coefficients peuvent être très grands, surtout quand on considère la DFT en dimensions supérieures à 1 et/ou signaux massifs, et cela peut créer des erreurs numériques pendant les calculs. C'est surtout à cause de la simplicité de cette formule que beaucoup d'auteurs et de logiciels privilégient la définition de coefficients de Fourier qu'on a donné dans ce cours plutôt qu'autres définitions.

- Souvent, la convolution est faite entre un signal  $z$  et un autre signal  $w$  qui est différent de 0 seulement dans un support de taille  $T$ . La valeur de  $T$  est importante pour choisir si effectuer la convolution directement ou en passant par la FFT. La complexité de l'opération de convolution directe est  $\mathcal{O}(NT)$ , par contre, si on utilise la FFT, la complexité est  $\mathcal{O}(N \log N)$ . Par conséquent, il est avantageux de transformer la convolution en un produit ponctuel avec la FFT dès que  $T > \log(N)$ . Pour donner un exemple concret, si  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , avec  $N = 1000$ , alors  $\log(N) \simeq 7$  et donc il est conseillé de faire la convolution  $z * w$  dans le domaine de Fourier dès que le support de  $w$  est supérieur à 7.

Si on fixe un vecteur dans la convolution, on peut définir l'endomorphisme de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  suivant :

**Déf. 3.7.3** Fixée une suite  $w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , on appelle **opérateur de convolution** avec  $w$  la transformation linéaire suivante :

$$\begin{aligned} T_w : \ell^2(\mathbb{Z}_N) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_N) \\ z &\longmapsto T_w(z) = z * w. \end{aligned}$$

Comme pour le cas de l'opérateur de translation, on peut donner une représentation diagonale de l'opérateur de convolution. Pour cela, on réécrit la formule (3.37) sans spécifier l'indice  $m$  (car elle vaut pour n'importe quel indice), i.e.  $\text{DFT}(z * w) = \hat{z} \cdot \hat{w}$ , mais  $\text{DFT}(z * w) = (\text{DFT} \circ T_w)z$  et  $\hat{z} \cdot \hat{w} = M_{\hat{w}} \hat{z} = (M_{\hat{w}} \circ \text{DFT})z$ , i.e.  $(\text{DFT} \circ T_w)z = (M_{\hat{w}} \circ \text{DFT})z \forall z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , donc on peut écrire la relation entre opérateurs  $\text{DFT} \circ T_w = M_{\hat{w}} \circ \text{DFT}$ .

Si on compose avec la IDFT à gauche et à droite de l'expression antécédente on obtient :

$$\text{DFT} \circ T_w \circ \text{IDFT} = M_{\hat{w}}.$$

On va expliciter cette relation dans la base canonique  $B$ , comme dans le cas de l'opérateur de translation. DFT et IDFT deviennent  $W_N$  et  $W_N^{-1}$  et l'opérateur de multiplication  $M_{\hat{w}}$  devient la matrice diagonale  $D_{\hat{w}} = \text{diag}(\hat{w}(0), \dots, \hat{w}(N-1))$ . Si la matrice  $A_w = [T]_B$ , alors :

$$W_N A_w W_N^{-1} = D_{\hat{w}},$$

ce qui montre que l'action de l'opérateur de convolution est diagonalisée dans la base de Fourier.

Les cas des opérateurs de translation et de convolution ne sont pas spéciaux, en fait il existe une catégorie spécifique d'opérateurs dont l'action est diagonale dans la base de Fourier. Ces opérateurs s'appellent *stationnaires* et ils sont examinés en détail dans la section suivante.

Le fait d'avoir déjà examiné les opérateurs de convolution et les multiplicateurs de Fourier nous permettra de montrer un résultat très importante : l'opérateur de convolution et le multiplicateur de Fourier sont les prototypes des opérateurs stationnaires, dans le sens que l'action de tout opérateur stationnaire peut être transformée en une convolution ou un multiplicateur de Fourier.

### 3.8 La DFT et les opérateurs stationnaires

La transformée de Fourier a une relation particulière avec une classe d'opérateurs qu'on dit « stationnaires ». En fait, elle permet de diagonaliser ces opérateurs et de montrer qu'ils sont équivalents à des opérateurs de convolution et, aussi, à des multiplicateurs de Fourier.

Après avoir défini précisément les opérateurs stationnaires, pour démontrer les résultats mentionnés ci-dessus, on devra aussi introduire une catégorie de matrices, dites circulantes, qui représentent les opérateurs stationnaires dans la base canonique de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ .

Pour motiver la définition d'opérateur stationnaire, imaginons de devoir transformer un signal audio  $z$  avec un appareil  $T$ . Si on transmet le signal  $z$  avec un retard  $\Delta t$  et le seul effet sur  $T$  est de retarder également la sortie du signal transformé de la quantité  $\Delta t$ , alors on dit que l'appareil  $T$  est stationnaire.

Autrement dit, si l'action de  $T$  sur le signal  $A$  est indépendante de l'instant de temps dans lequel on l'applique à  $A$ , alors  $T$  est stationnaire.

Si  $R_k$  est l'opérateur de translation de la quantité  $k \in \mathbb{Z}$ , alors la stationnarité de  $T$  est traduite par la relation suivante :

$$T(R_k z) = R_k(Tz), \quad \forall z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N).$$

En fait, le côté de gauche représente l'action de l'opérateur  $T$  sur le signal  $z$  décalé de la quantité  $k$ , tandis que le côté de droite représente le décalage de l'action de l'opérateur  $T$  sur le signal original  $z$ . Le diagramme commutatif suivant résume ce qu'on vient de discuter.

$$\begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{Z}_N) & \xrightarrow{R_k} & \ell^2(\mathbb{Z}_N) \\ T \downarrow & & \downarrow T \\ \ell^2(\mathbb{Z}_N) & \xrightarrow{R_k} & \ell^2(\mathbb{Z}_N) \end{array}$$

Cette considération donne la motivation pour la définition suivante.

**Déf. 3.8.1** *Un opérateur en  $T : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  est dit **stationnaire** (ou invariant par translation) si*

$$T(R_k z) = R_k(Tz), \quad \forall z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N), \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (3.40)$$

*i.e.  $T$  est stationnaire s'il commute avec tout opérateur de translation  $R_k$  :*

$$\boxed{T \circ R_k = R_k \circ T}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (3.41)$$

On démontrera dans la section 3.8.5 qu'un opérateur linéaire  $T$  sur  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  est stationnaire si et seulement si  $T$  a cette expression :

$$(Tz)(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k z(n-k) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k R_k z(n), \quad \forall n \in \{0, \dots, N-1\},$$

où  $a_k \in \mathbb{C}$ .

*Exemple* :  $(Tz)(n) = 3z(n-2) + iz(n) - (2+i)z(n+1)$  est un opérateur stationnaire de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ .

*Exemple d'opérateur non stationnaire* :  $T : \ell^2(\mathbb{Z}_4) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_4)$ ,

$$Tz = \left( \underbrace{2z(0) - z(1)}_{Tz(0)}, \underbrace{iz(1) + 2z(2)}_{Tz(1)}, \underbrace{z(1)}_{Tz(2)}, \underbrace{0}_{Tz(3)} \right).$$

On considère, par exemple,  $z = (1, 0, -2, i)$  et on va vérifier que  $T(R_1z) \neq R_1(Tz)$ , cela montrera que  $T$  n'est pas stationnaire.

$$T(1, 0, -2, i) = (2 \cdot 1 - 0, i \cdot 0 + 2 \cdot (-2), 0, 0) = (2, -4, 0, 0),$$

alors  $R_1T(1, 0, -2, i) = (0, 2, -4, 0)$ .

Par contre,  $R_1(1, 0, -2, i) = (i, 1, 0, -2) = \tilde{z} = (\tilde{z}(0), \tilde{z}(1), \tilde{z}(2), \tilde{z}(3))$ , alors

$$T(R_1(1, 0, -2, i)) = T(\tilde{z}) = (2\tilde{z}(0) - \tilde{z}(1), i\tilde{z}(1) + 2\tilde{z}(2), \tilde{z}(1), 0) = (2 \cdot i - 1, i \cdot 1 + 2 \cdot 0, 1, 0) = (2i - 1, i, 1, 0).$$

En définitive, on a :

$$R_1T(1, 0, -2, i) = (0, 2, -4, 0) \neq (2i - 1, i, 1, 0) = TR_1(1, 0, -2, i),$$

alors, il existe au moins un  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_4)$  pour lequel  $T$  ne commute pas avec un opérateur de translation, et donc  $T$  ne peut pas être stationnaire.

### 3.8.1 La DFT et la diagonalisation des opérateurs stationnaires

On pourrait résumer dans un seul théorème les plus importantes propriétés de la DFT en relation aux opérateurs stationnaires, mais on préfère souligner le fait que la transformée de Fourier diagonalise les opérateurs stationnaires dans un énoncé séparé.

**Théorème 3.8.1** *Soit  $T \in \text{End}(\ell^2(\mathbb{Z}_N))$  un opérateur linéaire stationnaire. Alors,  $T$  est diagonalisable, en fait chaque élément de la base orthogonale de Fourier  $F_m$  de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  est un vecteur propre de  $T$ .*

*Preuve.* Pour chaque  $m \in \{0, \dots, N-1\}$  fixé, on considère l'élément  $m$  de la base orthogonale de Fourier :  $F_m(n) = \frac{1}{N} e^{2\pi i \frac{mn}{N}}$ .

Comme  $T$  est un endomorphisme,  $TF_m \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , et donc on peut décomposer  $TF_m$  sur la base  $(F_0, \dots, F_{N-1})$  elle-même :

$$(TF_m)(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k F_k(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{2\pi i \frac{kn}{N}}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_N. \quad (3.42)$$

On considère maintenant l'action de l'opérateur de translation  $R_1$  sur  $F_m$  :

$$\begin{aligned} R_1 F_m(n) &= F_m(n-1) = \frac{1}{N} e^{2\pi i \frac{m(n-1)}{N}} = e^{-2\pi i \frac{m}{N}} \cdot \frac{1}{N} e^{2\pi i \frac{mn}{N}} \\ &= e^{-2\pi i \frac{m}{N}} \cdot F_m(n). \end{aligned}$$

Si on applique  $T$  à  $R_1 F_m$  on obtient :

$$\begin{aligned} TR_1 F_m(n) &= T \left( e^{-2\pi i \frac{m}{N}} \cdot F_m(n) \right) \\ &\stackrel{\text{Linéarité de } T}{=} e^{-2\pi i \frac{m}{N}} (TF_m)(n) \\ &\stackrel{\text{éq. (3.42)}}{=} e^{-2\pi i \frac{m}{N}} \sum_{k=0}^{N-1} a_k F_k(n) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-2\pi i \frac{m}{N}} F_k(n). \end{aligned}$$

Maintenant on permute l'ordre de composition entre  $R_1$  et  $T$  :

$$\begin{aligned} R_1 TF_m(n) &= TF_m(n-1) \\ &\stackrel{\text{éq. (3.42)}}{=} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{2\pi i \frac{k(n-1)}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-2\pi i \frac{k}{N}} \cdot e^{2\pi i \frac{kn}{N}} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-2\pi i \frac{k}{N}} F_k(n). \end{aligned}$$

Mais  $T$  est stationnaire, donc  $TR_1F_m = R_1TF_m$ , i.e.

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-2\pi i \frac{m}{N}} F_k(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-2\pi i \frac{k}{N}} F_k(n),$$

mais grâce au théorème d'unicité de la décomposition sur une base :

$$a_k e^{-2\pi i \frac{m}{N}} = a_k e^{-2\pi i \frac{k}{N}}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_N, \text{ (} m \text{ est fixé)}. \quad (3.43)$$

On analyse cette égalité : si  $k = m$ , alors l'éq. (3.43) devient une identité et on a rien à discuter. Pour examiner le cas  $k \neq m$  il faut rappeler que  $m, k \in \{0, \dots, N-1\}$ , donc le cos et le sin des exponentiels complexes prennent leurs valeurs dans un période seulement, car la période suivante commence quand  $m, k = N$  ! Donc :

$$k \neq m \implies e^{-2\pi i \frac{m}{N}} \neq e^{-2\pi i \frac{k}{N}},$$

et l'éq. (3.43) peut être vérifiée si et seulement si  $a_k = 0 \forall k \neq m$ .

En conséquence, l'éq. (3.42) devient

$$TF_m(n) = a_m F_m(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z}_N,$$

c'est à dire,  $F_m$  est un vecteur propre de  $T$  avec une valeur propre  $a_m$  qui est donnée par l' $m$ -ième coefficient de la décomposition de  $TF_m$  sur la base orthogonale de Fourier. Bien sûr  $a_m$  dépend de  $T$  (dans le théorème 3.8.2 on verra comment expliciter  $a_m$  avec la DFT).

On rappelle qu'on a fixé un indice  $m$  arbitraire, donc tout élément de la base orthogonale de Fourier est un vecteur propre de  $T$ , et, par conséquent,  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  a une base de vecteurs propres de  $T$ . Par définition,  $T$  est diagonalisable.  $\square$

On peut donner une interprétation matricielle du théorème qu'on vient de voir : en fait, on sait que l'action de la DFT est représentée par la matrice  $W_N$  définie dans l'éq. (3.5) et que  $W_N$  est la matrice de passage de la base canonique  $B$  de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  à la base de Fourier  $F$  de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , avec inverse  $W_N^{-1} = \frac{1}{N} W_N^*$ , qui représente la matrice de passage de base de  $F$  à  $B$ .

Si on applique le théorème 2.10.2 à notre cas<sup>6</sup>, on obtient que, si  $A$  est la matrice associée à  $T$  par rapport à la base canonique de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  et  $D$  est la matrice diagonale des valeurs propres de  $A$ , alors :

$$\boxed{D = W_N A W_N^{-1}}, \quad \boxed{A = W_N^{-1} D W_N}. \quad (3.44)$$

On peut vérifier directement ces équations. On rappelle qu'avec la notation  $[w]_F$  on décrit un vecteur quelconque  $w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  avec ses composantes par rapport à la base de Fourier  $F$ , alors :

$$W_N A z = [Az]_F \underset{(F \text{ diagonalise } A)}{=} D[z]_F = D W_N z, \quad \forall z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N),$$

donc  $W_N A = D W_N$ , si et seulement si :  $W_N A W_N^{-1} = D W_N W_N^{-1} = D$ .

---

6. Observer que le rôle de la matrice  $P$  dans le théorème 2.10.2 est joué, dans notre cas, par la matrice  $W_N^{-1}$ , car c'est elle qui permet de passer de la base de vecteurs propres de  $A$  à la base canonique.

### 3.8.2 Matrices circulantes

Pour pouvoir énoncer et démontrer le théorème fondamental relatif au lien entre transformée de Fourier et opérateurs stationnaires, on doit introduire un dernier objet : les matrices circulantes.

On commence par généraliser la périodicité des suites de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  aux matrices : donnée une matrice  $A = (a_{mn})_{m,n=0}^{N-1}$ , on dit que  $A$  est une **matrice  $N$ -périodique** si :

$$a_{m+kN,n} = a_{m,n} \quad \text{et} \quad a_{m,n+kN} = a_{m,n}, \quad \forall m, n, k \in \mathbb{Z}.$$

*Exemple* :  $a_{0,2} = a_{N,2} = a_{N,N+2}$ .

**Déf. 3.8.2** Soit  $A = (a_{mn})_{m,n=0}^{N-1}$  une matrice  $N \times N$  périodique.  $A$  est dite **circulante** si :

$$\boxed{a_{m+1,n+1} = a_{m,n}}, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z},$$

si on répète  $k$  fois la translation, on peut réécrire la définition comme ceci :

$$a_{m+k,n+k} = a_{m,n}, \quad \forall m, n, k \in \mathbb{Z},$$

on observe que, comme  $k \in \mathbb{Z}$ , on peut définir une matrice périodique circulante aussi avec la propriété :  $a_{m-k,n-k} = a_{m,n}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

L'interprétation de la définition est la suivante : la ligne (colonne)  $m+1$  ( $n+1$ ) est obtenue de la ligne (colonne)  $m$  ( $n$ ) par translation à droite (en bas) d'une position, comme on peut le voir dans la matrice suivante.

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{N-1} \\ a_{N-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{N-2} \\ a_{N-2} & a_{N-1} & a_0 & \dots & a_{N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{pmatrix}.$$

*Exemple de matrice circulante* :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2+i & -1 & 4i \\ 4i & 3 & 2+i & -1 \\ -1 & 4i & 3 & 2+i \\ 2+i & -1 & 4i & 3 \end{pmatrix}.$$

*Exemple de matrice non-circulante* :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & i & 3 \\ 3 & 2 & i \\ i & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pour être circulante, la 3-ième ligne devrait être  $(i, 3, 2)$ .

### 3.8.3 La caractérisation exhaustive des opérateurs stationnaires

Le théorème suivante, le plus important du chapitre, permettra d'expliciter les valeurs propres d'un opérateur stationnaire  $T$  d'une façon très simple et aussi de caractériser  $T$  comme opérateur de convolution, dans la représentation originale de  $z$ , et comme un multiplicateur, dans la représentation fréquentielle.

**Théorème 3.8.2** *Soit  $T : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  un endomorphisme. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (1)  $T$  est stationnaire ;
- (2) La matrice  $A$  qui représente  $T$  dans la base canonique de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  est circulante ;
- (3)  $T$  est un opérateur de convolution ;
- (4)  $T$  est un multiplicateur de Fourier ;
- (5) La matrice  $D$  qui représente  $T$  dans la base orthogonale de Fourier  $F$  est diagonale.

On note qu'on a déjà démontré l'implication (1)  $\Rightarrow$  (5) On démontrera le théorème avec la stratégie suivante :

$$\boxed{(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)} \quad \text{et} \quad \boxed{(3) \Leftrightarrow (4)} \quad \text{et} \quad \boxed{(4) \Leftrightarrow (5)}$$

La preuve du théorème a une importance fondamentale, car elle donne une technique explicite pour trouver les valeurs propres de  $T$  et pour construire l'opérateur de convolution et le multiplicateur de Fourier qui représentent  $T$ .

*Preuve.*

$\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$  : soit  $A$  la matrice associée à  $T$  via la base canonique<sup>7</sup>  $(e_n)_{n=0}^{N-1}$  de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  :

$$A = \begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,N-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N-1,0} & a_{N-1,1} & \cdots & a_{N-1,N-1} \end{pmatrix}.$$

Par définition de matrice associée on a :  $a_{m,n} = (Te_n)(m)$ , i.e. la  $n$ -ième colonne de  $A$  est le vecteur  $Te_n$ .

En utilisant le fait que  $T$  est stationnaire, on doit démontrer que :

$$a_{m+1,n+1} = a_{m,n} \quad \Longleftrightarrow \quad (Te_{n+1})(m+1) = (Te_n)(m), \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}_N.$$

On observe que :

$$(R_1 e_n)(m) = e_n(m-1) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m-1 \\ 0 & \text{si } n \neq m-1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} m = n+1 \\ m \neq n+1 \end{cases} = e_{n+1}(m) \quad \forall m \in \mathbb{Z}_N,$$

7. On rappelle que  $e_n(m) = \delta_{n,m}$ ,  $\forall n, m \in \mathbb{Z}_N$ .

donc  $e_{n+1} = R_1 e_n$  et alors :

$$a_{m+1,n+1} = (TR_1 e_n)(m+1) \underset{(T \text{ stationnaire})}{=} R_1(Te_n)(m+1) = (Te_n)(m+1-1) = (Te_n)(m) = a_{m,n}.$$

Comme  $a_{m+1,n+1} = a_{m,n} \forall m, n \in \mathbb{Z}_N$ , alors  $A$  est circulante et l'implication  $\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$  est démontrée.

$\boxed{(2) \Rightarrow (3)}$  : soit  $A$  une matrice périodique circulante, i.e.  $a_{m,n} = a_{m-k,n-k} \forall n, m, k \in \mathbb{Z}$ , on doit démontrer qu'il existe  $h \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  tel que  $Az = z * h = T_h(z) \forall z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ .

On va prouver que la suite  $h$  qu'on cherche est la première colonne de  $A$ , i.e. :

$$\boxed{h = Te_0} = \begin{pmatrix} a_{0,0} \\ \vdots \\ a_{N-1,0} \end{pmatrix}, \quad h(m) = a_{m,0}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}_N.$$

On observe que  $h(m-n) = a_{m-n,0} = a_{m-n,n-n} \underset{(A \text{ circulante})}{=} a_{m,n}$ , et alors, par définition de produit matrice par vecteur, on a :

$$(Az)(m) = \sum_{n=0}^{N-1} a_{m,n} z(n) = \sum_{n=0}^{N-1} h(m-n) z(n) = (h * z)(m)$$

et l'implication  $\boxed{(2) \Rightarrow (3)}$  est démontrée.

$\boxed{(3) \Rightarrow (1)}$  : il faut prouver qu'un opérateur de convolution  $T_w$  est stationnaire, i.e. :

$$(T_w \circ R_k)(z) = (R_k \circ T_w)(z), \quad \forall z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N), \forall k \in \mathbb{Z}.$$

On calcule d'abord le côté gauche de l'équation :

$$(T_w R_k z)(m) = (w * R_k z)(m) = \sum_{n=0}^{N-1} w(m-n) R_k z(n) = \sum_{n=0}^{N-1} w(m-n) z(n-k).$$

On va faire le changement d'indice suivant :  $\ell = n - k \Leftrightarrow n = k + \ell$ , la variabilité de  $\ell$  est :

$$\begin{cases} n = 0 \implies \ell = -k \\ \vdots \\ n = N-1 \implies \ell = N-1-k, \end{cases}$$

alors :

$$\begin{aligned} (T_w R_k z)(m) &= \sum_{\ell=-k}^{N-1-k} w(m-k-\ell) z(\ell) \underset{\text{Lemme 3.7.1}}{=} \sum_{\ell=0}^{N-1} w((m-k)-\ell) z(\ell) \\ &= (z * w)(m-k) = R_k(z * w)(m) = (R_k T_w z)(m), \end{aligned}$$

et donc l'implication  $\boxed{(3) \Rightarrow (1)}$  est démontrée.

$\boxed{(3) \iff (4)}$  : on doit démontrer qu'un opérateur linéaire  $T : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  est un opérateur de convolution si et seulement si  $T$  est un multiplicateur de Fourier.

Si on fixe un élément  $w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , quelconque, on a :

$$\begin{aligned} T_w(z) &= z * w = \text{IDFT}(\text{DFT}(z * w)) \stackrel{\text{(Th. 3.37)}}{=} \text{IDFT}(\hat{z} \cdot \hat{w}) = \text{IDFT}(\hat{w} \cdot \hat{z}) \\ &= (\text{IDFT} \circ M_{\hat{w}} \circ \text{DFT})(z) = T_{(\hat{w})}(z), \quad \forall w, z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N), \end{aligned}$$

où  $M_{\hat{w}}$  est l'opérateur de multiplication par la suite  $\hat{w}$ . Vice-versa :

$$\begin{aligned} T_{(w)}(z) &= (\text{IDFT} \circ M_w \circ \text{DFT}z) = \text{IDFT}(w \cdot \hat{z}) \stackrel{\text{éq. (3.39)}}{=} \check{w} * \check{\hat{z}} = \check{w} * z \\ &= T_{\check{w}}(z) \quad \forall w, z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N), \end{aligned}$$

Cela montre que **l'opérateur de convolution avec  $w$  peut être interprété comme le multiplicateur de Fourier par  $\hat{w}$  et vice-versa, le multiplicateur de Fourier par  $w$  peut être interprété comme l'opérateur de convolution avec  $\check{w}$**  :

$$\boxed{T_w = T_{(\hat{w})}}, \quad \boxed{T_{(w)} = T_{\check{w}}} \quad \forall w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N).$$

La double implication  $\boxed{(3) \iff (4)}$  est donc démontrée.

Avant de passer à la dernière étape de la preuve, on résume ce qu'on a vu jusqu'à ce moment : un opérateur stationnaire  $T : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  est représenté par une matrice circulante  $A$  relativement à la base canonique  $(e_0, \dots, e_{N-1})$  de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ .

La matrice  $A$ , à ça fois, peut être représentée par l'opérateur de convolution  $T_h$  avec  $h = Te_0$ , la première colonne de  $A$  ou, comme l'on vient de le voir, par le multiplicateur de Fourier  $T_{(\hat{h})}$ , où  $\hat{h}$  est la suite des coefficients de Fourier de  $h$ .

$\boxed{(4) \iff (5)}$  : On doit prouver que  $T$  est un multiplicateur de Fourier  $T_{(w)}$ , si et seulement si la matrice associée à  $T$  par rapport à la base orthogonale de Fourier  $F$  est diagonale.

L'implication directe a déjà été démontrée dans la formule (3.29), nous allons donc à démontrer tout simplement l'implication  $(5) \implies (4)$  : dire que  $D = \text{diag}(d_{n,n})$ ,  $n = 0, \dots, N-1$ , est la matrice diagonale qui représente l'opérateur  $T$  dans la base de Fourier  $F$  veut dire que

$$[T(z)]_F = D[z]_F \iff \text{DFT} \circ T(z) = M_w \circ \text{DFT}(z),$$

étant  $M_w$  l'opérateur de multiplication par la suite  $w(n) = d_{n,n}$ ,  $n = 0, \dots, N-1$ . Si on applique la IDFT aux deux côtes :

$$T(z) = \text{IDFT} \circ M_w \circ \text{DFT}(z) \quad \forall z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N),$$

mais alors  $T = T_{(w)}$  et l'implication  $(5) \implies (4)$  est démontrée.

Le théorème est donc complètement prouvé.  $\square$

Le théorème qu'on vient de démontrer donne une technique standard pour l'étude des opérateurs stationnaires  $T$  sur  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . On rappelle que la suite :

$$\delta \in \ell^2(\mathbb{Z}_N), \quad \delta(n) = e_0(n) = \delta_{0,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_N,$$

est dite **impulsion unitaire**, alors l'opérateur  $T$  est complètement déterminé par son **action sur**  $\delta$ ,  $h = T\delta$ , qu'on appelle **réponse impulsionnelle**.  $\hat{h}$ , la DFT de la réponse impulsionnelle, est dite **fonction de transfert**.

En fait, grâce aux propriétés démontrées dans les théorèmes 3.8.1 et 3.8.2, on peut résumer l'analyse des opérateurs stationnaires comme ci-dessous.

### Analyse des opérateurs stationnaires sur $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ :

- $T$ , opérateur stationnaire de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  ;
- $A$ , matrice **circulante** associée à  $T$  par rapport à la *base canonique* de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  ;
- $h$ , **réponse impulsionnelle de  $T$**  :

$$h = T\delta = \text{première colonne de } A;$$

- $T_h$ , **opérateur de convolution avec  $h$**  :

$$Tz = T_h z = h * z = z * h;$$

- $T_{(\hat{h})}$ , **multiplicateur de Fourier par  $\hat{h}$ , la fonction de transfert** :

$$Tz = T_{(\hat{h})} z = \text{IDFT}(\hat{h} \cdot \hat{z});$$

- Étant donné  $h = T\delta$ , on a le couple de Fourier suivante :

Représentation originale	Espace de Fourier
$h * z$	$\hat{h} \cdot \hat{z}$

- $D$ , matrice diagonale qui représente  $T$  dans la base orthogonale  $F$  de Fourier de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  :

$$D = \frac{1}{N} W_N A W_N^* = \text{diag}(\hat{h}(0), \dots, \hat{h}(N-1)).$$

- Les valeurs propres de  $T$  (le spectre dans le sens de l'algèbre linéaire!) sont les composantes de la fonction de transfert, i.e. les coefficients de Fourier de la réponse impulsionnelle, i.e.

$$\text{Valeurs propres de } T : \{\hat{h}(0), \dots, \hat{h}(N-1)\}.$$

Le code Matlab pour générer les matrices de Vandermonde-Fourier  $W_4$  et  $W_4^{-1}$  et pour diagonaliser la matrice circulante  $A$  associée à un opérateur stationnaire dans la base canonique est le suivante.

```

1 W4=fft(eye(4)); % eye(4) est la matrice identite'
2 W4i=inv(fft(eye(4))); % matrice inverse
3 A=gallery('circul',[a_00 a_01 a_02 a_03]); % remplacer a_00 etc. par la ...
   ligne 0 de A
4 D=W4*A*W4i % matrice diagonale dans la base orthogonale de Fourier

```

### 3.8.4 Filtres passe-haut, passe-bas, passe-bande

La formule de synthèse pour un signal  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  quelconque transformé via l'action d'un opérateur  $T \in \text{End}(\ell^2(\mathbb{Z}_N))$  est :

$$Tz(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \widehat{Tz}(m) F_m(n) \quad n \in \mathbb{Z}_N, \quad (3.45)$$

$F_m$  étant le vecteur d'indice  $m$  de la base orthogonale de Fourier de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . Donc,  $|\widehat{Tz}(m)|$  représente l'importance de l'harmonique de fréquence  $m$  dans la reconstruction de  $Tz$  et  $\{\widehat{Tz}(m), m \in \mathbb{Z}_N\}$  représente le spectre du signal transformé  $Tz$ .

Pour comprendre comment lier le spectre de  $Tz$  et celui du signal original  $z$ , allons appliquer la DFT aux deux côtés de la formule  $Tz = T_{(\hat{h})} z = \text{IDFT}(\hat{h} \cdot \hat{z})$  :

$$\text{DFT}(Tz) = \text{DFT} \circ \text{IDFT}(\hat{h} \cdot \hat{z}) = \hat{h} \cdot \hat{z},$$

i.e.

$$\boxed{\widehat{Tz}(m) = \hat{h}(m) \cdot \hat{z}(m)}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}_N,$$

donc les coefficients de Fourier de  $Tz$ , la suite transformée par l'opérateur  $T$ , sont donnés par le produit des coefficients de Fourier de la suite originale  $z$  fois les coefficients de Fourier de la réponse impulsionnelle  $h$ .

Par conséquent, le **spectre de la suite transformée**  $Tz$  est :

$$\left\{ \left| \widehat{Tz}(m) \right| = |\hat{h}(m)| \cdot |\hat{z}(m)|, m \in \mathbb{Z}_N \right\}. \quad (3.46)$$

Cela permet de *comprendre l'action des filtres stationnaires  $T$  sur le contenu fréquentiel d'un signal  $z$*  :

- Si  $\hat{h}(0) = 0$ ,  $Tz$  a **moyenne nulle**, car  $\left| \widehat{Tz}(0) \right| = 0 \cdot |\hat{z}(0)| = 0$  et on sait que  $\left| \widehat{Tz}(0) \right|$  est proportionnelle à la moyenne de  $Tz$  ;
- Si  $|\hat{h}(0)| = 1$ , alors  $T$  **conservé la moyenne** de  $z$ , i.e.  $\langle Tz \rangle = \langle z \rangle$  ;
- Si  $|\hat{h}(m)| > 1$  pour  $m \simeq 0$  et  $m \simeq N - 1$  et  $|\hat{h}(m)| \in [0, 1[$  pour  $m \simeq N/2$ , alors  $T$  augmente les basses fréquences et réduit les hautes fréquences (filtre **passe-bas**) ;
- Si  $|\hat{h}(m)| > 1$  pour  $m \simeq N/2$  et  $|\hat{h}(m)| \in [0, 1[$  pour  $m \simeq 0$  et  $m \simeq N - 1$ , alors  $T$  augmente les hautes fréquences et réduit les basses fréquences (filtre **passe-haut**) ;
- Si  $|\hat{h}(m)| > 1$  pour des valeurs intermédiaires de  $m$ , alors  $T$  augmente les fréquences moyennes (filtre **passe-bande**).

### 3.8.5 La caractérisation des opérateurs stationnaires via les opérateurs de translation

On a tous les résultats pour démontrer comment *caractériser un opérateur stationnaire comme une combinaison linéaire d'opérateurs de translation*, ou, d'une manière équivalente, comme un *polynôme de l'opérateur de translation*  $R_1$ , vu que  $R_k = R_1 \circ \dots \circ R_1$   $k$  fois, i.e.  $R_1^k$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ .

**Théorème 3.8.3**  $T \in \text{End}(\ell^2(\mathbb{Z}_N))$  est stationnaire si et seulement si  $T$  a cette expression :

$$(Tz)(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k z(n-k) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k R_k z(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k (R_1)^k z(n), \quad \forall n \in \{0, \dots, N-1\}, \quad (3.47)$$

où  $a_k \in \mathbb{C}$ .

*Preuve.*

$\Rightarrow$  : soit  $T$  stationnaire, alors on sait que  $T = T_h$ , où  $T_h$  est l'opérateur de convolution par rapport à la réponse impulsionnelle  $h = T\delta$ , i.e.

$$(Tz)(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)z(n-k),$$

mais alors ça suffit d'identifier les coefficients  $a_k$  de la formule  $(Tz)(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k z(n-k)$  avec  $h(k)$  pour avoir la thèse.

$\Leftarrow$  : on peut vérifier que  $T$  écrit comme dans la formule (3.47) est stationnaire grâce à la linéarité de  $T$  et  $R_k$ . En fait,  $\forall n \in \{0, \dots, N-1\}$  :

$$\begin{aligned} (TR_m z)(n) &= T(R_m z(n)) = T(z(n-m)) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k z(n-k-m) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k R_m z(n-k) \\ &\stackrel{\text{(linéarité de } R_m)}{=} R_m \left( \sum_{k=0}^{N-1} a_k z(n-k) \right) = (R_m Tz)(n), \end{aligned}$$

donc :  $T \circ R_m = R_m \circ T \quad \forall m \in \mathbb{Z}$ . □

Comme  $h(k) = T\delta(k)$ , la preuve du théorème nous a montré la validité de la formule :

$$\boxed{(Tz)(n) = \sum_{k=0}^{N-1} T\delta(k)z(n-k)} \quad \forall T \text{ stationnaire.}$$

### 3.8.6 Analyse fréquentielle des opérateurs de dérivation (discrète) première et seconde

Dans cette section on va analyser deux opérateurs stationnaires qui représentent la version discrète de la dérivée première et seconde. La comparaison de leurs valeurs propres montrera pourquoi l'opérateur de dérivation seconde est plus efficace pour amplifier les hautes fréquences dans les signaux numériques.

**Déf. 3.8.3** *Étant donnée une suite  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , on définit :*

$$T_1 z(n) = z(n+1) - z(n) \quad \text{Dérivée première discrète}$$

$$T_2 z(n) = z(n+1) - 2z(n) + z(n-1) \quad \text{Dérivée seconde discrète}$$

La *dérivée première discrète* est simplement la *différence en avant* de  $z$ , divisé par la différence des valeurs de  $n$ , mais comme  $(n+1) - n = 1$  on peut éviter d'écrire le dénominateur.

La *dérivée seconde discrète* est la *différence en arrière de la dérivée première* de  $z$ , divisé par la différence des valeurs de  $n$ , qui est encore une fois 1, donc on ne l'écrit pas. Explicitement :  $T_2 z(n) = T_1 z(n) - T_1 z(n-1) = z(n+1) - z(n) - [z(n) - z(n-1)] = z(n+1) - 2z(n) + z(n-1)$ .

On commence par l'analyse de  $T_1$ . Pour calculer sa réponse impulsionnelle on doit appliquer  $T_1$  à l'impulsion unitaire  $\delta = e_0$  :

$$h = T_1 \delta = \begin{pmatrix} e_0(1) - \boxed{e_0(0)} & \longleftarrow n = 0 \\ e_0(2) - e_0(1) & \longleftarrow n = 1 \\ \vdots & \\ \boxed{e_0(N-1+1)} - e_0(N-1) & \longleftarrow n = N-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où on a utilisé le fait que  $e_0(0) = e_0(N) = 1$ . La matrice qui représente  $T_1$  dans la base canonique de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  est :

$$A_{T_1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On calcule maintenant la DFT de  $h$ , pour tout  $m \in \mathbb{Z}_N$  ça vaut :

$$\begin{aligned} \hat{h}(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} = -1 \cdot e^{-2\pi i \frac{m \cdot 0}{N}} + 0 + \dots + 1 \cdot e^{-2\pi i \frac{m(N-1)}{N}} \\ &= -1 + e^{2\pi i \frac{m}{N}} e^{-2\pi i \frac{mN}{N}} = e^{2\pi i \frac{m}{N}} - 1. \end{aligned}$$

donc les valeurs propres de  $T_1$  sont  $\{\hat{h}(m) = e^{2\pi i \frac{m}{N}} - 1, m = 0, 1, \dots, N-1\}$  et sa représentation diagonale est :

$$D = \text{diag} \left( 0, e^{2\pi i \frac{1}{N}} - 1, e^{2\pi i \frac{2}{N}} - 1, \dots, e^{2\pi i \frac{(N-1)}{N}} - 1 \right).$$

Allons maintenant à interpréter l'action fréquentielle de  $T_1$  grâce à la formule (3.46). Il faut calculer les modules des valeurs propres  $(\hat{h}(m))_{m \in \mathbb{Z}_N}$ . On observe que

$$e^{2\pi i \frac{m}{N}} - 1 = e^{\pi i \frac{m}{N}} (e^{\pi i \frac{m}{N}} - e^{-\pi i \frac{m}{N}}) = e^{\pi i \frac{m}{N}} 2i \sin\left(\pi \frac{m}{N}\right)$$

donc,  $|\hat{h}(m)| = \left| e^{\pi i \frac{m}{N}} \right| \cdot |2i \sin(\pi \frac{m}{N})| = 2 |\sin(\pi \frac{m}{N})|$ , mais  $m \in \mathbb{Z}_N$ ,  $\frac{m}{N} < 1$ , donc le sinus est toujours non négatif et on peut éliminer la valeur absolue. En résumé :

$$\boxed{\left\{ |\hat{h}(m)| = 2 \sin\left(\pi \frac{m}{N}\right), m \in \mathbb{Z}_N \right\}}.$$

En particulier :

- $|\hat{h}(0)| = 0$  : par conséquent, le signal filtré  $T_1 z$  a moyenne nulle ;
- $|\hat{h}(\frac{N}{2})| = 2$  ;
- $|\hat{h}(m)| < 2 \forall m \neq \frac{N}{2}$  ;
- $|\hat{h}(m)| \rightarrow 0$  si  $m \rightarrow 0$  ou  $m \rightarrow N - 1$  ;
- L'action de l'opérateur est symétrique par rapport à  $\frac{N}{2}$ .

Comme  $m = N/2$  représente la plus haute fréquence du signal et  $m = 0$  et  $m = N - 1$  représentent les plus basses fréquences, on déduit que  $T_1$  réduit les basses fréquences de  $z$  et il augmente jusqu'à 2 fois les hautes fréquences. Donc, **l'opérateur dérivée première discrète est un filtre passe-haut.**

Maintenant on passe à l'analyse de  $T_2$ . Sa réponse impulsionnelle est donné par le vecteur :

$$h = T\delta = \begin{pmatrix} e_0(1) - 2\boxed{e_0(0)} + e_0(-1) \\ e_0(2) - 2e_0(1) + \boxed{e_0(0)} \\ \vdots \\ \boxed{e_0(N)} - 2e_0(N-1) + e_0(N-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice associée à  $T_2$  dans la base canonique de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  est :

$$A_{T_2} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -2 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

On calcule maintenant la DFT de  $h$  :

$$\begin{aligned} \hat{h}(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} = -2 \cdot e^{-2\pi i \frac{m \cdot 0}{N}} + 1 \cdot e^{-2\pi i \frac{m}{N}} + 0 + \dots + 1 \cdot e^{-2\pi i \frac{m(N-1)}{N}} \\ &= -2 + e^{-2\pi i \frac{m}{N}} + e^{-2\pi i m} e^{2\pi i \frac{m}{N}} = -2 + e^{2\pi i \frac{m}{N}} + e^{-2\pi i \frac{m}{N}} \\ &= -2 + 2 \cdot \frac{e^{2\pi i \frac{m}{N}} + e^{-2\pi i \frac{m}{N}}}{2} = -2 + 2 \cos\left(2\pi \frac{m}{N}\right). \end{aligned}$$

On veut comparer ces valeurs de  $\hat{h}(m)$  avec celles de l'opérateur dérivée première, pour cela on réécrit  $\hat{h}(m) = -4 \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \left( 2\pi \frac{m}{N} \right) \right]$  et on utilise l'identité trigonométrique  $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\alpha)$  avec  $\alpha = \pi \frac{m}{N}$ , pour obtenir  $\hat{h}(m) = -4 \sin^2 \left( \pi \frac{m}{N} \right)$ . Donc les valeurs propres de  $T_2$  sont  $\{\hat{h}(m) = -4 \sin^2 \left( \pi \frac{m}{N} \right), m = 0, 1, \dots, N-1\}$  et sa représentation diagonale est :

$$D = \text{diag} \left( 0, -4 \sin^2 \left( \frac{\pi}{N} \right), -4 \sin^2 \left( \frac{2\pi}{N} \right), \dots, -4 \sin^2 \left( \frac{(N-1)\pi}{N} \right) \right).$$

L'action fréquentielle de  $T_2$  est définie par les modules de ses valeurs propres :

$$\boxed{\left\{ |\hat{h}(m)| = 4 \sin^2 \left( \pi \frac{m}{N} \right), m \in \mathbb{Z}_N \right\}},$$

on voit que les modules des valeurs propres de l'opérateur de dérivée seconde sont les carrés de celles de l'opérateur de dérivée première. Par conséquent :

- $|\hat{h}(0)| = 0$  : donc, comme pour la première dérivée, le signal filtré  $T_2 z$  a moyenne nulle ;
- $|\hat{h}(\frac{N}{2})| = 4$  ;
- $|\hat{h}(m)| < 4 \forall m \neq \frac{N}{2}$  ;
- $|\hat{h}(m)| \rightarrow 0$  si  $m \rightarrow 0$  ou  $m \rightarrow N-1$  et la convergence à zéro est plus rapide que pour l'opérateur de dérivée première, car dans ce cas le sinus est élevé au carré, comme on le voit dans la figure 3.10.
- L'action de l'opérateur est symétrique par rapport à  $\frac{N}{2}$ .

Donc, aussi **l'opérateur dérivée seconde discrète est un filtre passe-haut**, avec une action d'amplification des hautes fréquences et de réduction des basses fréquences quadratique par rapport à celle de l'opérateur de dérivée première discrète.

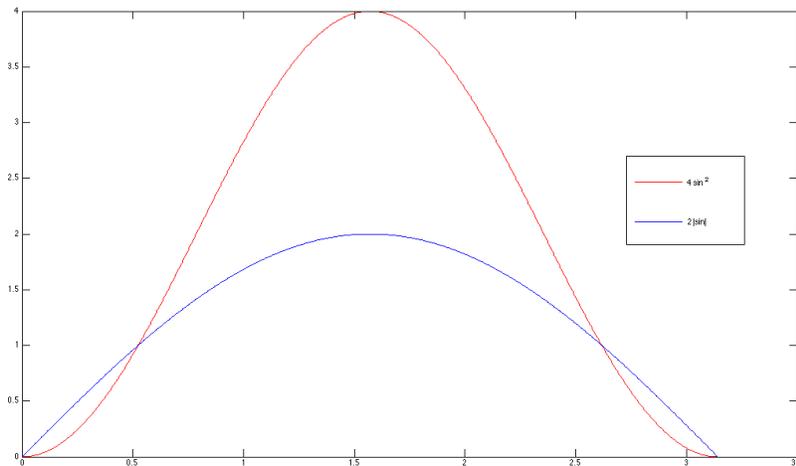


FIGURE 3.10 – Différence entre les fonctions sinusoidales qui représentent les valeurs du spectre de l'opérateur dérivée première et seconde entre 0 et  $\pi$ .

### 3.9 La transformée de Fourier bidimensionnelle (DFT 2D)

La transformée de Fourier qu'on a considérée jusqu'à maintenant est appliquée à des signaux  $z(n)$  qui dépendent seulement d'un paramètre  $n$ .

Dans les applications, on a des signaux très importants qui dépendent de plusieurs paramètres. Un exemple canonique est donné par les **images numériques** qui dépendent de deux paramètres : les *deux coordonnées spatiales d'un pixel*, comme dans la figure 3.11.



FIGURE 3.11 – Les deux coordonnées  $n_1, n_2$  d'un pixel dans une image numérique.

On peut généraliser la théorie de la DFT pour examiner des signaux qui dépendent de n'importe quel nombre (fini) de paramètres. Néanmoins, pour simplifier l'explication, on va considérer seulement le cas bidimensionnel de deux paramètres  $n_1, n_2$ .

On va définir d'abord l'espace de travail : si  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ , on définit

$$\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}) = \{z : \mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2} \rightarrow \mathbb{C}\},$$

$z \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$  est une suite complexe qui dépend de deux paramètres :

$$\begin{cases} n_1 \in \{0, 1, \dots, N_1 - 1\} \\ n_2 \in \{0, 1, \dots, N_2 - 1\}. \end{cases}$$

$\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$  est un espace vectoriel de dimension  $N_1 \cdot N_2$  avec les définitions de somme et de produit par un scalaire complexe définies comme dans le cas 1D et produit scalaire :

$$\langle z, w \rangle = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} z(n_1, n_2)w(n_1, n_2)^*, \quad \forall z, w \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}).$$

L'extension de la théorie de la DFT de 1D à 2D est basée sur la procédure de génération de bases de  $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$  à partir de bases de  $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1})$  et de  $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_2})$ .

**Théorème 3.9.1** Soient  $\{B_0, B_1, \dots, B_{N_1-1}\}$ ,  $\{C_0, C_1, \dots, C_{N_2-1}\}$ , une base orthonormale de  $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1})$  et de  $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_2})$ , respectivement.

On définit,  $\forall m_1 \in \{0, \dots, N_1 - 1\}$  et  $m_2 \in \{0, \dots, N_2 - 1\}$  les suites de  $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$  données par :

$$\boxed{D_{m_1, m_2}(n_1, n_2) = B_{m_1}(n_1) \cdot C_{m_2}(n_2)}.$$

Alors,  $D_{m_1, m_2}$  est une base orthonormale de  $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$  dite la **base produit tensoriel** de deux bases initiales.

*Preuve.* Les suites  $D_{m_1, m_2}$ ,  $m_1 \in \{0, \dots, N_1 - 1\}$ ,  $m_2 \in \{0, \dots, N_2 - 1\}$  sont  $N_1 \cdot N_2$  éléments de  $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$ , qui a dimension  $N_1 \cdot N_2$ . Donc, pour démontrer qu'ils sont une base orthonormale, on doit tout simplement montrer que :

$$\langle D_{m_1, m_2}, D_{k_1, k_2} \rangle = \delta_{(m_1, m_2), (k_1, k_2)} = \delta_{m_1, k_1} \delta_{m_2, k_2} = \begin{cases} 1 & \text{si } (m_1, m_2) = (k_1, k_2) \\ 0 & \text{si } (m_1, m_2) \neq (k_1, k_2). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \langle D_{m_1, m_2}, D_{k_1, k_2} \rangle &\stackrel{\text{déf. de } \langle \cdot, \cdot \rangle}{=} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} D_{m_1, m_2}(n_1, n_2) D_{k_1, k_2}(n_1, n_2)^* \\ &\stackrel{\text{déf. de } D}{=} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} B_{m_1}(n_1) C_{m_2}(n_2) B_{k_1}(n_1)^* C_{k_2}(n_2)^* \\ &= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} B_{m_1}(n_1) B_{k_1}(n_1)^* \sum_{n_2=0}^{N_2-1} C_{m_2}(n_2) C_{k_2}(n_2)^* \\ &= \underbrace{\langle B_{m_1}, B_{k_1} \rangle}_{\delta_{m_1, k_1}} \underbrace{\langle C_{m_2}, C_{k_2} \rangle}_{\delta_{m_2, k_2}} = \delta_{(m_1, m_2), (k_1, k_2)}. \end{aligned}$$

□

Ce théorème a les corollaires suivantes, pour  $m_1 \in \{0, 1, \dots, N_1 - 1\}$  et  $m_2 \in \{0, 1, \dots, N_2 - 1\}$  :

— La base orthonormale canonique de  $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$  est :

$$B = e_{m_1, m_2}(n_1, n_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } (n_1, n_2) = (m_1, m_2) \\ 0 & \text{si } (n_1, n_2) \neq (m_1, m_2) \end{cases}$$

— La base orthogonale de Fourier de  $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$  est

$$F_{m_1, m_2}(n_1, n_2) = \frac{1}{N_1 N_2} e^{2\pi i \frac{m_1 n_1}{N_1}} \cdot e^{2\pi i \frac{m_2 n_2}{N_2}} = \frac{1}{N_1 N_2} e^{2\pi i \left( \frac{m_1 n_1}{N_1} + \frac{m_2 n_2}{N_2} \right)}$$

— La base orthonormale de Fourier de  $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$  est

$$E_{m_1, m_2}(n_1, n_2) = \sqrt{N_1 N_2} F_{m_1, m_2}(n_1, n_2).$$

— La base orthogonale des exponentiels complexes de  $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$  est

$$\mathcal{E}_{m_1, m_2}(n_1, n_2) = N_1 N_2 F_{m_1, m_2}(n_1, n_2).$$

Grâce à la théorie des espaces vectoriels avec produit scalaire complexe qu'on a développé dans le chapitre 2, on peut généraliser la définition des coefficients de Fourier, DFT et IDFT à  $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$ . Soit  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$ , alors :

$$\begin{aligned}
\langle z, \mathcal{E}_{m_1, m_2} \rangle &= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} z(n_1, n_2) \left( e^{2\pi i \frac{n_1 m_1}{N_1}} e^{2\pi i \frac{n_2 m_2}{N_2}} \right)^* \\
&= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} z(n_1, n_2) e^{-2\pi i \frac{m_1 n_1}{N_1}} e^{-2\pi i \frac{m_2 n_2}{N_2}} \\
&= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} z(n_1, n_2) e^{-2\pi i \left( \frac{m_1 n_1}{N_1} + \frac{m_2 n_2}{N_2} \right)},
\end{aligned}$$

donc on définit les **coefficients de Fourier** de  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$  comme ceci :

$$\hat{z}(m_1, m_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} z(n_1, n_2) e^{-2\pi i \left( \frac{m_1 n_1}{N_1} + \frac{m_2 n_2}{N_2} \right)}.$$

Comme pour le cas 1D :

$$\hat{z}(0, 0) = N_1 N_2 \langle z \rangle,$$

où  $\langle z \rangle$  est la moyenne de  $z$ .

On peut également généraliser la formule de synthèse au cas 2D comme ceci :

$$z(n_1, n_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} \hat{z}(m_1, m_2) e^{2\pi i \left( \frac{m_1 n_1}{N_1} + \frac{m_2 n_2}{N_2} \right)}.$$

En conséquence, les opérateurs DFT et IDFT peuvent être généralisés avec les formules suivantes :

$$\text{DFT 2D} \equiv \hat{\cdot} : \begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}) & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}) \\ z & \longmapsto & \hat{z}, \end{array}$$

où :

$$\hat{z}(m_1, m_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} z(n_1, n_2) e^{-2\pi i \left( \frac{m_1 n_1}{N_1} + \frac{m_2 n_2}{N_2} \right)},$$

et

$$\text{IDFT 2D} \equiv \check{\cdot} : \begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}) & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}) \\ z & \longmapsto & \check{z}, \end{array}$$

où :

$$\check{z}(n_1, n_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} z(m_1, m_2) e^{2\pi i \left( \frac{m_1 n_1}{N_1} + \frac{m_2 n_2}{N_2} \right)}.$$

Il est clair que, si on augmente la dimension de 2 à  $2 \leq d < +\infty$ , les formules se généralisent tout simplement en remplaçant

$$\frac{m_1 n_1}{N_1} + \frac{m_2 n_2}{N_2} \text{ par } \sum_{k=1}^d \frac{m_k n_k}{N_k} \text{ et } N_1 N_2 \text{ par } \prod_{k=1}^d N_k.$$

### 3.9.1 Représentation matricielle de la DFT 2D : produit de Kronecker vs. itération de deux DFT 1D

La représentation matricielle de la DFT 2D dans la base canonique de  $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$  peut être construite grâce aux matrices de Vandermonde-Fourier  $W_{N_1}$  et  $W_{N_2}$  associées respectivement à la DFT 1D en  $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1})$  et en  $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_2})$ .

L'opération dont on a besoin pour obtenir la représentation matricielle de la DFT 2D est dite « produit de Kronecker », qu'on va définir de suite.

**Déf. 3.9.1** *Données deux matrices  $A$  de dimension  $m \times n$  et  $B$  de dimension  $p \times q$  :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pq} \end{pmatrix},$$

la matrice **produit de Kronecker**  $A \otimes B$  est la matrice de dimension  $mp \times nq$  définie par :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}.$$

On peut démontrer par calcul direct que la matrice associée à la DFT 2D dans la base canonique de  $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$  est la matrice de dimension  $N_1 N_2 \times N_1 N_2$  donnée par :

$$\boxed{W_{N_1, N_2} = W_{N_1} \otimes W_{N_2}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\hat{z}(m_1, m_2) = W_{N_1} \otimes W_{N_2} z(n_1, n_2)}.$$

Malheureusement, le calcul de la matrice produit de Kronecker est trop lourd quand  $N_1$  et  $N_2$  sont grands. Dans la pratique, on préfère réécrire la DFT 2D comme l'itération de deux DFT 1D.

Pour comprendre comment l'on peut faire, *on doit interpréter  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$  comme une matrice de  $N_2$  vecteurs colonne de  $N_1$  éléments :*

$$z(n_1, n_2) = \underbrace{\left( \begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ z(\cdot, 0) & z(\cdot, 1) & \cdots & z(\cdot, N_2 - 1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{array} \right)}_{N_2 \text{ vecteurs colonne}} \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ z(\cdot, 0) & z(\cdot, 1) & \cdots & z(\cdot, N_2 - 1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{array}} \right\} N_1 \text{ éléments pour chaque vecteur colonne.}$$

Par définition de DFT 2D on peut écrire :

$$\hat{z}(m_1, m_2) = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \underbrace{\left( \sum_{n_1=0}^{N_1-1} z(n_1, n_2) e^{-2\pi i \frac{n_1 m_1}{N_1}} \right)}_{\hat{z}(m_1, n_2) = W_{N_1} z(n_1, n_2)} e^{-2\pi i \frac{n_2 m_2}{N_2}} = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} W_{N_1} z(n_1, n_2) e^{-2\pi i \frac{n_2 m_2}{N_2}}. \quad (3.48)$$

L'explication de la formule ci-dessus est la suivante : la sommation par rapport à l'indice  $n_2$  est la plus extérieure, donc *on fixe*  $n_2$  à chaque fois. Avec  $n_2$  fixé,  $z(n_1, n_2)$  est un vecteur colonne, et donc la parenthèse qu'on a mis en évidence représente la DFT 1D de ce vecteur colonne,

qui peut être obtenue en appliquant la matrice  $W_{N_1}$  à  $z(n_1, n_2)$ ,  $n_2$  fixé, comme correctement écrit ci-dessus.

Maintenant on a le problème que  $n_1$  est fixe e que l'indice qui change est  $n_2$ , donc  $W_{N_1}(n_1, n_2)$  est un vecteur ligne et on ne peut pas lui appliquer  $W_{N_2}$  pour obtenir la DFT, car, comme on l'a vu dans dans la section 3.5, la DFT 1D est réalisée par le produit de la matrice  $W_N$  avec une suite représentée via un *vecteur colonne* !

La solution à ce problème consiste en transposer les deux côtés de l'équation (3.48), ceci transforme le vecteur ligne  $\hat{z}(m_1, n_2)$  en un vecteur colonne :

$$\hat{z}(m_1, m_2)^t = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} (W_{N_1} z(n_1, n_2))^t e^{-2\pi i \frac{n_2 m_2}{N_2}},$$

maintenant  $(W_{N_1} z(n_1, n_2))^t$  est un vecteur colonne, donc on peut calculer sa DFT en appliquant  $W_{N_2}$  :

$$\hat{z}(m_1, m_2)^t = W_{N_2} (W_{N_1} z(n_1, n_2))^t \stackrel{(AB)^t = B^t A^t}{=} W_{N_2} z(n_1, n_2)^t (W_{N_1})^t = W_{N_2} z(n_2, n_1) W_{N_1},$$

car  $W_{N_1}^t = W_{N_1}$  (observer l'échange entre  $n_1$  et  $n_2$ ). Donc  $\hat{z}(m_1, m_2)^t = W_{N_2} z(n_2, n_1) W_{N_1}$ , et alors, pour trouver  $\hat{z}(m_1, m_2)$ , il suffit de transposer encore une fois les deux côtés :

$$\hat{z}(m_1, m_2) = (\hat{z}(m_1, m_2)^t)^t = (W_{N_2} z(n_2, n_1) W_{N_1})^t = W_{N_1} z(n_1, n_2) W_{N_2}.$$

La formule qui permet de calculer la DFT 2D d'une suite  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$  est donc :

$$\boxed{\hat{z}(m_1, m_2) = W_{N_1} z(n_1, n_2) W_{N_2}}. \quad (3.49)$$

Il est important de souligner que l'équation (3.49) a du sens seulement si  $\hat{z}(m_1, m_2)$  et  $z(n_1, n_2)$  sont interprétées dans leur globalité comme des matrices  $N_1 \times N_2$  (image numériques).

Cette formule est différente de  $W_{N_1} W_{N_2} z(n_1, n_2)$  ou  $W_{N_2} W_{N_1} z(n_1, n_2)$ , qui sont les formules naïves qu'on aurait pu imaginer pour implémenter la DFT 1D sur les colonnes et sur les lignes de  $z$ . Comme on l'a vu, la raison de la différence est due au fait que la DFT 1D matricielle nécessite toujours un vecteur colonne, d'où vient la nécessité de la transposition, qui amène vers la formule (3.49).

### 3.9.2 Les propriétés de la DFT 2D

Les propriétés de la DFT 1D, qu'on a vu dans la section 3.7 peuvent être généralisées sans difficulté à la DFT 2D.

Les démonstrations sont pratiquement identiques, mais avec une notation plus lourde, pour cela, on présente l'extension bidimensionnelle des résultats relatifs à la DFT 1D sans preuve.

Comme dans le cas 1D, pour pouvoir discuter les propriétés de la DFT 2D, on doit d'abord étendre la définition d'une suite  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$  par périodicité à tout intervalle de longueur  $N_1$  par rapport à la variable  $n_1$  et de longueur  $N_2$  par rapport à la variable  $n_2$ .

Cette extension est possible si on définit  $z$  hors de  $\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}$  comme ceci :

$$\boxed{z(n_1 + j_1 N_1, n_2 + j_2 N_2) = z(n_1, n_2)}, \quad \forall n_1, n_2, j_1, j_2 \in \mathbb{Z}. \quad (3.50)$$

C'est aussi utile d'introduire l'opérateur de translation dans le cas bidimensionnel.

**Déf. 3.9.2** Soit  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$  étendue par périodicité comme dans la formule (3.50) et  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ . L'opérateur de translation sur  $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$  est défini par :

$$R_{k_1, k_2} : \begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}) & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}) \\ z & \longmapsto & R_{k_1, k_2} z, \end{array}$$

$$(R_{k_1, k_2} z)(n_1, n_2) = z(n_1 - k_1, n_2 - k_2).$$

### Propriétés de la DFT 2D

Soit  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$  étendue par périodicité comme dans la formule (3.50), alors, pour tout  $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$  :

— **Périodicité** de  $\hat{z}$  et  $\check{z}$  :

$$\boxed{\hat{z}(m_1, m_2) = \hat{z}(m_1 + N_1, m_2) = \hat{z}(m_1, m_2 + N_2) = \hat{z}(m_1 + N_1, m_2 + N_2)}$$

et

$$\boxed{\check{z}(n_1, n_2) = \check{z}(n_1 + N_1, n_2) = \check{z}(n_1, n_2 + N_2) = \check{z}(n_1 + N_1, n_2 + N_2)}.$$

— DFT 2D et **translation** :

$$\boxed{\widehat{R_{k_1, k_2} z}(m_1, m_2) = e^{-2\pi i \left( \frac{m_1 k_1}{N_1} + \frac{m_2 k_2}{N_2} \right)} \hat{z}(m_1, m_2)} \quad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z},$$

i.e. si on définit la suite  $\omega_{N_1, N_2}^{k_1, k_2} \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$ ,  $\omega_{N_1, N_2}^{k_1, k_2}(m_1, m_2) = e^{-2\pi i \left( \frac{m_1 k_1}{N_1} + \frac{m_2 k_2}{N_2} \right)}$   $\forall m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ , alors :

$$\boxed{\text{DFT 2D} \circ R_{k_1, k_2} = M_{\omega_{N_1, N_2}^{k_1, k_2}} \circ \text{DFT 2D}},$$

où  $M_{\omega_{N_1, N_2}^{k_1, k_2}}$  est l'opérateur de multiplication par  $\omega_{N_1, N_2}^{k_1, k_2}$  dans  $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$ . Si on permute le sens de la composition on obtient :

$$\boxed{(R_{k_1, k_2} \hat{z})(m_1, m_2) = \hat{z}(m_1 - k_1, m_2 - k_2) = \text{DFT 2D} \left( e^{2\pi i \left( \frac{m_1 k_1}{N_1} + \frac{m_2 k_2}{N_2} \right)} z \right) (m_1, m_2)},$$

i.e.

$$\boxed{R_{k_1, k_2} \circ \text{DFT 2D} = \text{DFT 2D} \circ M_{\left( \omega_{N_1, N_2}^{k_1, k_2} \right)^*}}, \quad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z}.$$

On peut résumer les propriétés qu'on vient d'analyser avec les couples de Fourier suivants :

Représentation originale	Espace de Fourier
$z(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$	$e^{-2\pi i \left( \frac{m_1 k_1}{N_1} + \frac{m_2 k_2}{N_2} \right)} \hat{z}(m_1, m_2)$
$e^{2\pi i \left( \frac{n_1 k_1}{N_1} + \frac{n_2 k_2}{N_2} \right)} z(n_1, n_2)$	$\hat{z}(m_1 - k_1, m_2 - k_2)$

Comme dans le cas de la DFT 1D, si on considère  $k_1 = \frac{N_1}{2}$  et  $k_2 = \frac{N_2}{2}$ , alors  $(-1)^{n_1+n_2}z(n_1, n_2)$  et  $\hat{z}(m_1 - \frac{N_1}{2}, m_2 - \frac{N_2}{2})$ . Cette transformation est utilisée pour la visualisation centrée du spectre de  $z$ .

De plus, encore comme dans le cas mono-dimensionnel, le spectre d'amplitude d'un signal bidimensionnel  $z(n_1, n_2)$  et d'une translation quelconque  $z(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$  est exactement le même, car  $\left| e^{-2\pi i \left( \frac{m_1 k_1}{N_1} + \frac{m_2 k_2}{N_2} \right)} \right| = 1$ .

Donc, le spectre d'amplitude permet de connaître le contenu fréquentiel du signal, mais il ne permet pas de savoir où les fréquences sont localisées.

— DFT 2D et **conjugaison** :

$$\widehat{z^*}(m_1, m_2) = (\hat{z}(-m_1, -m_2))^* = (\hat{z}(N_1 - m_1, N_2 - m_2))^*.$$

— DFT 2D et **convolution** :

$$\widehat{(z * w)}(m_1, m_2) = \hat{z}(m_1, m_2)\hat{w}(m_1, m_2),$$

où la convolution bidimensionnelle est définie comme ceci :

$$\begin{aligned} T_z : \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}) \\ w &\longmapsto T_z w = z * w, \end{aligned}$$

$$(z * w)(n_1, n_2) = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} z(n_1 - k_1, n_2 - k_2)w(k_1, k_2) = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} z(n_1, n_2)w(n_1 - k_1, n_2 - k_2).$$

### 3.9.3 La DFT 2D et les opérateurs stationnaires

La DFT 2D a les mêmes propriétés que la DFT 1D relativement aux opérateurs stationnaires.

Rigoureusement, un opérateur  $T : \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$  est stationnaire si :

$$T \circ R_{k_1, k_2} = R_{k_1, k_2} \circ T, \quad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z}.$$

Pratiquement, un opérateur  $T : \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$  est stationnaire si son action sur une suite  $z(n_1, n_2)$  est indépendante de la position des paramètres  $(n_1, n_2)$ .

Si  $z$  est une image numérique, alors **un opérateur stationnaire est une transformation définie indépendamment de la position d'un pixel dans le support spatial de l'image**. Cela ne veut pas dire que le résultat de l'application de l'opérateur stationnaire ne change pas par rapport à la position du pixel, mais que la définition de l'opérateur ne change pas.

Un exemple d'opérateur stationnaire est donné par la transformation qui remplace l'intensité d'un pixel par sa moyenne locale, i.e. la moyenne calculé dans un voisinage d'une taille fixé du pixel.

Comme dans le cas mono-dimensionnel, les opérateurs stationnaires sur  $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$  peuvent être caractérisés comme des opérateurs de convolution ou comme des multiplicateurs de Fourier.

Avant d'énoncer le théorème qui formalise cette relation, on définit le multiplicateur de Fourier, l'impulsion unitaire et la réponse impulsionnelle dans le cas bidimensionnel.

**Déf. 3.9.3** Soit  $w \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$ , fixé, le multiplicateur de Fourier associé à  $w$  est défini comme ceci :

$$\begin{aligned} T_{(w)} : \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}) \\ z &\longmapsto T_{(w)}z = \widehat{w \cdot \hat{z}} . \end{aligned}$$

**Déf. 3.9.4** L'impulsion unitaire  $\delta$  dans  $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$  est le premier vecteur de sa base canonique :  $\delta = e_{0,0}$ .

Donné un opérateur linéaire  $T$  sur  $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$ , on appelle réponse impulsionnelle la suite  $h = T\delta \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$ .

**Théorème 3.9.2** Soit  $T : \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$  un opérateur linéaire, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $T$  est stationnaire ;
- (2)  $T$  est l'opérateur de convolution avec la réponse impulsionnelle  $h = T\delta$  :

$$Tz = T_h z = h * z = z * h \quad \forall z \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}) ;$$

- (3)  $T$  est le multiplicateur de Fourier associé à  $\hat{h}$  :

$$Tz = T_{(\hat{h})}z = \widehat{\hat{h} \cdot \hat{z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}) ;$$

- (4)  $T$  est diagonalisable, ses vecteurs propres sont la base orthogonale de Fourier  $F_{m_1, m_2}$  de  $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$ , et ses valeurs propres sont les composantes de  $\hat{h}$ .

*Observation* : on peut étendre aussi le résultat sur les matrices circulantes, mais leur définition dans le cas bidimensionnel est plus difficile.

### 3.9.4 Les opérateurs gradient et Laplacien et leurs action sur les images numériques

Si on répète l'analyse des opérateurs de dérivation discrète qu'on a fait dans la section 3.8.6 dans le cas 2D, la dérivée première dévient le **gradient**, i.e.  $\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ , et la dérivée seconde devient le **Laplacien**, i.e.  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ .

Le gradient est utilisé quand on veut détecter les bords d'une image selon une direction particulière. Si on veut une détection de bords isotrope, i.e. uniforme par rapport aux directions, alors on utilise le Laplacien, qui est même plus efficace du gradient dans la tâche d'intensification des détails fins, comme on l'a vu dans le cas 1D.

Même dans le cas 2D, les opérateurs différentiels ci-dessus annulent la moyenne d'une images, ce qui explique pourquoi leur sortie est une image noire partout, sauf à côté des bords, comme montré en Fig. 3.12.



FIGURE 3.12 – Première ligne de gauche à droite : image originale et image filtrée avec le Laplacien. Deuxième ligne de gauche à droite : image filtrée avec le gradient dans la direction verticale et horizontale, respectivement.

### 3.9.5 Visualisation du spectre d'amplitude en 2D

La visualisation du spectre d'un signal 2D nécessite une procédure de centralisation pour les mêmes raisons qu'on a discuté dans le cas 1D et qui sont visualisées en deux dimensions dans la figure 3.13. Ceci peut être effectué via l'équivalent 2D de la translation du domaine de  $z(n_1, n_2)$  définie dans les formules (3.27), (3.27) ou via l'équivalent 2D de la formule (3.35), i.e. en considérant  $(-1)^{n_1+n_2}z(n_1, n_2)$  au lieu de  $z(n_1, n_2)$ , comme vu dans la section 3.9.2.

Le code MatLab pour visualiser le spectre d'amplitude d'une image est écrit ci-dessous.

```
1 im=imread('image.extension') % on charge l'image
2 A=fftshift( abs( fft2 (im) ) ); % on calcule le spectre d'amplitude avec ...
   abs de fft2 en on fait la translation avec fftshift
3 imshow(log(1+0.001*A), []) % pour mieux visualiser le spectre on utilise ...
   l'echelle logarithmique (voir commentaire en bas...)
```

Il faut observer, en particulier, que la symétrie mono-dimensionnelle de la DFT 1D par rapport aux fréquences  $m \in \{0, 1, \dots, N/2\}$  et  $m \in \{N/2 + 1, N/2 + 2, \dots, N - 1\}$  devient une *symétrie miroir* 2D pour la DFT 2D.

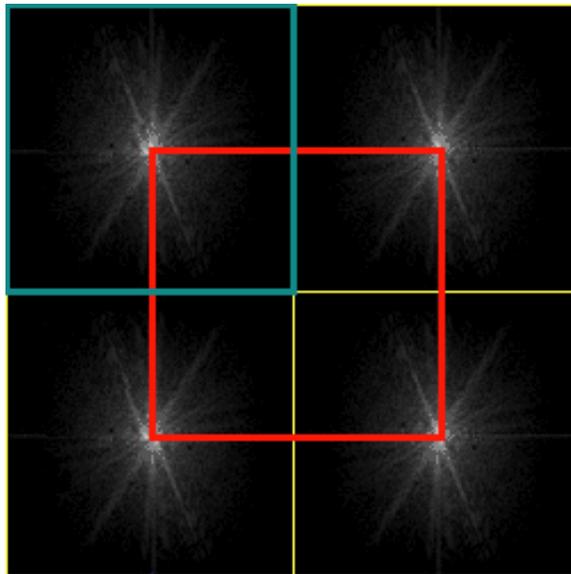


FIGURE 3.13 – *Carré rouge* : spectre d'amplitude d'une image centré dans la fréquence  $(N/2, N/2)$ . *Carré bleu* : spectre d'amplitude d'une image centré dans la fréquence  $(0, 0)$ . Pour plus de simplicité on a considéré une image carré de côté  $N$ , sinon on aurait des rectangles de côtés  $N_1$  et  $N_2$ .

Dans la figure 3.14 on montre trois images numériques en niveau de gris et leur spectre d'amplitude. Les points les plus lumineux correspondent à des valeurs des modules de coefficients de Fourier grandes et, vice-versa, les point les plus sombres à des valeurs petites.

Il y a plusieurs caractéristiques à observer :

- La **symétrie** du spectre : le contenu fréquentiel est répété dans les quadrants par symétrie miroir ;
- Les points les plus lumineux sont localisés vers le centre du spectre : ceci est dû au fait que les spectres qu'on montre sont centrés, donc la fréquence centrale a pour coordonnées  $(m_1, m_2) = (0, 0)$  et  $|\hat{z}(0, 0)| = N_1 N_2 \langle z \rangle$ , i.e.  $N_1 N_2$  fois la valeur moyenne de l'image. *Ceci explique pourquoi, pour visualiser le spectre, on doit appliquer le logarithme* : les valeurs de  $|\hat{z}(0, 0)|$  sont tellement plus élevées des autres, qu'il faut comprimer le rang de variabilité avec une fonction compressive comme le logarithme !
- Dès qu'on s'éloigne du centre, le spectre montre l'amplitude des coefficients qui correspondent aux fréquences les plus élevées, jusqu'aux fréquences maximales  $(N_1/2, N_2/2)$ , si  $N_1, N_2$  sont paires, ou leurs parties entières  $([N_1/2], [N_2/2])$  si  $N_1, N_2$  sont impaires. L'image avec le contenu fréquentiel le plus élevé est l'image du mandrill, en fait, on voit que son spectre est le plus étendu parmi les trois images.  
En particulier, on observe des valeurs très intenses vers les bords, qui représentent des fréquences très élevées : elles correspondent aux fréquences des détails très fins du poil à côté des yeux du mandrill.
- Comme  $m_1$  et  $m_2$  représentent les fréquences verticales et horizontales, les bords (« edges » en anglais) verticaux et horizontaux des images produisent des coefficients de Fourier localisés sur les axes correspondants. C'est pour cela que la première image, qui a des forts gradients d'intensité verticaux entre les rochers et le ciel, a un spectre avec une forte prédominance de coefficients de Fourier intenses sur l'axe vertical. Dans l'image de la deuxième ligne (« Lena », une des images les plus utilisées en traitement d'images), on a des détails fins dans le chapeau, à  $45^\circ$  et à  $-45^\circ$ . De manière cohérente, on trouve dans son spectre des structures diagonales.
- L'analyse du spectre qu'on vient de faire montre qu'on peut comprendre l'existence de structures géométriques dans une image en regardant son spectre de Fourier, mais on ne peut pas dire où ces structures sont situées dans l'image.

### 3.9.6 Un exemple remarquable de filtrage d'une image numérique dans l'espace de Fourier : le floutage

Le théorème 3.9.2 dit que tous les opérateurs stationnaires  $T$  qui agissent sur des images (interprétées comme des suites 2D finies) sont des convolutions « cachées » (entre l'image et la réponse impulsionnelle  $h = T\delta$ ). De plus, ces convolutions peuvent être représentées comme des multiplicateurs de Fourier (multiplication dans l'espace de Fourier entre  $\hat{h}$  et la DFT 2D de l'image).

Selon la suite  $h$  avec laquelle on fait la convolution, on obtient des résultats différents. C'est souvent beaucoup plus simple d'interpréter l'effet d'une convolution en considérant le multiplicateur de Fourier associé.

En particulier, on veut comprendre ce que veut dire d'opérer une *convolution avec une Gaussienne discrète*, qu'on écrit  $h(n_1, n_2)$ .

Comme on le verra dans le chapitre 5, la transformée de Fourier d'une Gaussienne d'écart-type  $\sigma$  est encore une Gaussienne, mais avec un écart-type inversement proportionnel à  $\sigma$ . Donc, on peut essayer de comprendre la signification de la convolution d'une image  $z(n_1, n_2)$  avec une Gaussienne  $h(n_1, n_2)$  en analysant la multiplication suivante dans l'espace de Fourier :  $\hat{z}(m_1, m_2) \cdot \hat{h}(m_1, m_2)$ .



FIGURE 3.14 – Colonne de gauche : images originales. Colonne de droite : spectres d’amplitude centrés des images de gauches, visualisés avec une échelle logarithmique.

Dans la figure 3.15 on peut voir trois images qui correspondent à Gaussiennes 2D de taille  $512 \times 512$ , l'intensité du pixel de position  $(n_1, n_2)$  est  $h(n_1, n_2) = \exp\left(-\frac{n_1^2 + n_2^2}{2\sigma^2}\right)$  et l'écart type est  $\sigma = 1, 5, 10$ , respectivement.

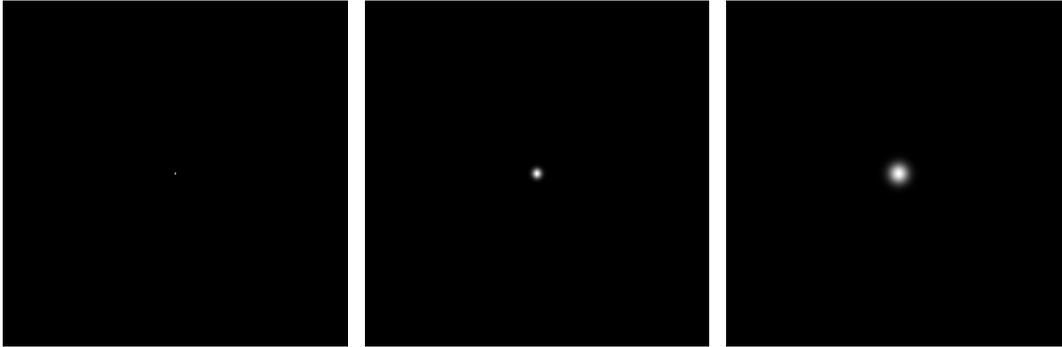


FIGURE 3.15 – De gauche à droite : images Gaussiennes bidimensionnelles avec un écart type 1,5,10.

Comme on l'a dit avant, les DFT 2D de  $h$  sont encore des Gaussiennes, mais avec un écart type proportionnel à  $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ . Bien sûr,  $h(0, 0) = 1$  et les valeurs de  $\hat{h}(m_1, m_2)$  décroissent dès qu'on s'éloigne du centre, donc la multiplication dans l'espace de Fourier  $\hat{z}(m_1, m_2) \cdot \hat{h}(m_1, m_2)$  fait décroître l'importance des harmoniques avec  $(m_1, m_2) \neq (0, 0)$ , qui sont associées aux détails de l'image. Alors, si on applique la IDFT 2D à  $\hat{z}(m_1, m_2) \cdot \hat{h}(m_1, m_2)$  on peut reconstruire une image qui sera plus floue que l'image originelle.

Par conséquent, opérer la convolution avec une Gaussienne correspond, dans le traitement d'images, à une opération de floutage (« blurring » en anglais), comme on peut le voir dans la figure 3.16.

Le floutage peut être utile, par exemple, quand l'image originale est bruitée : le floutage rend le bruit moins percevable (mais aussi les bords moins nets).

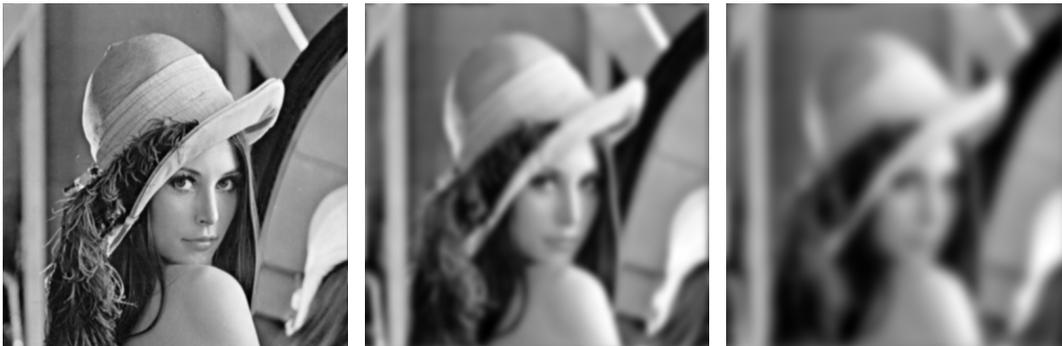


FIGURE 3.16 – De gauche à droite : floutage de l'image de Lena par multiplication dans l'espace de Fourier avec les DFT des Gaussiennes d'écart type 1,5,10. Il faut observer que, comme la DFT d'une Gaussienne a un écart-type inversement proportionnel à l'écart-type originale, la DFT de la Gaussienne d'écart-type 10 a un écart-type petit et donc elle tend vers 0 rapidement. Donc, quand on fait le produit de la DFT de la Gaussienne d'écart-type 10 avec la DFT de l'image, on réduit énormément les détails de l'image.

La figure 3.17 montre une version continue du filtre fréquentiel de floutage. Le code Matlab pour flouter une image avec un filtre Gaussien est écrit ci-dessous.

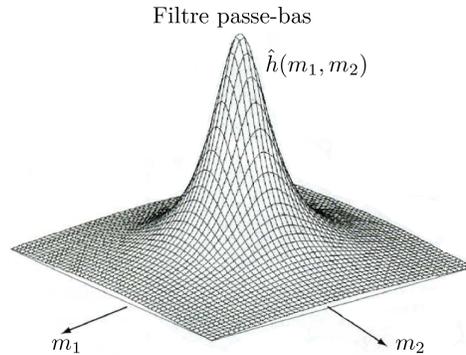


FIGURE 3.17 – Filtre de floutage, passe-bas dans le domaine fréquentiel.

```

1 % Gaussian Blurring in the Fourier Domain
2 % read the image (it must be in the same folder as the commands)
3 i=imread('lena.png');
4 % standard deviation, 5 in this case
5 s=5;
6 % gaussian filter with the same size as the image and standard deviation s
7 h=fspecial('gaussian',512,s);
8 % DFT of h and centered DFT of the image
9 H=fft2(h); I=fft2(fftshift(i));
10 % O is the puntual product (.* in Matlab and not only *) of H and I
11 O=H.*I;
12 % IDFT
13 o=ifft2(O);
14 % show the output o
15 imshow(o,[])

```

*Observation importante* : même si opérer la convolution avec une Gaussienne amène à l'effet de floutage, il ne faut pas penser que la convolution soit *toujours* liée à une opération de floutage. En fait, on a vu que la convolution, comme le multiplicateur de Fourier, est le prototype des opérateurs stationnaires, qui peuvent flouter ou rehausser les fréquences d'un signal.

# Chapitre 4

## La série de Fourier

L'extension de la théorie de la transformée de Fourier à suites infinies non-périodiques et à fonctions définies sur un intervalle réel limité ou illimité a besoin de techniques mathématiques plus avancées que ce qu'on a vu jusqu'à présent, en particulier du concept d'espace de Hilbert.

### 4.1 Les espaces de Hilbert

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel fini ou infini dans lequel la structure d'espace métrique est compatible avec le produit scalaire. Pour comprendre ce qu'on veut dire avec *compatible* on doit rappeler des concepts de la théorie d'espaces métriques.

**Déf. 4.1.1** Soit  $X$  un ensemble quelconque et  $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ .  $d$  est une distance ou métrique sur  $X$  si :

1.  $\forall x, y \in X, d(x, y) \geq 0$  et  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  (positivité)
2.  $\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$  (symétrie)
3.  $\forall x, y, z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (inégalité triangulaire)

La couple  $(X, d)$  est dite un espace métrique. Une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  est convergente à la limite  $L \in X$  si :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n > N, d(x_n, L) < \varepsilon.$$

Une suite d'éléments  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  est dite **suite de Cauchy** si :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n, m > N, d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

On dit que l'espace métrique  $(X, d)$  est **complet** si toute suite de Cauchy en  $X$  converge dans  $X$  même.

*Observations.* La condition de Cauchy veut dire que, à partir de  $N$ , les éléments de la suite deviennent de plus en plus proches les uns des autres. Toute suite convergente vérifie la condition de Cauchy, mais le contraire est, en général, faux. Plus précisément, les suites de Cauchy peuvent converger vers une limite hors de  $X$ , comme montré par l'exemple suivant. Soit  $X = \mathbb{Q}$ ,  $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$   $n \geq 1$ . On peut vérifier que  $(x_n)_{n \geq 1}$  est une suite de Cauchy, mais on sait que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e$ , qui est un nombre irrationnel, donc la limite de la suite n'appartient

pas à  $X$ . Exemples remarquables d'espaces métriques complets sont  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{C}^n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n$  fini, munis de la distance Euclidienne.

Pour donner la définition d'espace de Hilbert, il faut seulement rappeler que le produit scalaire réel ou complexe dans un espace vectoriel  $V$  génère une distance dans l'espace vectoriel même :

$$d(v, w) = \|v - w\| = \sqrt{\langle v - w, v - w \rangle} \quad \forall v, w \in V.$$

**Déf. 4.1.2** Soit  $(V, \langle, \rangle)$  un espace vectoriel de dimension finie ou infinie avec produit scalaire réel ou complexe. Si  $V$  est un espace métrique complet par rapport à la distance engendrée par le produit scalaire, alors on appelle  $V$  un **espace de Hilbert**.

La compatibilité entre structure algébrique et métrique dans les espaces de Hilbert permet de démontrer des propriétés très importantes, qui ne sont pas valides en général dans les espaces vectoriels de dimension infinie quelconques. Pour honorer David Hilbert (1862, Königsberg, Allemagne – 1943, Göttingen, Allemagne), le mathématicien le plus important de la deuxième partie du XIX siècle, dans les livres de mathématiques on utilise la lettre  $\mathcal{H}$  calligraphique, i.e.  $\mathcal{H}$ , pour représenter un espace de Hilbert.

Si un espace vectoriel normé  $(V, \|\cdot\|)$  est complet par rapport à la distance  $d(v, w) = \|v - w\|$ ,  $v, w \in V$ , alors il est dit **espace de Banach** (Stephan Banach, 1892, Kraków - 1945, Lviv).

## 4.2 Deux espaces de Hilbert importants pour la théorie de Fourier

Dans cette section on va présenter deux espaces de Hilbert particulièrement importants pour le développement de l'analyse de Fourier.

### 4.2.1 $\ell^2(\mathbb{Z})$ : l'espace de Hilbert des suites de carré sommable, ou signaux discrets d'énergie finie

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \{(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}, z_n \in \mathbb{C} \forall n \in \mathbb{Z} : \sum_{n \in \mathbb{Z}} |z(n)|^2 < +\infty\},$$

où on dit que  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |z(n)|^2$  est convergente si la suite des sommes partielles  $S(k) = \sum_{n=-k}^k |z(n)|^2$  est convergente à la somme  $S \in \mathbb{C}$  :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } |S(k) - S| < \varepsilon \forall k > N.$$

Étant donnés  $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z})$ , la structure d'espace de Hilbert de  $\ell^2(\mathbb{Z})$  est définie avec le produit scalaire, norme et distance suivants :

$$\langle z, w \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z(n)w(n)^*, \quad \|z\| = \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |z(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$d(z, w) = \|z - w\| = \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |z(n) - w(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On va examiner maintenant la convergence d'une suite d'éléments de  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . Il faut souligner la particularité de cette analyse : on veut examiner la convergence d'une suite d'éléments qui sont eux mêmes de suites ! Il faut donc faire attention avec la notation pour ne pas entrer en confusion. On écrit avec  $k \in \mathbb{Z}$  l'index de la suite d'éléments de  $\ell^2(\mathbb{Z})$  et on garde  $n$  comme index pour chaque élément de la suite :

$$\begin{aligned} z_k : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ n &\longmapsto z_k(n), \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |z_k(n)|^2 < +\infty. \end{aligned}$$

On dit que la suite  $(z_k)_{k \in \mathbb{Z}} \subset \ell^2(\mathbb{Z})$  converge à  $z \in \ell^2(\mathbb{Z})$  si :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} d(z_k, z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \|z_k - z\| = 0,$$

où  $d$  et  $\|\cdot\|$  sont la distance et la norme de  $\ell^2(\mathbb{Z})$ , respectivement, donc la convergence de la suite  $(z_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  à  $z$  veut dire que :  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$  tel que  $\|z_k - z\| < \varepsilon \forall k > N$ , i.e.

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |z_k(n) - z(n)|^2 = 0.$$

Allons maintenant à définir la convergence d'une série en  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . Donnée une suite  $(z_k)_{k \in \mathbb{Z}} \subset \ell^2(\mathbb{Z})$ , on considère la suite des sommes partielles jusqu'à l'ordre  $N \in \mathbb{N}$  :

$$S_N(n) = \sum_{k=-N}^N z_k(n),$$

si  $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$  est convergente (comme suite d'éléments de  $\ell^2(\mathbb{Z})$ ) vers  $S \in \ell^2(\mathbb{Z})$ , alors on dit que la série  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} z_k$  converge vers  $S$  dans  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . En résumé, l'écriture  $S = \sum_{k \in \mathbb{Z}} z_k$  doit être interprétée comme ceci :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{k=-N}^N z_k - S \right\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{k=-N}^{+N} z_k(n) - S(n) \right|^2 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

#### 4.2.2 $L^2([a, b])$ : l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable, ou signaux continus d'énergie finie

Soient  $a, b$  soit deux nombre réels tels que  $a < b$ , soit  $a = -\infty$  et  $b = +\infty$ . On considère l'espace :

$$L^2[a, b] = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} : \int_a^b |f(x)|^2 dx < +\infty \right\}.$$

Si  $f, g \in L^2[a, b]$ , alors  $L^2[a, b]$  est un espace de Hilbert avec le produit scalaire, norme et distance suivants :

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int_a^b f(x)g(x)^* dx, \\ \|f\| &= \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$d(f, g) = \|f - g\| = \left( \int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si  $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subset L^2[a, b]$  est une suite en  $L^2[a, b]$ , on dit qu'elle converge vers  $f \in L^2[a, b]$  si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(f_n, f) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|f_n - f\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

où  $d$  et  $\| \cdot \|$  sont la distance et la norme en  $L^2[a, b]$ , respectivement, donc, explicitement :

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On va maintenant définir la convergence d'une série en  $L^2[a, b]$ . Étant donné la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subset L^2[a, b]$ , on considère la suite des sommes partielles définie par :

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^N f_n(x) \quad \forall x \in [a, b], \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

si  $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$  est convergente (en tant que suite de  $L^2[a, b]$ ) vers  $S \in L^2[a, b]$ , alors la série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n$  converge vers  $S$  dans  $L^2[a, b]$ , i.e. :

$$S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{n=-N}^N f_n - S \right\| = 0$$

i.e. explicitement :

$$\int_a^b \left| \sum_{n=-N}^{+N} f_n(x) - S(x) \right|^2 dx \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

### 4.3 La relation entre $\ell^2(\mathbb{Z})$ et les systèmes orthonormaux (SON) d'un espace de Hilbert : le théorème de Fisher-Riesz et l'inégalité de Bessel

L'espace de Hilbert  $\ell^2(\mathbb{Z})$  est l'extension naturelle de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , comme on le verra dans cette section.  $\ell^2(\mathbb{Z})$  a un lien particulier avec les systèmes d'éléments orthonormaux d'un espace de Hilbert, fini ou infini, qu'on appellera *SON* : « Système OrthoNormale ».

Pour comprendre ce lien, il est utile de rappeler que, étant donné un espace vectoriel avec produit scalaire  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  de dimension finie  $N < +\infty$ , l'expansion d'un vecteur  $v \in V$  sur une base orthonormale  $(u_n)_{n=1}^N$  de  $V$  est écrite comme ceci :

$$v = \sum_{n=1}^N \langle v, u_n \rangle u_n,$$

en plus, on sait que ça vaut la relation de Parseval :

$$\langle u, v \rangle = \sum_{n=1}^N \langle v, u_n \rangle \langle u_n, w \rangle,$$

et l'identité de Plancherel :

$$\sum_{n=1}^N |\langle v, u_n \rangle|^2 = \|v\|^2.$$

À partir de là, on a la curiosité naturelle de vérifier si ces propriétés sont valides aussi dans le cas d'un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  de dimension infinie, lorsqu'on remplace la base  $(u_n)_{n=1}^N$  avec un SON de  $\mathcal{H}$ . La réponse, en général, est négative : un SON n'est pas suffisant pour garantir les propriétés dont on parle, il faut ajouter une condition qu'on va discuter au début de la section prochaine.

Les deux théorèmes qui formalisent le lien entre  $\ell^2(\mathbb{Z})$  et un SON d'un espace de Hilbert sont les suivantes.

**Théorème 4.3.1 (Fisher-Riesz)** *Soient*

- $(\mathcal{H}, \langle, \rangle)$  : un espace de Hilbert ;
- $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  : un SON de  $\mathcal{H}$  ;
- $(z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  : une suite de scalaires complexes.

La série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} z_n u_n$  converge dans  $\mathcal{H}$  si et seulement si  $(z_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ .

**Théorème 4.3.2 (Inégalité de Bessel)** *Pour tout  $h \in (\mathcal{H}, \langle, \rangle)$  et pour tout SON  $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  de  $\mathcal{H}$  ça vaut que :*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle h, u_n \rangle|^2 \leq \|h\|^2 \quad (< +\infty).$$

Comme conséquence des deux théorèmes, la suite des projections d'un élément  $h$  d'un espace de Hilbert sur un SON, i.e.  $(\langle h, u_n \rangle)_{n \in \mathbb{Z}}$ , appartient toujours à  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . Donc, grâce au théorème de Fisher-Riesz, la série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle h, u_n \rangle u_n$  converge en  $\mathcal{H}$ . Néanmoins, dû à l'inégalité de Bessel, on ne peut pas garantir l'identité de Plancherel pour la somme de la série.

## 4.4 Les systèmes orthonormaux complètes (SONC) dans un espace de Hilbert et leurs propriétés principales

Pour assurer l'identité de Plancherel on doit ajouter une condition qui est toujours vérifiée en dimension finie, mais pas forcément en dimension infinie.

**Déf. 4.4.1 (SONC : Système OrthoNormale Complet)** *On dit qu'un SON  $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  d'un espace de Hilbert  $(\mathcal{H}, \langle, \rangle)$  est complet si*

$$\langle h, u_n \rangle = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \implies \quad h = 0_{\mathcal{H}},$$

*c'est-à-dire,  $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est complet si le seul éléments  $h \in \mathcal{H}$  orthogonal à tout vecteur  $u_n$  du son est le vecteur nul de  $\mathcal{H}$ .*

*$\mathcal{H}$  est dit **séparable** s'il admet un SONC fini ou dénombrable. Dans ce cours on considérera toujours des espaces de Hilbert séparables sans le spécifier explicitement.*

Un SONC joue le rôle d'une base orthonormale dans une dimension infinie, comme énoncé dans le théorème suivant.

**Théorème 4.4.1 (Propriétés d'un SONC)** Soient  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace de Hilbert et  $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  SON de  $\mathcal{H}$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est un SONC.

2.  $\forall h \in \mathcal{H}$  :

$$h = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle h, u_n \rangle u_n \quad \ll \text{Expansion de Hilbert-Fourier de } h \text{ sur le SONC } (u_n)_{n \in \mathbb{Z}} \gg .$$

3.  $\forall h_1, h_2 \in \mathcal{H}$  :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle h_1, u_n \rangle \langle u_n, h_2 \rangle = \langle h_1, h_2 \rangle \quad \ll \text{Relation de Parseval} \gg .$$

4.  $\forall h \in \mathcal{H}$  :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle h, u_n \rangle|^2 = \|h\|^2 \quad \ll \text{Identité de Plancherel} \gg .$$

*Observation* : par définition de convergence d'une série dans un espace de Hilbert, la propriété 2) est traduite explicitement comme ceci :

$$\left\| \sum_{n=-N}^N \langle h, u_n \rangle u_n - h \right\| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0,$$

donc, en général, si  $h$  est une fonction, la propriété 2) ne veut pas dire que  $h$  est égale à la somme de la série en chaque point de son domaine.

**Déf. 4.4.2 (Coefficients de Fourier relatifs a un SONC)** On appelle les nombres complexes  $\langle h, u_n \rangle \equiv \hat{h}(n)$  les coefficients de Hilbert-Fourier de  $h$  relativement à  $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ .

Grâce au théorème de Fisher-Riesz, la suite des coefficients de Fourier  $\hat{h} = (\hat{h}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  appartient toujours à  $\ell^2(\mathbb{Z})$ .

En utilisant la notation pour les coefficients de Hilbert-Fourier qu'on vient d'introduire, on peut réécrire les formules du théorème précédent comme cela :

$$\begin{aligned} h &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{h}(n) u_n, \\ \langle h_1, h_2 \rangle &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{h}_1(n) \hat{h}_2(n)^*, \\ \|h\|_{\mathcal{H}}^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{h}(n)|^2 = \|\hat{h}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2. \end{aligned}$$

On peut représenter l'analogie entre les bases orthonormales d'espaces vectoriels avec produit scalaire de dimension finie et SONC d'espaces de Hilbert de dimension infinie comme dans la table suivante :

Donc,  $\mathbb{C}^N = \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  est le prototype des espaces vectoriels complexes de dimension finie  $N$ , tandis que  $\ell^2(\mathbb{Z})$  est le prototype des espaces de Hilbert (séparables)! Cela explique pourquoi on a utilisé le symbole  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  au lieu de  $\mathbb{C}^N$  et le concept de suite  $N$ -dimensionnelle pendant le développement de la théorie de Fourier discrète.

Dimension finie	Dimension infinie
$(V, \langle, \rangle) \xleftrightarrow{\text{Isometrie}} \mathbb{C}^N = \ell^2(\mathbb{Z}_N)$	$(\mathcal{H}, \langle, \rangle) \xleftrightarrow{\text{Isometrie}} \ell^2(\mathbb{Z})$
$v \in V \xleftrightarrow{\text{Isometrie}} \langle \langle v, u_n \rangle \rangle_{n=1}^N$	$h \in \mathcal{H} \xleftrightarrow{\text{Isometrie}} \langle \langle h, u_n \rangle \rangle_{n \in \mathbb{Z}}$
$(u_n)_{n=1}^N$ base orthonormale de $V$	$(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ : SONC de $\mathcal{H}$

La dernière étape avant de passer à la théorie de la série de Fourier consiste en l'extension du théorème de la projection dans le cas d'espaces de Hilbert.

Soit  $U = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  un SON d'un espace de Hilbert  $(\mathcal{H}, \langle, \rangle)$  et soit

$$S = \left\{ s \in \mathcal{H} \text{ tel que } \exists (z(n))_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) : s = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z(n)u_n \right\}.$$

$S$  est le sous-espace de  $\mathcal{H}$  engendré par les séries de type  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} z(n)u_n$ , avec  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  suite de  $\ell^2(\mathbb{Z})$  (donc elles sont de séries convergentes grâce au théorème de Fisher-Riesz).

**Déf. 4.4.3** *L'application linéaire suivante :*

$$\begin{aligned} P_S : \mathcal{H} &\longrightarrow S \\ h &\longmapsto P_S(h) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle h, u_n \rangle u_n \end{aligned}$$

est dite *opérateur de projection orthogonale sur  $S$*  et  $P_S(h)$  est dite *la projection orthogonale de  $h$  sur  $S$* .

**Théorème 4.4.2 (Meilleure approximation d'un élément dans un espace de Hilbert)**

*Pour tout  $h \in \mathcal{H}$  et pour tout  $s \in S$  ça vaut que :*

1.  $\langle h - P_S(h), s \rangle = 0$ , donc  $h - P_S(h) \perp S$ .
2.  $\|h - P_S(h)\| \leq \|h - s\|$  et l'égalité vaut si et seulement si  $s = P_S(h)$ .

La propriété 2) veut dire que, parmi tout vecteur de  $S$ , celui qui est le plus proche de  $h \in \mathcal{H}$  est la projection orthogonale de  $h$  sur  $S$ , qu'on appellera aussi « *la meilleure approximation* » de  $h$  dans  $S$ .

## 4.5 La série de Fourier dans $L^2[0, 2\pi]$

On va s'intéresser maintenant à l'espace de Hilbert  $L^2[0, 2\pi]$ .

**Déf. 4.5.1 (SONC de Fourier)** *Le système de fonctions :*

$$\begin{aligned} u_n : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto u_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

est un SONC de  $L^2[0, 2\pi]$ .

La preuve du fait que le système soit complet est hors du but de ce cours, mais on peut facilement vérifier l'orthonormalité, en fait :

$$\langle u_n, u_m \rangle = \int_0^{2\pi} u_n(t) u_m(t)^* dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{int} e^{-imt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} dt.$$

- Si  $n = m$ , alors  $e^{i(n-m)t} = e^0 = 1$  et donc  $\langle u_n, u_n \rangle = \|u_n\|^2 = 1$  ;
- Si  $n \neq m$ , alors, on écrivant  $s = i(n - m)$  on peut réécrire le produit scalaire comme ceci :

$$\langle u_n, u_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{st} dt = \frac{1}{2\pi s} [e^{st}]_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{1}{2\pi i(n - m)} [e^{i(n-m)2\pi} - e^{i(n-m)0}] = 0$$

où dans la dernière égalité on a utilisé la  $2\pi$ -périodicité de l'exponentiel complexe.

En résumé,  $\langle u_n, u_m \rangle = \delta_{n,m}$ , ce qui prouve l'orthonormalité.

Le SONC de Fourier qu'on vient de définir permet de diagonaliser les opérateurs stationnaires  $T : L^2(\mathbb{T}) \rightarrow L^2(\mathbb{T})$ . De plus, les résultats par rapport à l'identification entre opérateurs stationnaires et opérateurs de convolution avec la réponse impulsionnelle et, aussi, avec multiplicateurs de Fourier par la fonction de transfert peuvent être généralisés.

**Déf. 4.5.2 (Série de Fourier)** *L'expansion de Hilbert-Fourier d'une fonction  $f \in L^2[0, 2\pi]$  est dite série de Fourier de  $f$  :*

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, u_n \rangle u_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) u_n,$$

qu'on rappelle être une égalité dans le sens de la norme de  $L^2[0, 2\pi]$ , i.e.

$$\left\| f - \sum_{n=-N}^N \langle f, u_n \rangle u_n \right\|_{N \rightarrow +\infty}^2 \longrightarrow 0 \iff \int_0^{2\pi} \left| f(t) - \sum_{n=-N}^N \langle f(t), u_n(t) \rangle u_n(t) \right|^2 dt \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Explicitement :

$$\begin{aligned} \langle f(t), u_n(t) \rangle u_n(t) &= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \\ &= \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \right) e^{int} \\ &= \left( \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \right) \frac{1}{2\pi} e^{int}. \end{aligned}$$

On peut donc normaliser de trois manières différentes les coefficients de Fourier de  $f$  :

1.  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$  coefficients de Fourier relativement au SONC  $\left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \right)_{n \in \mathbb{Z}}$  ;
2.  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$  coefficients de Fourier relativement à  $(e^{int})_{n \in \mathbb{Z}}$  ;
3.  $\int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$  coefficients de Fourier relativement à  $\left( \frac{1}{2\pi} e^{int} \right)_{n \in \mathbb{Z}}$ .

Dans ce cours, pour garder la cohérence avec la notation de la section précédente, on privilège la première normalisation, i.e. on définit les coefficients de Fourier de  $f \in L^2[0, 2\pi]$  comme ceci :

$$\boxed{\hat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt} \quad \text{Coefficients de Fourier de } f \in L^2[0, 2\pi],$$

et donc la série de Fourier de  $f \in L^2[0, 2\pi]$  comme ceci :

$$\boxed{f(t) \underset{L^2[0, 2\pi]}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int}}.$$

Comme déjà souligné dans l'étude de la DFT, chaque choix de normalisation a des avantages et des inconvénients, l'avantage principal d'utiliser la définition de coefficients de Fourier comme fait avant c'est que les formules du théorème suivant sont très simples et n'ont pas besoin de coefficients additionnels.

**Théorème 4.5.1** Soient  $f, g \in L^2[0, 2\pi]$  et soient  $\hat{f}, \hat{g} \in \ell^2(\mathbb{Z})$  les suites des coefficients de Fourier de  $f, g$ , respectivement, i.e.  $\hat{f} = (\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $\hat{g} = (\hat{g}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ . Alors :

$$\langle f, g \rangle_{L^2[0, 2\pi]} = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})} \quad \text{Relation de Parseval}$$

$$\|f\|_{L^2[0, 2\pi]}^2 = \|\hat{f}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2 \quad \text{Identité de Plancherel.}$$

*Observations :*

1. La série de Fourier pour une fonction  $f \in L^2[0, 2\pi]$  nous dit qu'on peut reconstruire (dans le sens défini ci-dessus) une *fonction de variable continue*  $t$  avec une superposition d'ondes harmoniques de *fréquences discrètes*  $n$ , i.e.  $e^{int}$ . Contrairement au cas de la transformée de Fourier discrète dans  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , où les fréquences allaient de 0 à  $\frac{N}{2}$ , ici *les fréquences des oscillations harmoniques*  $e^{int}$  *augmentent sans limite supérieure* ;
2. Chaque coefficient de Fourier  $\hat{f}(n)$  est un nombre complexe :  $\hat{f}(n) = |\hat{f}(n)| e^{i \text{Arg}(\hat{f}(n))}$ , on appelle :
  - $\{|\hat{f}(n)|, n \in \mathbb{Z}\}$  : **spectre** (d'amplitude) de  $f$  (clairement :  $|\hat{f}(n)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ) ;
  - $\{|\hat{f}(n)|^2, n \in \mathbb{Z}\}$  : **spectre de puissance** de  $f$  ;
  - $\{\text{Arg}(\hat{f}(n)), n \in \mathbb{Z}\}$  : **spectre de phase** de  $f$  ;
3. Comme dans le cas de la transformée discrète, le module du coefficient de Fourier, i.e.  $|\hat{f}(n)|$  mesure l'importance de l'harmonique  $e^{int}$  dans la reconstruction de  $f$  ;
4. La signification de  $\hat{f}(0)$  est encore liée à la moyenne, en fait :

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-i0t} dt = \sqrt{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = \sqrt{2\pi} \langle f \rangle,$$

et donc la série de Fourier pour  $f \in L^2[0, 2\pi]$  peut être réécrite comme ceci :

$$f = \langle f \rangle + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \hat{f}(n) e^{int}$$

et, comme dans le cas discret, on peut interpréter cette écriture en disant que  $f$  est décomposée dans la somme de sa valeur moyenne et des détails plus fins, qui sont reconstruits par les harmoniques d'ordre supérieur avec des poids donnés par les coefficients de Fourier de  $f$  ;

5. L'identité de Plancherel pour  $f \in L^2[0, 2\pi]$  peut être écrite explicitement comme ceci :

$$\boxed{\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2} \quad (\text{Lien entre séries et intégrales}),$$

et donc elle permet d'établir un lien entre séries et intégrales ! Ce lien est très utile pour calculer la somme des séries : en fait, en général, on a des critères pour déterminer si une série converge ou pas, mais on ne sait pas calculer sa somme. La possibilité de déterminer ou approximer la somme d'une série via des intégrales est un résultat très puissant de la théorie de Fourier, dont on verra des applications dans les TD de ce cours.

6. Si on interprète  $f \in L^2[0, 2\pi]$  comme un signal, alors  $\|f\|^2$  représente son énergie. L'identité de Plancherel dit alors que l'énergie d'un signal peut être décomposée en la somme des modules carrés des coefficients de Fourier du signal même.

7. Si on avait défini les coefficients de Fourier avec la formule  $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$ , alors la relation de Parseval et l'identité de Plancherel seraient :

$$\langle f, g \rangle_{L^2[0, 2\pi]} = 2\pi \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})}, \quad \|f\|_{L^2[0, 2\pi]}^2 = 2\pi \|\hat{f}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2.$$

On termine cette section avec un résultat remarquable (la preuve peut être consulté dans le livre de Vretblad, page 84), qui dit que les coefficients de Fourier identifient univoquement les fonctions de  $L^2[0, 2\pi]$  continues par morceaux.

**Théorème 4.5.2** *Si  $f \in L^2[0, 2\pi]$  est continue par morceaux, i.e.  $f$  a un nombre fini de discontinuités dans son domaine, et si  $\hat{f}(n) = 0 \forall n \in \mathbb{Z}$ , alors  $f(t) = 0 \forall t \in [0, 2\pi]$  dans lesquels  $f$  est continue. Comme conséquence, si  $f, g \in L^2[0, 2\pi]$  sont continues et  $\hat{f}(n) = \hat{g}(n) \forall n \in \mathbb{Z}$  alors  $f \equiv g$ .*

#### 4.5.1 La transformée de Fourier sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ et sur $L^2[0, 2\pi]$

Le résultat clé pour pouvoir étendre la transformée de Fourier de  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  à  $\ell^2(\mathbb{Z})$  est le suivant.

**Théorème 4.5.3** *Les transformations :*

$$\begin{aligned} I_1 : L^2[0, 2\pi] &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) \\ f &\longmapsto I_1(f) = (\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} I_2 : \ell^2(\mathbb{Z}) &\longrightarrow L^2[0, 2\pi] \\ (z(n))_{n \in \mathbb{Z}} &\longmapsto I_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} z(n) e^{int}, \end{aligned}$$

sont isomorphismes d'espaces de Hilbert, c'est-à-dire : il sont linéaires, il réalisent une bijection et il sont unitaires (ils préservent le produit scalaire et donc les normes).

Le résultat qu'on vient d'énoncer nous dit que, à chaque  $f \in L^2[0, 2\pi]$  correspond une (et seulement une) suite  $(z(n))_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\ell^2(\mathbb{Z})$ , qui est la suite de ses coefficients de Fourier  $(\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{N}}$ , i.e.  $\hat{f}(n) = z(n) \forall n \in \mathbb{Z}$ ; vice-versa, chaque suite  $z = (z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  de  $\ell^2(\mathbb{Z})$  peut être identifiée avec la suite des coefficients de Fourier d'une (et seulement une) fonction  $f \in L^2[0, 2\pi]$ , i.e.  $z(n) = \hat{f}(n) \forall n \in \mathbb{Z}$ .

Les opérateurs  $I_1$  et  $I_2$  sont appelés **transformée de Fourier** sur  $L^2[0, 2\pi]$  et sur  $\ell^2(\mathbb{Z})$ , respectivement. C'est clair que  $I_1$  et  $I_2$  sont la transformation inverse l'une de l'autre, i.e. :

$$I_1 \circ I_2 = \text{id}_{\ell^2(\mathbb{Z})}, \quad I_2 \circ I_1 = \text{id}_{L^2[0, 2\pi]}.$$

#### 4.5.2 SONC de Fourier dans les espaces de Hilbert $L^2(\mathbb{T})$ et $L^2[a, b]$

Le choix de considérer l'intervalle  $[0, 2\pi]$  dans les sections antérieures est motivé seulement par le fait qu'il est très simple de démontrer l'orthonormalité du système  $(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int})_{n \in \mathbb{N}}$ . Néanmoins, toutes les propriétés qu'on a énoncées pour ce système de fonctions restent valides si on change  $[0, 2\pi]$  avec, par exemple,  $[-\pi, \pi]$  ou n'importe quel intervalle de taille  $2\pi$ .

De plus, les propriétés restent valides si on considère des fonctions définies sur tout l'intervalle réel, i.e.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , mais  $2\pi$ -périodiques. Si on écrit avec  $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$  un intervalle quelconque de taille  $2\pi$ , alors on peut définir l'espace de Hilbert :

$$L^2(\mathbb{T}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ } 2\pi\text{-périodique} : \int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 dt < +\infty\}.$$

En particulier, ça vaut que le système de fonctions :

$$\begin{aligned} u_n : \mathbb{T} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto u_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

est un SONC de  $L^2(\mathbb{T})$ .

Si au lieu d'une fonction  $2\pi$ -périodique on doit gérer une fonction  $f \in L^2[a, b]$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , alors il faut changer le SONC de Fourier pour avoir fonctions  $(b - a)$ -périodiques. L'astuce consiste tout simplement en multiplier la variable de  $f$  par une quantité opportune, la pulsation, qui rend  $f$  une fonction  $(b - a)$ -périodique. On définit :

- $T = b - a$  : période ;
- $\nu = \frac{1}{T}$  : fréquence ;
- $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$  : pulsation

et on observe que

$$\begin{aligned} e^{i\omega n(t+T)} &= \cos[\omega n(t+T)] + i \sin[\omega n(t+T)] = \cos[\omega nt + \omega nT] + i \sin[\omega nt + \omega nT] \\ &= \cos\left[\omega nt + \frac{2\pi}{T}nT\right] + i \sin\left[\omega nt + \frac{2\pi}{T}nT\right] = \cos[\omega nt + 2\pi n] + i \sin[\omega nt + 2\pi n] \\ &= \cos(\omega nt) + i \sin(\omega nt) = e^{i\omega nt}, \end{aligned}$$

donc  $t \mapsto e^{i\omega nt}$  est une fonction  $T$ -périodique. Grâce à ces considérations, on peut démontrer que un SONC de  $L^2[a, b]$  est donné par l'ensemble de fonctions :

$$\begin{aligned} u_n : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto u_n(t) = \frac{1}{\sqrt{b-a}}e^{2\pi ni \frac{t-a}{b-a}}, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

## 4.6 Approximation de la série de Fourier en $L^2(\mathbb{T})$ avec la DFT

Le résultat du théorème de la projection 4.4.2 appliqué à  $f \in L^2(\mathbb{T})$  dit que la fonction

$$S_k = \sum_{m=-k}^k \hat{f}(m)u_m$$

est la meilleure approximation de  $f$  dans le sous-espace  $U_k$  de  $L^2(\mathbb{T})$  engendré par le SON  $(u_m(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{imt})_{m=-k}^k$ , i.e.

$$U_k = \{g_k \in L^2(\mathbb{T}) : \exists (a(m))_{m=-k}^k \subset \mathbb{C} : g_k = \sum_{m=-k}^k a(m)u_m\}.$$

Bien que très important à niveau théorique, l'explicitation de  $S_k$  montre un problème pratique :

$$S_k(t) = \sum_{m=-k}^k \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{T}} f(s)e^{-ims} ds \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imt},$$

le problème consiste dans le fait qu'il faut connaître les valeurs de  $f$  dans tous les points de l'intervalle  $\mathbb{T}$  pour trouver la meilleure approximation de  $f$  dans  $U_k$  !!

Ici on présente une autre piste, qui donne une approximation sous-optimale de  $f$  en  $U_k$ , par rapport à celle donnée par  $S_k$ , mais qui a l'avantage de nécessiter seulement la connaissance d'un nombre fini d'échantillons de  $f$  en  $\mathbb{T}$ . Cette piste est fondée sur le résultat suivant, qu'on cite sans démonstration.

**Lemme 4.6.1** *Soit  $g_k \in U_k$  la fonction construite avec les échantillons de  $f$  suivants :*

$$g_k \left( \frac{2\pi}{N}n \right) = f \left( \frac{2\pi}{N}n \right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4.1)$$

où  $N = 2k + 1$  est la cardinale de  $\{-k, \dots, 0, \dots, k\}$ . Alors :

$$\|f - g_k\| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Comme dit avant, on sait que  $\left\| f - \sum_{m=-k}^k \hat{f}(m)u_m \right\|$  converge vers 0 plus rapidement que  $\|f - g_k\|$  quand  $k \rightarrow +\infty$ , mais maintenant on va prouver que les coefficients  $a(m)$  dans la formule  $g_k = \sum_{m=-k}^k a(m)u_m$  peuvent être calculés efficacement grâce à la DFT, ce que n'est pas possible pour  $\hat{f}(m)$ . En fait, comme pour tout  $t \in \mathbb{T}$  :

$$g_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-k}^k a(m)e^{imt}$$

alors, en donnant les valeurs  $\frac{2\pi}{N}n$  à  $t$  on peut exprimer l'équation (4.1) explicitement comme ceci :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-k}^k a(m)e^{im\frac{2\pi}{N}n} = f \left( \frac{2\pi}{N}n \right)$$

qui peut être réécrite dans la forme suivante :

$$\frac{1}{N} \sum_{m=-k}^k a(m) e^{im \frac{2\pi}{N} n} = \sqrt{2\pi} f \left( \frac{2\pi}{N} n \right). \quad (4.2)$$

La côté de gauche de la formule ci-dessus est très similaire à la formule de synthèse, la seule différence étant donnée par le fait que la sommation est  $\sum_{m=-k}^k$  au lieu de  $\sum_{m=0}^{N-1}$ . Néanmoins, on note que le nombre d'indexes discrets entre  $-k$  et  $k$  est  $N = 2k + 1$ , exactement le même nombre entre 0 et  $N - 1$ , donc, grâce au Lemme 3.7.1, si on démontre que la suite  $a(m) e^{im \frac{2\pi}{N} n}$  est  $N$ -périodique, alors on peut remplacer l'ensemble de variabilité des indexes avec  $\{0, 1, \dots, N - 1\}$ .

Comme on n'a pas des information a priori relativement à la suite  $(a(m))_m$ , pour démontrer ce qu'on veut, on va utiliser une voie indirecte : on sait que  $f(t)$  est  $2\pi$ -périodique, et cela implique que la suite  $(f(\frac{2\pi}{N}n))_n$  soit  $N$ -périodique, en fait :

$$f \left( \frac{2\pi}{N} n \right) = f \left( \frac{2\pi}{N} n + 2\pi \right) = f \left( \frac{2\pi n + 2\pi N}{N} \right) = f \left( \frac{2\pi}{N} (n + N) \right).$$

En plus, on sait que  $e^{im \frac{2\pi}{N} n}$  est  $N$ -périodique, donc la formule (4.2) peut être vraie si et seulement si  $(a(m))_m$  est  $N$ -périodique. Alors, comme dit avant, le Lemme 3.7.1 nous permet de changer la sommation  $\sum_{m=-k}^k$  en  $\sum_{m=0}^{N-1}$  et la formule (4.2) devient :

$$\text{IDFT}(Na(m)) = \sqrt{2\pi} f \left( \frac{2\pi}{N} n \right) \implies \text{DFT}(\text{IDFT}(Na(m))) = \sqrt{2\pi} \text{DFT} \left( f \left( \frac{2\pi}{N} n \right) \right),$$

i.e.

$$a(m) = \frac{\sqrt{2\pi}}{N} \text{DFT} \left( f \left( \frac{2\pi}{N} n \right) \right).$$

Si on écrit

$$\tilde{f}(n) = f \left( \frac{2\pi}{N} n \right) \quad \forall n = 0, 1, \dots, N - 1,$$

alors :

$$\boxed{a(m) = \frac{\sqrt{2\pi}}{N} \hat{f}(m)} \quad \forall m = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Si on compare les deux approximations :

$$\left\| f - \sum_{m=-k}^k \frac{2\pi}{N} \hat{f}(m) u_m \right\|_{k \rightarrow +\infty} \rightarrow 0 \quad \text{vs.} \quad \left\| f - \sum_{m=-k}^k \hat{f}(m) u_m \right\|_{k \rightarrow +\infty} \rightarrow 0,$$

on voit que, quand  $k$  est grand, i.e. quand le nombre d'échantillons  $N = 2k + 1$  est grand, on peut approximer la série de Fourier de  $f$  en utilisant de coefficients donnés par la DFT de  $N$  échantillons de  $f$ .

Si, au lieu de  $f \in L^2(\mathbb{T})$ , on avait une fonction  $f \in L^2[a, b]$ ,  $(b - a)$ -périodique, alors la suite  $a(m)$  serait la suivante :

$$a(m) = \frac{b - a}{N\sqrt{2\pi}} e^{-i \frac{2\pi a}{b-a} m} \hat{f}(m).$$

## 4.7 Le SONC et la série de Fourier réelle

On va maintenant introduire le SONC de Fourier réel de  $L^2(\mathbb{T})$ .

**Déf. 4.7.1** *L'ensemble :*

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nt), n = 1, 2, 3, \dots \right\}$$

est dit **système de Fourier réel** de  $L^2(\mathbb{T})$ .

**Théorème 4.7.1** *Le système de Fourier réel est un SONC pour  $L^2(\mathbb{T})$  et donc pour toute  $f \in L^2(\mathbb{T})$  ça vaut l'expansion :*

$$f(t) \underset{L^2(\mathbb{T})}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nt),$$

avec

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) dt \implies \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) dt = \langle f \rangle_{\mathbb{T}}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \cos(nt) dt \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \sin(nt) dt \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

L'expansion en série<sup>1</sup> du théorème ci-dessus est dite **série de Fourier réelle** de  $f \in L^2(\mathbb{T})$  et les coefficients  $a_0, a_n, b_n, n = 1, 2, \dots$  sont dits **coefficients de Fourier réels** de  $f$ .

L'égalité doit bien sûr être interprété dans le sens de  $L^2(\mathbb{T})$ , i.e.

$$\int_{\mathbb{T}} \left[ f(t) - \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^N b_n \sin(nt) \right) \right]^2 dt \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0,$$

l'expression

$$S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^N b_n \sin(nt)$$

est dite **polynôme trigonométrique d'ordre  $N$** .  $S_N$  est une fonction  $2\pi$ -périodique, donc la série de Fourier écrite ci-dessus peut approximer seulement fonctions  $2\pi$ -périodiques.

Pour comprendre la présence de la constante  $\frac{1}{\pi}$  on peut considérer, par exemple, l'expansion de  $f$  par rapport au système de cosinus :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt) \rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \cos(nt) dt \right) \cos(nt),$$

la même considération vaut pour le système de sinus et pour la constante.

1. Dans les TD on verra que si  $f$  est paire et  $\mathbb{T}$  est un domaine symétrique, alors sa série de Fourier est donné par l'expansion des cosinus plus fonction constante. Par contre, si  $f$  est impaire et  $\mathbb{T}$  est un domaine symétrique, alors sa série de Fourier a seulement la partie des sinus.

La constante  $\frac{1}{\pi}$  est incorporée dans la définition des coefficients de Fourier pour permettre d'identifier  $\frac{a_0}{2}$  avec la moyenne de  $f$  et donc pour pouvoir *interpréter la série de Fourier réelle comme la superposition de la moyenne de  $f$  et de combinaisons d'ondes harmoniques avec fréquence croissante*, en particulier :

- $t \mapsto a_1 \cos(t) + b_1 \sin(t)$  est dite harmonique fondamentale ;
- $t \mapsto a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$  est dite harmonique d'ordre  $n$ .

Un *diapason* peut émettre sons « purs », i.e. constitués par la seule harmonique fondamentale, par contre la grande majorité des instruments musicaux produit des sons qui peuvent être décrits par une série de Fourier (!), i.e. une superposition d'harmoniques avec fréquences multiples d'une fréquence fondamentale.

Grâce au théorème de la projection et à l'identité de Plancherel on peut dire que l'erreur quadratique moyen (i.e. la norme  $L^2$ ) entre  $f$  et le polynôme trigonométrique d'ordre  $N$  est :

$$E_N = \int_{\mathbb{T}} [f(t) - S_N(t)]^2 dt = \int_{\mathbb{T}} f(t)^2 dt - \pi \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right],$$

comme  $E_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ , ça vaut que :

$$\int_{\mathbb{T}} f(t)^2 dt = \pi \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right],$$

qui est une identité entre une intégrale et une série numérique très utile pour déterminer l'une grâce au calcul de l'autre.

Si on considère  $L^2[a, b]$  et on écrit  $T = b - a$ , et  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , alors son SONC de Fourier réel est donné par :

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega nt), \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(\omega nt), n = 1, 2, 3, \dots \right\}$$

et l'expansion en série de Fourier de  $f \in L^2([a, b])$ ,  $f$  ( $T$ -périodique) est :

$$f(t) \underset{L^2[a,b]}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\omega nt) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(\omega nt),$$

avec :

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{T} \int_a^b f(t) dt = \langle f \rangle_{[a,b]} \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_a^b f(t) \cos(\omega nt) dt \quad \forall n = 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_a^b f(t) \sin(\omega nt) dt \quad \forall n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Les polynômes de Fourier dans ce cas sont fonctions  $T$ -périodiques, donc la série de Fourier peut approximer seulement fonctions  $T$ -périodiques.

*Observation importante* : on peut donner de contre-exemples qui montrent que **le SONC de Fourier réel ne diagonalise pas les opérateurs stationnaires**, néanmoins, il est très utilisé dans le traitement de signaux réels car il évite d'introduire des quantités complexes.

## 4.8 Convergence ponctuelle de la série de Fourier réelle : le théorème de Dirichlet

Comme on l'a dit dans le chapitre 1, la communauté mathématique plus « classique » a été très sceptique vis-à-vis de la série de Fourier, car Fourier n'a pas donné des résultats rigoureux de convergence, ni en norme  $L^2$  ni ponctuelle, de sa série.

Les résultats de convergence en norme qu'on a discuté dans les sections antérieures sont venus après Fourier et, en tout cas, ils ne sont pas suffisants pour garantir la convergence ponctuelle de la série. Les premières conditions de ce type ont été découvertes par le mathématicien allemand Dirichlet<sup>2</sup> (Düren 1805 – Göttingen 1859) en 1829. La démonstration constructive de Dirichlet a une grande importance dans l'analyse de Fourier, néanmoins, sa longueur fait qu'il soit impossible de l'incorporer dans ce cours.

Nous nous limitons, donc, à citer d'une manière rigoureuse le théorème de Dirichlet. Pour cela, on va introduire une notation et deux définitions. La notation est la suivante : si  $t_0$  est un point de discontinuité d'une fonction  $f$  réelle de variable réelle, alors on écrit les limites à droite et à gauche comme ceci :

$$f(t_0^+) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t), \quad f(t_0^-) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t).$$

**Déf. 4.8.1 (Fonction de Dirichlet)** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est une fonction de Dirichlet si elle vérifie les trois conditions suivantes :

1.  $f$  est  $T$ -périodique,  $T \in \mathbb{R}^+$  ;
2.  $f$  est continue par morceaux, i.e. il existe seulement un nombre fini de points dans lesquels  $f$  n'est pas continue ;
3. Pour tout  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,

$$f(t_0) = \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}, \tag{4.3}$$

i.e. en tout point  $t_0 \in \mathbb{R}$ , la valeur de  $f$  en  $t_0$  est la moyenne de la limite à droite et de la limite à gauche de  $f$  en  $t_0$ .

La condition (4.3) dit que la valeur en  $t_0$  est la moyenne de la limite à droite et de la limite à gauche de  $f$  en  $t_0$ . Cette condition est trivialement vérifiée en tout point où  $f$  est continue. C'est seulement aux éventuels points de discontinuité de  $f$  que cette condition est non triviale.

**Déf. 4.8.2 (Dérivée généralisée)** Soit  $f$  une fonction de Dirichlet et  $t_0 \in \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  possède une dérivée généralisée à droite en  $t_0$  s'il existe (finie) la limite :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0^+)}{h},$$

de la même manière, on dit que  $f$  possède une dérivée généralisée à gauche en  $t_0$  si'il existe (finie) la limite :

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0^-)}{h}.$$

---

2. C'est dans l'effort de démontrer la convergence ponctuelle de la série de Fourier que Dirichlet a donné la définition « moderne » de fonction comme correspondance univoque entre deux ensembles. En fait, à cette époque, une fonction était encore identifiée avec sa expression analytique.

On peut finalement énoncer le théorème de Dirichlet.

**Théorème 4.8.1 (Théorème de Dirichlet (1829))** *Soit  $f$  une fonction de Dirichlet et  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Si la fonction  $f$  possède des dérivées généralisées à droite et à gauche au point  $t_0$ , alors la série de Fourier réelle évaluée en  $t_0$  converge vers  $f(t_0)$ .*

Les conditions du théorème sont dites « conditions de Dirichlet » et sont seulement suffisantes mais pas nécessaires pour la convergence ponctuelle de la série de Fourier réelle. Trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence ponctuelle de la série de Fourier reste un problème toujours ouvert. Néanmoins, heureusement, les conditions de Dirichlet sont vérifiées par la grande majorité des fonctions qu'on rencontre en les applications pratiques.

Il faut souligner que, si on élimine la requête (4.3), alors la série de Fourier converge vers  $f(t_0) = \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}$ .

Une observation finale relativement aux possibles conséquences de la manque de continuité de  $f$  : le grand mathématicien russe Kolmogorov (Tambov 1903 – Moscou 1987) a construit en 1923 une fonction avec de discontinuités pathologiques qui font que sa série de Fourier soit divergente en chaque point !

#### 4.8.1 Le phénomène de Gibbs et les sommes de Cesàro

L'énoncé du théorème de Dirichlet ne doit pas faire penser que le comportement de la série de Fourier dans un voisinage d'une discontinuité d'une fonction soit « régulière ». En fait, à chaque fois qu'on approche la discontinuité d'une fonction, des oscillations, dite de **Gibbs**, apparaissent. Même en augmentant la quantité de coefficients de Fourier les oscillations restent. Si une fonction  $f$  est de Dirichlet, alors les oscillations à gauche et à droite de la discontinuité se compensent et leur moyenne coïncide avec la valeur de  $f$  dans la discontinuité.

On peut démontrer que l'écart entre la valeur de la fonction  $f$  et la valeur du polynôme trigonométrique  $S_N$  dans un voisinage proche comme l'on veut d'une discontinuité reste proche du 18% même quand  $N \rightarrow +\infty$ . L'étude du phénomène de Gibbs a des subtilités mathématiques non-triviales et il est hors du but de ce cours. Pour connaître les détails du phénomène de Gibbs l'élève peut consulter, par exemple, l'excellent livre de Andres Vretblad : « Fourier Analysis and Its Applications », Springer, 2003.

Nous nous limitons à montrer, dans la figure 4.1, l'effet de Gibbs pour la fonction créneau.

Il y a la possibilité d'éliminer les oscillations de Gibbs si on considère, au lieu de la somme usuelle, une sommation dite de Cesàro (Naples, 1859 – Torre Annunziata, 1906), dans laquelle on opère de moyennes des sommes partielles. Le opération de moyenne élimine les oscillations de Gibbs, comme montré dans la figure 4.2.

#### 4.8.2 Le lemme de Riemann-Lebesgue et la vitesse de convergence à 0 des coefficients de Fourier

On commence avec un résultat général connu comme lemme de Riemann-Lebesgue.

**Lemme 4.8.1 (Lemme de Riemann-Lebesgue)** *Soit  $f \in L^1[a, b]$ , alors :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos(nt) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{int} dt = 0.$$

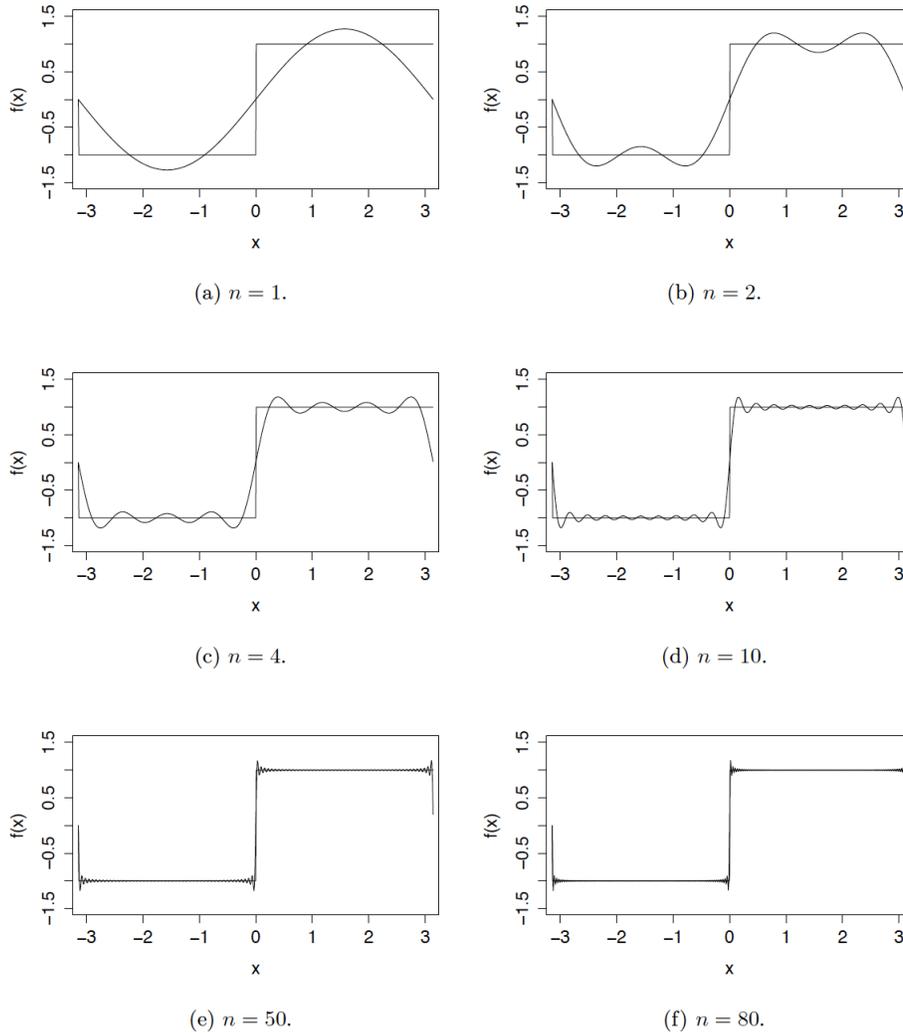


FIGURE 4.1 – Le phénomène de Gibbs pour la fonction créneau, image : courtoisie de Eric Luçon.

L'interprétation géométrique du lemme est que la fonction  $f(t) \cos(nt)$  ou  $f(t) \sin(nt)$  oscille avec une fréquence tellement élevée, quand  $n \rightarrow +\infty$ , que les valeurs autour de la moyenne se compensent et donc l'intégrale converge vers 0.

Un corollaire immédiat du lemme de Riemann-Lebesgue est que **les coefficients de Fourier de la série de Fourier d'une fonction  $f \in L^2[a, b]$  (et  $(b - a)$ -périodique, bien sûr), décroissent vers 0** quand  $n \rightarrow +\infty$ .

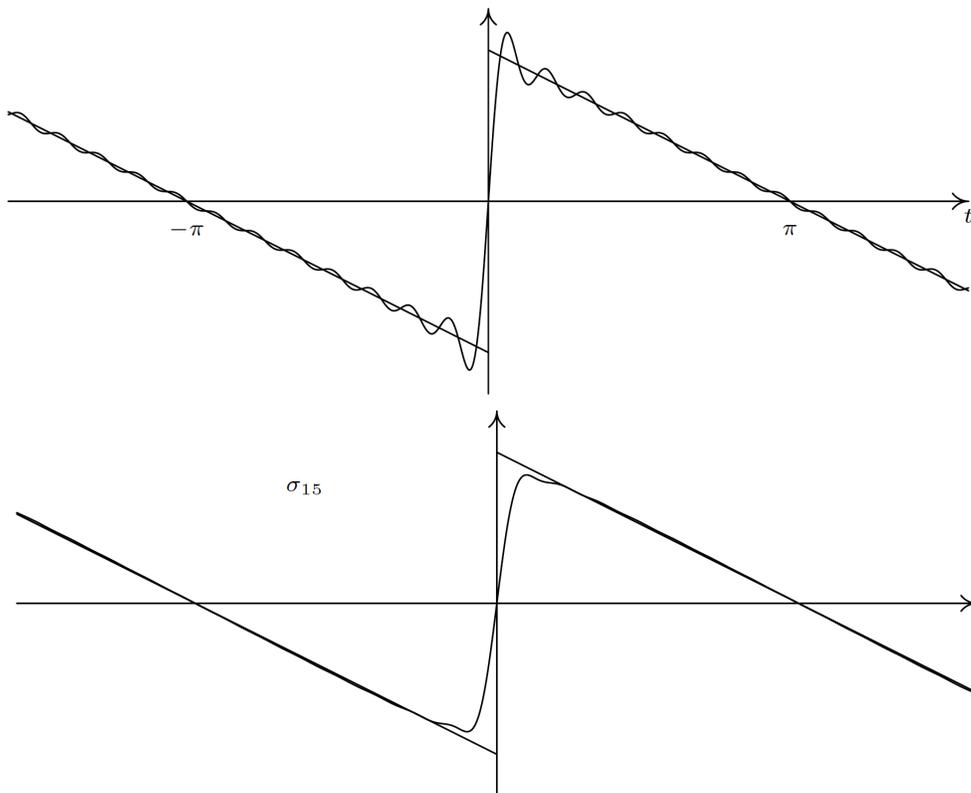


FIGURE 4.2 – De haut en bas : le phénomène de Gibbs pour une fonction de Dirichlet et le phénomène éliminé grâce aux sommes de Cesàro (d'ordre 15 dans la figure).

Le théorème suivant montre que la régularité de  $f$  a un impact important sur la vitesse de décroissance des coefficients de Fourier.

**Théorème 4.8.2** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction :

- de classe  $\mathcal{C}^p([a, b])$ , i.e.  $f$  dérivable  $p$  fois sur  $[a, b]$  avec  $p$  dérivées continues ;
- $(b - a)$ -périodique ;
- qui possède des dérivées généralisées égales dans les extrêmes de l'intervalle  $[a, b]$ .

Alors, les coefficients de Fourier de  $f$ ,  $a_n, b_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  vérifient :

$$a_n, b_n = o\left(\frac{1}{n^p}\right),$$

i.e., ils décroissent vers 0 plus rapidement que  $\frac{1}{n^p}$ .

Ce résultat est très importante car nous dit que si  $f$  est « bien lisse », alors on peut l'approximer avec précision même on considérant très peu de coefficients de sa série de Fourier.

Par contre, si  $f$  n'est pas trop lisse, alors la convergence vers 0 des coefficients de Fourier de  $f$  est lente et il faut considérer une grande quantité de coefficients de Fourier pour avoir une bonne approximation de  $f$ .

Le vice-versa est vrai aussi sous des hypothèses opportunes qu'on n'a pas le temps de discuter. Le concept le plus important à retenir c'est que plus la convergence vers 0 des coefficients de Fourier d'une fonction est rapide, plus la fonction est lisse.

*Preuve.*

On considère seulement les coefficients  $a_n$ , la preuve est identique pour les coefficients  $b_n$ . De plus, pour simplicité, on développe la preuve dans le cas  $b = \pi$ ,  $a = -\pi$ , car on peut toujours se ramener à ce cas avec la transformation linéaire de variable suivante :

$$s(t) = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2\pi}t,$$

en fait  $s(\pi) = b$  et  $s(-\pi) = a$ .

Avec cette convention, on intègre par parties l'expression des  $a_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , avec  $u = f(t)$  et  $dv = \cos(\omega nt)dt$ , donc  $du = f'(t)dt$  et  $v = \frac{1}{\omega n} \sin(\omega nt)$ .

On obtient :

$$a_n = \frac{1}{\pi n} [f(t) \sin(nt)]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \sin(nt) dt = \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \cos\left(\frac{\pi}{2} + nt\right) dt,$$

car  $\sin(n\pi) = \sin(-n\pi) = 0$  et  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha) \forall \alpha \in \mathbb{R}$ .

En procédant encore une fois à l'intégration par parties on obtient :

$$a_n = \frac{1}{\pi n} \left\{ \frac{1}{n} [f'(t) \sin\left(\frac{\pi}{2} + nt\right)]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f''(t) \sin\left(\frac{\pi}{2} + nt\right) dt \right\},$$

mais le premier terme dans les accolades est nul car, par hypothèse,  $f'(-\pi) = f'(\pi)$ , donc

$$\begin{aligned} [f'(t) \sin\left(\frac{\pi}{2} + nt\right)]_{-\pi}^{\pi} &= f'(\pi) \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) - f'(-\pi) \sin\left(\frac{\pi}{2} - n\pi\right) \\ &= f'(\pi) \left[ \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - n\pi\right) \right] \\ &= f'(\pi) \left[ \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - n + 2n\pi\right) \right] \\ &= f'(\pi) \left[ \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on peut réécrire le deuxième terme dans les accolades comme ceci :

$$-\frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f''(t) \sin\left(\frac{\pi}{2} + nt\right) dt = \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f''(t) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + nt\right) dt = \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f''(t) \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 2 + nt\right) dt,$$

or,

$$a_n = \frac{1}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} f''(t) \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 2 + nt\right) dt.$$

En résumé, une intégration par parties de  $a_n$  amène à l'expression

$$a_n = \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \cos\left(\frac{\pi}{2} + nt\right) dt,$$

deux intégrations par parties de  $a_n$  amènent à l'expression

$$a_n = \frac{1}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} f''(t) \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 2 + nt\right) dt,$$

si on intègre de  $a_n$   $p$  fois par parties, on arrive à l'expression

$$a_n = \frac{1}{\pi n^p} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(p)}(t) \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot p + nt\right) dt.$$

D'une façon analogue, on trouve

$$b_n = \frac{1}{\pi n^p} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(p)}(t) \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot p + nt\right) dt.$$

On observe maintenant que, grâce aux identités trigonométriques  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ , les intégrales

$$\varepsilon_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(p)}(t) \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot p + nt\right) dt, \quad \tilde{\varepsilon}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(p)}(t) \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot p + nt\right) dt$$

sont, par définition, les coefficients de Fourier de la fonction  $f^{(p)}$  au signe près. Par hypothèse  $f^{(p)}$  est continue sur  $[-\pi, \pi]$  et donc, comme le domaine  $[-\pi, \pi]$  est compact,  $f^{(p)} \in L^2[-\pi, \pi]$  et donc, grâce au lemme de Riemann-Lebesgue, ses coefficients de Fourier convergent vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$ , or  $\varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  et  $\tilde{\varepsilon}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ , mais alors

$$a_n = \frac{\varepsilon_n}{n^p} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \quad b_n = \frac{\tilde{\varepsilon}_n}{n^p} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

i.e.  $a_n, b_n = o\left(\frac{1}{n^p}\right)$ . □

Ce résultat a été utilisé par A. Krylov (1863-1945) qui l'a mis à la base de sa méthode d'amélioration de la convergence des séries de Fourier pour des fonctions avec de discontinuités.

## Chapitre 5

# La transformée de Fourier pour fonctions non-périodiques

Dans ce dernier chapitre, on considère la transformée de Fourier de fonctions définies sur tout  $\mathbb{R}$  à valeurs complexes et non périodiques. L'analyse de Fourier dans ce cas est très riche de résultat mathématiques élégants mais qui vont bien plus loin du but de ce cours.

On a fait le choix de réduire au minimum le formalisme et de dédier plus de temps aux applications, notamment à la résolution d'équations différentielles.

### 5.1 Transformée de Fourier et transformée de Fourier inverse pour une fonction de $L^1(\mathbb{R})$

Pour introduire la transformée de Fourier relative à des fonctions non-périodiques on va définir les espaces fonctionnels suivants :

$$L^1(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt < +\infty\}$$

$$\mathcal{C}_0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ continue sur tout } \mathbb{R} \text{ et } \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0\}.$$

$L^1(\mathbb{R})$  est un espace de Banach, i.e. un espace vectoriel normé et complet, par rapport à la norme :

$$\|f\| = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt, \quad f \in L^1(\mathbb{R}),$$

tandis que  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$  est un espace de Banach par rapport à la norme :

$$\|f\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|, \quad f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}).$$

Le théorème suivant représente la généralisation du résultats relatifs à la transformée de Fourier discrète et à la transformée de Fourier sur  $L^2(\mathbb{T})$ .

**Théorème 5.1.1** *La transformation :*

$$\begin{aligned} \hat{\cdot} : L^1(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto \hat{f}, \end{aligned}$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

est un opérateur linéaire, continue (par rapport à la topologie engendrée par la norme de  $L^1(\mathbb{R})$  et de  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ ) et injectif. La transformation inverse est donnée par :

$$\check{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)e^{i\omega t} d\omega,$$

i.e.  $\check{f}(t) = f(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ , et  $\hat{\check{f}}(\omega) = f(\omega)$ ,  $\forall \omega \in \mathbb{R}$ , explicitement :

$$\check{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega = f(t), \quad \hat{\check{f}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \check{f}(t)e^{-i\omega t} dt = f(\omega).$$

**Déf. 5.1.1** *La transformation  $\hat{\cdot} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$  est dite transformée de Fourier, tandis que la transformation  $\widehat{\cdot}^1 : \widehat{L^1(\mathbb{R})} \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \rightarrow L^1(\mathbb{R})$  est dite anti-transformée de Fourier, ou transformée de Fourier inverse. De plus :*

- le graphe de la fonction  $\omega \mapsto |\hat{f}(\omega)|$  est dit le **spectre** (d'amplitude) de  $f$  ;
- le graphe de la fonction  $\omega \mapsto |\hat{f}(\omega)|^2$  est dit le **spectre de puissance** de  $f$  ;
- le graphe de la fonction  $\omega \mapsto \text{Arg}(\hat{f}(\omega))$  est dit le **spectre de phase** de  $f$ .

Il faut observer que, même si une fonction  $f \in L^2(\mathbb{T})$  a comme argument une variable continue (réelle), son spectre est donné par de valeurs discrets de coefficients de Fourier. Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  n'est pas périodique, cela ne vaut plus et le spectre de  $f$  devient continue. C'est possible de définir la transformée de Fourier aussi pour fonctions de  $L^2(\mathbb{R})$ , mais dans ce cas la transformation a une expression limite et la théorie devient plus compliquée.

## 5.2 La convolution dans $L^1(\mathbb{R})$ et un exemple remarquable : la convolution avec une Gaussienne

La transformée de Fourier a des propriétés remarquables par rapport à plusieurs opérations mathématiques. Avant de donner la liste de ces propriétés, on donne la définition de convolution dans le cas de fonctions de  $L^1(\mathbb{R})$  et on discute la signification de la convolution d'une fonction avec une Gaussienne.

**Déf. 5.2.1** *Soient  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ , la convolution entre  $f$  et  $g$  est la fonction  $f * g$  définie par :*

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-x)g(x)dx, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

1.  $\widehat{L^1(\mathbb{R})}$  est l'image de la transformation  $\hat{\cdot}$  dans  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ .

**Théorème 5.2.1** Si  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  alors :  $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ .

La convolution « continue » est stationnaire, i.e. commute avec la translation, comme dans le cas discret. En fait, si on fixe  $s \in \mathbb{R}$  et  $g \in L^1(\mathbb{R})$ , alors on peut définir l'opérateur de translation à droite  $R_s$  et l'opérateur de convolution avec  $g$ ,  $T_g$ , comme cela :

$$R_s f(t) = f(t - s), \quad T_g f(t) = (f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t - x)g(x)dx,$$

alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$R_s T_g f(t) = T_g f(t - s) = \int_{\mathbb{R}} f(t - s - x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}} R_s f(t - x)g(x)dx = T_g R_s f(t).$$

Dans la théorie des signaux on trouve très souvent l'opération de convolution avec la fonction Gaussienne, c'est donc utile de comprendre la signification de cette opération. Pour cela, on commence par considérer la « fonction impulsion » suivante :

$$I_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & 0 < t < \varepsilon \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

alors, donnée  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ,

$$(f * I_\varepsilon)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t - x)I_\varepsilon(x)dx = \int_0^\varepsilon f(t - x)\frac{1}{\varepsilon}dx = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon f(t - x)dx,$$

si on considère le changement de variable  $u = t - x$ , alors, formellement, on obtient  $du = -dx$  (car  $x$  est la variable d'intégration et  $t$  est un paramètre de l'intégrale). De plus, les extrêmes inférieur et supérieur d'intégration, respectivement, par rapport à la nouvelle variable  $u$  seront :  $u = t - 0 = t$  et  $u = t - \varepsilon$ , alors

$$(f * I_\varepsilon)(t) = -\frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t-\varepsilon} f(u)du = \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^t f(u)du,$$

mais la dernière quantité est la moyenne de  $f$  dans l'intervalle de taille  $\varepsilon$  :  $[t - \varepsilon, t]$ .

Une Gaussienne  $G_{\mu, \sigma}$  de moyenne  $\mu$  et écart-type  $\sigma$ , est une version « lisse » de l'impulsion  $I_\varepsilon$ , qui a la quasi-totalité de son support dans l'intervalle  $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ , donc :

$$\boxed{f * G_{\mu, \sigma} \simeq \text{moyenne locale de } f \text{ en } [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]}.$$

Ce résultat confirme ce qu'on avait déjà vu dans la section 3.9.6, i.e. qu'opérer la convolution entre un signal et une Gaussienne correspond à un floutage du signal même. On avait vu que l'explication du floutage dans le domaine fréquentiel était le fait que le multiplicateur de Fourier correspondent à la convolution avec la Gaussienne était un filtre passe bas. Ici on a l'explication de l'effet de floutage dans le domaine originale du signal  $f$  : en fait, après la convolution avec une Gaussienne, chaque valeur de  $f$  en  $t$  est remplacé par une approximation de la moyenne locale des valeurs de  $f$ , le paramètre qui gère la localité est l'écart-type de la Gaussienne.

### 5.3 Propriétés de la transformée de Fourier

Dans la table suivante on résume les plus importantes propriétés de la transformée de Fourier,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ .

Fonction originale	Transformée de Fourier
$f(at)$	$\frac{1}{ a } \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$f(t - b)$	$e^{-i\omega b} \hat{f}(\omega)$
$f(at - b)$	$\frac{e^{-i\omega \frac{b}{a}}}{ a } \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$e^{ict} f(t)$	$\hat{f}(\omega - c)$
$(f * g)(t)$	$\sqrt{2\pi} \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega)$
$f'(t)$	$i\omega \hat{f}(\omega)$
$f''(t)$	$-\omega^2 \hat{f}(\omega)$
$\frac{d^n f}{dt^n}$	$(i\omega)^n \hat{f}(\omega)$
$(-it)^n f(t)$	$\frac{d^n \hat{f}}{d\omega^n}(\omega)$
$e^{-\frac{t^2}{2}}$	$e^{-\frac{\omega^2}{2}}$
$e^{-c^2 t^2}$	$\frac{1}{c\sqrt{2}} e^{-\frac{\omega^2}{4c^2}}$

*Observations importantes :*

- $\hat{\cdot}$  transforme le produit par une constante en la division par la même constante ;
- $\hat{\cdot}$ , comme la DFT, transforme la translation de la variable initiale en le produit par un exponentiel complexe ;
- $\hat{\cdot}$ , comme la DFT, transforme la convolution en le produit ponctuel des transformées de Fourier (avec un facteur de normalisation donné par  $\sqrt{2\pi}$ ) ;
- Si, au lieu d'avoir  $f(t)$  et  $g(t)$  dans la couple de Fourier  $(f * g)(t) \longleftrightarrow \sqrt{2\pi} \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega)$  on a  $\check{f}(t)$  et  $\check{g}(t)$ , alors l'application de  $\hat{\cdot}$  donne :

$$\widehat{(\check{f} * \check{g})}(\omega) = \sqrt{2\pi} \hat{\check{f}}(\omega) \hat{\check{g}}(\omega) = \sqrt{2\pi} f(\omega) g(\omega).$$

Si maintenant on applique la transformée de Fourier inverse aux deux côtés de l'équation précédente on obtient :

$$\boxed{(f(\omega)g(\omega))^\vee = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\check{f} * \check{g})(t)}, \quad (5.1)$$

comme on le verra, cette formule est très importante dans la technique de résolution des équations différentielles via transformée de Fourier ;

- $\hat{\cdot}$  transforme la  $n$ -ième dérivation en le produit par une puissance de  $i\omega$ , on verra que cette propriété est très importante pour transformer les équations différentielles en équations algébriques ;
- $\hat{\cdot}$  transforme une Gaussienne d'écart-type 1 en une Gaussienne d'écart-type 1. Si la Gaussienne n'a pas écart-type 1, alors  $\hat{\cdot}$  opère une inversion de l'écart-type : une Gaussienne avec un écart-type petit, i.e. avec valeurs bien localisées autour de sa valeur moyenne est transformée par  $\hat{\cdot}$  en une Gaussienne avec un écart-type grand, i.e. avec valeurs bien étalées par rapport à la moyenne, et vice-versa.

On veut démontrer au moins la propriété :  $\widehat{f}'(\omega) = i\omega\widehat{f}(\omega)$ .

*Preuve.* On commence par observer que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , alors sûrement  $f(t) \xrightarrow{|t| \rightarrow +\infty} 0$  car sinon elle ne serait pas intégrable à l'infini ! On écrit la transformée de Fourier de  $f'$  :

$$\begin{aligned}\widehat{f}'(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-i\omega t} dt = (\text{par parties}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [f(t)e^{-i\omega t}]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(-i\omega)e^{-i\omega t} dt \\ &= 0 - (-i\omega) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= i\omega\widehat{f}(\omega).\end{aligned}$$

□

Le fait que la Gaussienne d'écart-type 1 soit invariante par rapport à la transformée de Fourier n'est pas un résultat intuitif, donc c'est utile de le démontrer. On aura besoin de deux lemmes.

**Lemme 5.3.1** *Ça vaut :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}.$$

*Preuve.* On écrit  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ , alors :

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \stackrel{(\text{th. Fubini})}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(t^2+y^2)} dt dy.$$

Si on passe en coordonnées polaires  $(\rho, \vartheta)$ ,  $\rho \in [0, +\infty)$ ,  $\vartheta \in [0, 2\pi)$  et on rappelle que le Jacobien en coordonnées polaires est  $\rho$ , on obtient :

$$\begin{aligned}I^2 &= \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho d\rho d\vartheta = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho d\rho \\ &= 2\pi \left[ -e^{-\frac{\rho^2}{2}} \right]_0^{+\infty} = 2\pi [-e^{-\infty} + e^0] = 2\pi.\end{aligned}$$

Donc  $I = \sqrt{2\pi}$ .

□

**Lemme 5.3.2** *Ça vaut :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t+i\omega)^2}{2}} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

La preuve utilise un théorème d'analyse complexe dû à Cauchy (Paris, 1789 – Sceaux, 1857).

Maintenant on peut démontrer que :

$$\widehat{e^{-\frac{t^2}{2}}}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}.$$

*Preuve.*

$$\begin{aligned} \widehat{e^{-\frac{t^2}{2}}}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{e^{-\frac{\omega^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-i\omega t} e^{\frac{\omega^2}{2}} dt \\ &\quad \cdot e^{-\frac{\omega^2}{2}} \cdot e^{\frac{\omega^2}{2}} \\ &= \frac{e^{-\frac{\omega^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2+2i\omega t-\omega^2}{2}} dt \\ &= \frac{e^{-\frac{\omega^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t+i\omega)^2}{2}} dt \\ &\stackrel{\text{Lemme 5.3.2}}{=} \frac{e^{-\frac{\omega^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &\stackrel{\text{Lemme 5.3.1}}{=} \frac{e^{-\frac{\omega^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = e^{-\frac{\omega^2}{2}}. \end{aligned}$$

□

On peut démontrer aussi d'une manière très simple une propriété qu'on a déjà vu pour la DFT, i.e. que

$$\boxed{\hat{\hat{f}}(t) = f(-t)}$$

c'est-à-dire, la puissance seconde de la transformée de Fourier est l'opérateur de parité, qui change le signe à la variable de la fonction à laquelle est appliqué. On va prouver ce résultat en utilisant la définition de  $\hat{\hat{f}}$  :

$$\hat{\hat{f}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega(-t)} d\omega = \check{\hat{f}}(-t) = f(-t).$$

Un corollaire immédiat de cette propriété est que *la puissance quatrième de la transformée de Fourier est l'opérateur identité.*

### 5.3.1 La localisation des signaux et son effet sur le spectre

Imaginons d'être intéressés au spectre d'un signal  $f(t)$  seulement dans le voisinage d'une valeur de  $t_0$ . Avec une translation on peut toujours supposer que  $t_0$  soit  $t = 0$ . L'idée la plus simple pour localiser l'analyse du spectre de  $f(t)$  consiste en le « tronquer », i.e. le multiplier par la fonction créneau de taille  $2T$

$$\chi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq T \\ 0 & \text{autrement,} \end{cases}$$

où  $2T$  est la taille du voisinage d'intérêt. Comme on le sait, la transformée de Fourier du signal tronqué  $\tilde{f}(t) = f(t)\chi(t)$  est  $\hat{\tilde{f}}(\omega) = \hat{f}(\omega) * \hat{\chi}(\omega)$ . Dans les TD on verra que :

$$\hat{\chi}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} T \frac{\sin(\omega T)}{\omega T},$$

donc, le spectre du signal tronqué est la convolution entre le spectre du signal initial et le sinus cardinal de  $\omega T$ , où le sinus cardinal est défini comme la fonction suivante :  $\mathbb{R} \ni t \mapsto \text{sinc}(t) = \frac{\sin t}{t}$ .

Cela montre que la localisation de l'analyse en fréquence d'un signal n'est pas un sujet simple. Comme déjà dit, la théorie des ondelettes, développée surtout à la fin des années 1980, donne un outil très puissant pour résoudre ce problème.

## 5.4 Le théorème d'échantillonnage de Shannon, Nyquist et Whittaker

Dans la section 4.6 on a vu que une fonction  $f \in L^2(\mathbb{T})$  peut être approximée par une série avec des coefficients donnés par la DFT d'une suite d'échantillons de  $f$ .

La reconstruction d'une fonction à partir d'un ensemble discret d'échantillons est possible aussi quand une fonction  $f$  a un spectre borné, comme précisé dans la définition suivante.

**Déf. 5.4.1** On dit que la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est un **signal continue à bande limitée** s'il existe  $\Omega \in \mathbb{R}^+$  tel que :

$$\hat{f}(\omega) = 0 \quad \forall |\omega| > \Omega.$$

Le concept de signal à bande limitée est de grande importance dans les applications, en fait, même si  $f$  n'est pas à bande limitée, les senseurs humains le sont toujours !

Par exemple, le système visuel humain n'est pas capable de percevoir les fréquences d'une onde électromagnétique comme lumière quand la fréquence d'oscillation est inférieure à 400 THz et supérieure de 800 THz, T=« Tera=10<sup>12</sup> ». Le système auditif humain peut percevoir les sons comme ondes de variation de la pression de l'air, quand elles ont une fréquence entre 20Hz et 20KHz, K=« Kilo=10<sup>3</sup> ».

Les signaux visuels et auditifs passés au cerveau pour être interprétés sont, donc, deux exemples extrêmement importantes de signaux à bande limitée.

Le résultat suivant montre comment un signal *continue* à bande limitée peut être reconstruit à partir de la connaissance d'une suite d'*échantillons discrets*.

### **Théorème 5.4.1 (Théorème d'échantillonnage de Shannon-Nyquist-Whittaker <sup>2</sup>)**

Soient :

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  un signal à bande limitée :  $\exists \Omega \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\hat{f}(\omega) = 0 \quad \forall |\omega| > \Omega$ .
- $\hat{f} : \text{continue et } \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \text{ par morceaux.}$

Alors,  $f$  est complètement déterminée par ses échantillons dans les points  $t_n = \frac{\pi}{\Omega}n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , en fait ça vaut la formule suivante :

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{\pi}{\Omega}n\right) \frac{\sin(\Omega t - \pi n)}{\Omega t - \pi n}, \quad (5.2)$$

et la convergence de la série est uniforme.

Il y a plusieurs preuves du théorème d'échantillonnage, notamment une qui utilise la formule de sommation de Poisson (Pithiviers, 1781 – Paris, 1840), ici on propose une preuve alternative à la méthode de Poisson (Bogges-Narkovich : « A first course in wavelet with Fourier analysis », page 118, Prentice Hall).

*Preuve.* On va utiliser la série et la transformée de Fourier de  $\hat{f}$ . Pour cela, on doit interpréter  $\hat{f}$  comme une fonction  $2\Omega$ -périodique quand on écrit sa série de Fourier et comme une fonction à support limité en  $[-\Omega, \Omega]$  quand on calcule sa transformée de Fourier. Donc, on souligne que pour reconstruire  $f$  on utilise une extension en copies périodiques de son spectre.

Grâce aux hypothèses,  $\hat{f} \in L^2[-\Omega, \Omega]$  et donc on peut développer  $\hat{f}$  en série de Fourier :

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{i \frac{2\pi\omega k}{2\Omega}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{i \frac{\pi\omega k}{\Omega}}, \quad (5.3)$$

avec :

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(\omega) e^{-i \frac{\pi\omega k}{\Omega}} d\omega \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Omega} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i \left(\frac{-\pi}{\Omega} k\right) \omega} d\omega \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Omega} \tilde{f} \left( -\frac{\pi}{\Omega} k \right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Omega} f \left( -\frac{\pi}{\Omega} k \right), \end{aligned}$$

où dans la dernière étape on a utilisé la définition d'anti-transformée de Fourier de  $\hat{f}$ , i.e.  $f$ , calculée en  $-\frac{\pi}{\Omega} k$  et on a inclut en  $c_k$  le facteur de normalisation de la série.

Donc on peut réécrire la série de Fourier (5.3) comme ceci :

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Omega} f \left( -\frac{\pi}{\Omega} k \right) e^{i \frac{\pi\omega k}{\Omega}} \underset{(n=-k \Leftrightarrow k=-n)}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Omega} f \left( \frac{\pi}{\Omega} n \right) e^{-i \frac{\pi\omega n}{\Omega}},$$

et cette série converge uniformément car  $\hat{f}$  est continue et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux.

On calcule  $f(t)$  via transformée de Fourier inverse de  $\hat{f}(\omega)$  :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Omega}^{\Omega} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Omega} f \left( \frac{\pi}{\Omega} n \right) e^{-i \frac{\pi\omega n}{\Omega}} e^{i\omega t} d\omega \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\Omega} f \left( \frac{\pi}{\Omega} n \right) \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i\omega \frac{t\Omega - \pi n}{\Omega}} d\omega, \end{aligned} \quad (5.4)$$

où, dans la dernière étape, on a pu échanger la série et l'intégrale grâce au fait que la série converge uniformément. On s'intéresse maintenant à l'intégrale :

$$\int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i\omega \frac{t\Omega - \pi n}{\Omega}} d\omega = \int_{-\Omega}^{\Omega} \cos \left( \omega \frac{t\Omega - \pi n}{\Omega} \right) d\omega + i \int_{-\Omega}^{\Omega} \sin \left( \omega \frac{t\Omega - \pi n}{\Omega} \right) d\omega,$$

la deuxième intégrale est nulle car la fonction sinus est impaire et le domaine d'intégration est symétrique, par contre la fonction cosinus est paire et donc on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i\omega\left(\frac{t\Omega-\pi n}{\Omega}\right)} d\omega &= 2 \int_0^{\Omega} \cos\left(\frac{t\Omega-\pi n}{\Omega}\right) d\omega = 2 \left[ \frac{\sin\left(\omega\frac{t\Omega-\pi n}{\Omega}\right)}{\frac{t\Omega-\pi n}{\Omega}} \right]_0^{\Omega} \\ &= 2\Omega \frac{\sin\left(\Omega\frac{t\Omega-\pi n}{\Omega}\right)}{t\Omega-\pi n} - 0 = 2\Omega \frac{\sin(t\Omega-\pi n)}{t\Omega-\pi n}. \end{aligned}$$

En introduisant ce résultat dans l'expression de  $f(t)$  en (5.4), on obtient :

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{2\Omega}{2\Omega} f\left(\frac{\pi}{\Omega}n\right) \frac{\sin(t\Omega-\pi n)}{t\Omega-\pi n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{\pi}{\Omega}n\right) \frac{\sin(t\Omega-\pi n)}{t\Omega-\pi n},$$

et, comme déjà souligné, la convergence de la série est uniforme.  $\square$

#### 5.4.1 La fréquence de Nyquist : « aliasing » et « oversampling »

On utilisant la définition de sinus cardinal, on peut réécrire la formule du théorème comme ceci :

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{\pi}{\Omega}n\right) \text{sinc}(t\Omega - \pi n).$$

La fonction sinus cardinal est toujours la même pour chaque signal  $f$ , donc ce qui caractérise univoquement  $f$  est la suite d'échantillons  $f\left(\frac{\pi}{\Omega}n\right)$ .

On observe que la période d'échantillonnage des valeurs de  $f$  qui apparaît dans la formule du théorème est :  $T = \frac{\pi}{\Omega}$ , donc la fréquence d'échantillonnage de la formule du théorème, dite **fréquence de Nyquist** et écrite comme  $\nu_N$ , est  $\nu_N = \frac{1}{T} = \frac{\Omega}{\pi}$ .

On veut maintenant comparer la fréquence de Nyquist avec la fréquence maximale du signal  $f$  : on rappelle qu'on est parti de l'hypothèse que  $f$  soit un signal à bande limitée avec pulsation maximale  $\Omega$ , alors la fréquence maximale  $\nu_{\max}$  de  $f$  est définie par la relation  $\Omega = 2\pi\nu_{\max}$ , i.e.  $\nu_{\max} = \frac{\Omega}{2\pi}$ .

Si on compare la fréquence d'échantillonnage de Nyquist  $\nu_N$  avec la fréquence maximale  $\nu_{\max}$  du signal  $f$  on obtient :  $\nu_N = 2\nu_{\max}$ , i.e. **le théorème d'échantillonnage vaut si et seulement si la fréquence d'échantillonnage est (minimum) deux fois la fréquence maximale du signal  $f$ !**

Si on échantillonne avec une fréquence inférieure à la de Nyquist, alors on obtient un phénomène connu avec le nom de **aliasing**, qui correspond à des erreurs dans la reconstruction de la signal. Les erreurs sont dûs au fait que, comme on l'a vu dans la preuve, on doit considérer une extension périodique du spectre de  $f$ , la fréquence de Nyquist  $\nu_N$  est la fréquence (minimale) correcte pour pouvoir reconstruire  $f$  et pour éviter que de « déborder » dans un période adjacent du spectre! Une fréquence d'échantillonnage inférieure introduit des informations parasites qui viennent des périodes spectres adjacents à gauche et à droite.

Pour terminer, on observe que le terme général de la série du théorème converge vers 0 comme  $\frac{1}{n}$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , qui est une convergence plutôt lente. Pour augmenter la vitesse de convergence, par exemple à  $\frac{1}{n^2}$  on peut augmenter la fréquence d'échantillonnage avec une technique connue comme sur-échantillonnage (**oversampling**).

## 5.5 Application de la transformée de Fourier à la résolution d'équations différentielles en dérivées ordinaires et partielles

Le comportement de la transformée de Fourier en relation aux dérivées permet d'obtenir de techniques très efficaces pour résoudre certains types d'équations différentielles. Pour comprendre l'idée générale, on commence avec un exemple donné par une équation différentielle ordinaire (EDO).

### 5.5.1 Un exemple de EDO résolue avec la transformée de Fourier

Soient  $y, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y, g \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $y$  deux fois différentiable, on considère l'EDO suivante :

$$y''(t) - y(t) = -g(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Si on applique la transformée de Fourier aux deux côtés, grâce à sa linéarité on peut écrire :

$$\widehat{y}''(\omega) - \widehat{y}(\omega) = -\widehat{g}(\omega),$$

i.e.

$$-\omega^2 \widehat{y}(\omega) - \widehat{y}(\omega) = -\widehat{g}(\omega) \iff (1 + \omega^2) \widehat{y}(\omega) = \widehat{g}(\omega),$$

i.e.

$$\widehat{y}(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2} \cdot \widehat{g}(\omega) \quad (\text{Solution dans le domaine fréquentiel}).$$

Grâce aux propriétés de la transformée de Fourier, on a rendu l'EDO une équation algébrique dans le domaine fréquentiel ! Si on connaît la transformée de Fourier de  $g$ , alors on a résolu l'EDO dans l'espace de Fourier.

Néanmoins, l'EDO initiale a été formulé par rapport à la variable  $t$ , donc il faut revenir à la représentation originale en appliquant la transformée de Fourier inverse aux deux côtés de la dernière équation en utilisant la propriété (5.1) :

$$(\widehat{y}(\omega))^\vee(t) = y(t) = \left[ \frac{1}{1 + \omega^2} \cdot \widehat{g}(\omega) \right]^\vee(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \left( \frac{1}{1 + \omega^2} \right)^\vee(t) * g(t) \right). \quad (5.5)$$

Dans les TD on a vu que :

$$\widehat{e^{-a|t|}}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + \omega^2},$$

donc, si on considère  $a = 1$  :

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \widehat{e^{-|t|}}(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2},$$

et alors :

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|t|} * g(t),$$

i.e.

$$y(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-s|} g(s) ds = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-s) e^{-|s|} ds.$$

Si on sait calculer l'intégrale (ceci dépend de l'expression analytique de  $g$ ), alors on peut déterminer explicitement  $y(t)$ , sinon on peut en tout cas approximer sa valeur.

Les étapes de la résolution de une EDO via transformée de Fourier sont donc :

1. Transformer l'EDO dans l'espace fréquentiel en appliquant la transformée de Fourier aux deux côtés de l'équation ;
2. Résoudre l'EDO algébrique dans l'espace de Fourier ;
3. Appliquer la transformée de Fourier inverse pour obtenir la solution de l'EDO dans la représentation originale ;
4. Typiquement, la solution dans l'espace de Fourier est donné par un produit, alors la solution dans la représentation originale est écrite avec une convolution.

Pour pouvoir utiliser cette technique, les coefficients des dérivées doivent être constantes et les fonctions doivent être intégrables.

### 5.5.2 Transformée de Fourier et EDPs

La technique de la transformée de Fourier est encore plus efficace quand on l'applique aux EDPs : équations différentielles en dérivées partielles. Pour fixer les idées, on considère seulement des fonctions du type suivant :  $u = u(t, x)$  ou  $u = u(t, x, y, z)$ , où  $t$  est la coordonnée temporelle et  $x$  ou  $(x, y, z)$  sont coordonnées spatiales 1D et 3D, respectivement. On suppose toujours implicitement que  $u \in L^1(\mathbb{R}^2)$  ou  $u \in L^1(\mathbb{R}^4)$ , respectivement, et, bien sûr, que  $u$  soit dérivable un nombre suffisant de fois pour pouvoir écrire l'EDP correspondante.

Pour simplifier la notation, on écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u_t, \dots$$

Les propriétés de la transformée de Fourier par rapport aux dérivées partielles sont les suivantes :

- Si la variable d'intégration de la transformée de Fourier est  $x$ , alors

$$\widehat{u_x}(t, \omega) = i\omega \widehat{u}(t, \omega), \quad \widehat{u_{xx}}(t, \omega) = -\omega^2 \widehat{u}(t, \omega),$$

$$\widehat{u_t}(t, \omega) = \frac{\partial}{\partial t} \widehat{u}(t, \omega), \quad \widehat{u_{tt}}(t, \omega) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \widehat{u}(t, \omega),$$

les premières deux formules sont attendues, pour obtenir les autres deux il faut observer que, comme  $u \in L^1(\mathbb{R}^2)$ , alors on peut échanger l'ordre de dérivation et d'intégration :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} e^{-i\omega x} dx = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x) e^{-i\omega x} dx = \frac{\partial}{\partial t} \widehat{u}(t, \omega),$$

et pareil pour  $u_{tt}$ .

- Si la variable d'intégration de la transformée de Fourier est  $t$ , alors

$$\widehat{u_t}(x, \omega) = i\omega \widehat{u}(x, \omega), \quad \widehat{u_{tt}}(x, \omega) = -\omega^2 \widehat{u}(x, \omega),$$

$$\widehat{u_x}(x, \omega) = \frac{\partial}{\partial x} \widehat{u}(x, \omega), \quad \widehat{u_{xx}}(x, \omega) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \widehat{u}(x, \omega).$$

- Ces considération peuvent être étendues à  $u(t, x, y, z)$ .

### 5.5.3 Résolution de l'EDP de la propagation de la chaleur avec la transformée de Fourier

On considère le problème de Cauchy pour  $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2) \cap L^1(\mathbb{R}^2)$  et  $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  défini par :

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} & \forall x \in (-\infty, +\infty), \forall t \in (0, +\infty), \alpha \in \mathbb{R}^+ \\ u(0, x) = \varphi(x) & \forall x \in (-\infty, +\infty), t = 0 \end{cases}$$

- $u(t, x)$  : température d'une barre 1D à l'instant  $t$  et dans le point  $x$  ;
- $u_t(t, x)$  : vitesse de changement de la température à l'instant  $t$  et dans le point  $x$  ;
- $u_{xx}(t, x)$  : concavité du profile de la température à l'instant  $t$  et dans le point  $x$  (la dérivée seconde est par rapport à la variable spatiale, donc ça serait incorrect d'interpréter  $u_{xx}$  comme une accélération) ;
- $\varphi(x)$  : concavité initiale du profile de la température dans le point  $x$ .

Si on écrit la dérivée seconde discrète (avec un pas  $\Delta x$ ) par rapport à  $x$ , on peut comprendre qu'elle définit la comparaison entre la température en  $x$  à l'instant  $t$  et celle de ces voisins au même instant, en fait :

$$\begin{aligned} u_{xx}(t, x) &\simeq \frac{u(t, x + \Delta x) - 2u(t, x) + u(t, x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \\ &= \frac{2}{(\Delta x)^2} \left[ \underbrace{\frac{u(t, x + \Delta x) + u(t, x - \Delta x)}{2}}_{\text{température moyenne voisins}} - u(t, x) \right] \end{aligned}$$

Donc, l'équation  $u_t = \alpha^2 u_{xx}$  dit que :

- si  $u(t, x)$  est inférieure à la température moyenne des voisins, alors  $u_{xx} > 0$  et donc  $u_t(t, x) (= \alpha^2 u_{xx}) > 0$  et cela signifie que la température en  $x$  augmente dans le temps : les voisins cèdent un peu de leur chaleur à  $x$  pour arriver à l'équilibre thermique ;
- dans le cas contraire,  $u_t(t, x) (= \alpha^2 u_{xx}) < 0$  et la température en  $x$  baisse dans le temps :  $x$  cède un peu de sa chaleur aux voisins pour arriver à l'équilibre thermique.
- La constante positive  $\alpha^2$  est une caractéristique du matériel dite « coefficient de diffusion thermique », plus  $\alpha^2$  est grand, plus rapidement la barre arrive à l'équilibre thermique.

L'équation de la chaleur est utilisée dans beaucoup d'autres domaines, par exemple en traitement d'images pour lisser les imperfections et en mathématiques financières dans le modèle de Black-Scholes-Merton.

Pour résoudre l'équation de la chaleur, on calcule la transformée de Fourier (en intégrant par rapport à la variable  $x$ ) des deux côtés :

$$u_t(t, x) = \alpha^2 u_{xx}(t, x) \quad \xrightarrow{\hat{\phantom{x}}} \quad \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(t, \omega) = -\alpha^2 \omega^2 \hat{u}(t, \omega).$$

La condition initiale dans l'espace de Fourier devient :  $\hat{u}(0, \omega) = \hat{\varphi}(\omega)$ . On a donc transformé la EDP dans une EDO :

$$\begin{cases} u_t(t, x) = \alpha u_{xx}(t, x) \\ u(0, x) = \varphi(x) \end{cases} \quad \xrightarrow{\hat{\phantom{x}}} \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(t, \omega) = -\alpha^2 \omega^2 \hat{u}(t, \omega) \\ \hat{u}(0, \omega) = \hat{\varphi}(\omega), \end{cases}$$

en fait  $\omega$  est une constante par rapport à la variable  $t$ , donc l'équation  $\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(t, \omega) = -\alpha^2 \omega^2 \hat{u}(t, \omega)$  est ordinaire !

On rappelle que la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = -ky \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

est :  $y(t) = y_0 e^{-kt}$  et donc, dans notre cas :

$$\hat{u}(t, \omega) = \hat{\varphi}(\omega) \cdot e^{-\alpha^2 \omega^2 t} = \hat{\varphi}(\omega) \cdot e^{-(\alpha^2 t) \omega^2} \quad (\text{Solution dans l'espace de Fourier}).$$

On doit maintenant appliquer la transformée de Fourier inverse pour revenir à la solution dans la représentation originale. Grâce à l'éq. (5.1) on obtient :

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \left( \hat{\varphi}(\omega) \cdot e^{-(\alpha^2 t) \omega^2} \right)^\vee (t, x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \check{\varphi}(x) * \left( e^{-(\alpha^2 t) \omega^2} \right)^\vee (t, x), \end{aligned}$$

mais  $\check{\varphi}(x) = \varphi(x)$  et  $e^{-(\alpha^2 t) \omega^2}$  est une Gaussienne par rapport à  $\omega$ , donc on peut utiliser la propriété :

$$\widehat{e^{-c^2 x^2}}(\omega) = \frac{1}{c\sqrt{2}} e^{-\frac{\omega^2}{4c^2}} \iff c\sqrt{2} \widehat{e^{-c^2 x^2}}(\omega) = e^{-\frac{1}{4c^2} \omega^2},$$

qui dans notre cas ça donne :  $\frac{1}{4c^2} = \alpha^2 t$ , or  $c^2 = \frac{1}{4\alpha^2 t}$  et alors  $c = \frac{1}{2\alpha\sqrt{t}}$  (physiquement, ça a du sens de considérer seulement la détermination positive de la racine, car la détermination négative change du signe à la température). On peut finalement écrire :

$$\left( e^{-(\alpha^2 t) \omega^2} \right)^\vee (t, x) = \frac{\sqrt{2}}{2\alpha\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2 t}} = \frac{1}{\alpha\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2 t}}$$

et alors la solution de l'EDP de propagation de la chaleur est :

$$u(t, x) = \frac{1}{\alpha\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\alpha^2 t}} \varphi(y) dy.$$

Pour certaines expressions de  $\varphi(x)$  on peut intégrer exactement et obtenir une expression analytique pour  $u(t, x)$ , plus en général, on peut seulement approximer  $u(t, x)$ .

C'est intéressant d'observer que, comme l'expression standard d'une Gaussienne est :

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

alors  $\sigma = \alpha\sqrt{2t}$ , i.e.  $\sigma^2 = 2\alpha^2 t$  : la variance de la Gaussienne qui apparait dans la solution de l'EDP de la propagation de la chaleur n'est pas fixe, mais augmente linéairement avec le temps  $t$ .

Cela veut dire que le support de la Gaussienne dévient de plus en plus large au fur et à mesure que le temps avance, ce que est parfaitement cohérente avec le fait que, quand  $t \rightarrow +\infty$ , la barre arrive à l'équilibre thermique, et donc la température est uniforme partout.

Ce qu'on vient de démontrer nous permet de comprendre encore plus en profondeur la technique classique de convolution avec une Gaussienne en traitement de signaux, qu'on a vu, par exemple, dans l'opération de floutage d'une image numérique.

En fait, si on identifie  $\varphi(y)$  avec l'intensité originale d'un pixel quelconque  $y$  dans une image numérique, et  $u(t, x)$  avec l'intensité de l'image flouté à l'instant  $t$  et dans un pixel fixé de position  $x$ , on peut interpréter la convolution d'une image avec une Gaussienne comme une étape du processus d'échange d'intensité entre  $x$  et ses voisins, où cet échange suit la même loi de la propagation de la chaleur.

De plus, comme la propagation de la chaleur est un *processus irréversible*, on ne peut pas penser de pouvoir inverser de manière simple l'effet de floutage obtenu par convolution avec une Gaussienne.

Une dernière observation relative à la dimension spatiale du problème : l'application de la technique qu'on vient de voir nécessite que  $x$  soit variable entre et  $-\infty$  et  $+\infty$ , pour résoudre des problèmes avec  $x$  variable dans un intervalle borné il faut utiliser des autres techniques : la transformée de Fourier sinus et cosinus et la transformée de Laplace.