

INTRODUCTION À LA THÉORIE DES ONDELETTES

Edoardo Provenzi

Table des matières

1	Ondelettes sur $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$	2
1.1	Le concept de localisation spatiale ou temporelle d'une base de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$	2
1.2	Résultats préliminaires	3
1.3	Exemples de bases d'ondelettes à l'échelle 1 sur $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$	8
1.3.1	Caractérisation explicite des bases d'ondelettes à l'échelle 1 sur $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$	13
1.3.2	L'ondelette mère associée à une ondelette père	13
1.4	Représentation rapide d'un signal dans la base d'ondelettes	15
1.5	Reconstruction parfaite dans une banque de filtres	16
1.5.1	Filtrage en ondelettes à l'échelle 1	18
1.6	Ondelettes sur $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$	19
1.7	Construction itérative des ondelettes sur \mathbb{Z}_N	21
1.8	Une construction alternative : analyse multi-résolution	25

Chapitre 1

Ondelettes sur $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$

Ces polycopiés sont une traduction libre du livre « *An introduction to wavelets through linear algebra* » de Michael Frazier.

1.1 Le concept de localisation spatiale ou temporelle d'une base de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$

On a examiné les deux avantages majeurs de la base de Fourier de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$:

1. la diagonalisation des opérateurs stationnaires sur $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$;
2. la possibilité de calculer rapidement les composantes des signaux dans la base de Fourier de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ avec la FFT.

Ici nous allons discuter le problème le plus significatif de la base de Fourier, qui est lié au concept de localisation.

Déf. 1.1.1 *Un signal $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ est parfaitement n -localisé autour de la valeur $n_0 \in \mathbb{Z}_N$ si seulement la composante $z(n_0)$ est non nulle :*

$$z(n_0) \neq 0, z(n) = 0 \quad \forall n \neq n_0.$$

Par l'inverse, un signal $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ est parfaitement n -délocalisé si toutes ses composante $z(n)$ ont le même module :

$$|z(n)| = k \quad \forall n.$$

Les mêmes définitions sont utilisées pour la m -localisation ou délocalisation, simplement remplaçant n par m .

Il est clair qu'un signal parfaitement localisé en n_0 est un multiple de δ_{n_0} , l'impulsion unitaire en n_0 . Si n est interprétée comme une coordonnée spatiale ou temporelle, nous parlerons de **localisation spatiale** ou **temporelle**, respectivement. Par contre, comme la coordonnée m est interprétée comme une fréquence, la m -localisation est dite **localisation fréquentielle**.

Nous considérerons un signal $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ *partiellement n -localisé* (resp. *m -localisé*) autour de la valeur $n_0 \in \mathbb{Z}_N$ (resp. $m_0 \in \mathbb{Z}_N$) si les composantes de z sont nulles ou « petites » relativement à celles « proches » de n_0 (resp. m_0). Évidemment, on ne peut pas donner à cette déclaration le dogme d'une définition mathématique, car les concepts de petit e proche ne sont pas déterminés d'une manière rigoureuse.

Selon les applications, une localisation partielle peut être considérée comme une bonne ou une mauvaise localisation. Ceci montre que le concept de localisation est relatif aux deux extrêmes : la localisation parfaite d'un signal deltiforme et la délocalisation parfaite.

Pour simplifier le langage, on parlera tout simplement de localisation dans la suite, sans spécifier « partielle ».

Nous avons déjà examiné la localisation de la plus importante couple de bases de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$: la base canonique de B de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$, qui est donnée par les impulsions unitaires en $n = 0, 1, \dots, N - 1$, et la base orthogonale de Fourier F , $F_m(n) = \frac{1}{N} e^{2\pi i \frac{mn}{N}}$. Nous savons que la base canonique de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ est parfaitement n -localisé et que celle de Fourier est parfaitement n -délocalisée vu que $|F_m(n)| = \frac{1}{N} \forall n, m$, et que, vice-versa, la base canonique de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ est parfaitement m -délocalisé (vu que $|\hat{\delta}_n(m)| = 1 \forall n, m$) et que celle de Fourier est parfaitement m -localisée.

Pour comprendre pourquoi avoir une base localisée est utile, analysons la situation suivante : si la base $(v_0, v_1, \dots, v_{N-1})$ de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ est n -localisée alors, à chaque fois qu'on développe un vecteur $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ sur cette base en écrivant $z = \sum_{j=0}^{N-1} a_j v_j$, et que on s'intéresse à z à côté d'une valeur n_0 , i.e. $z(n_0) = \sum_{j=0}^{N-1} a_j v_j(n_0)$, on peut utiliser seulement les vecteurs v_j qui sont significativement différents de zéro en n_0 , en évitant de considérer ceux qui sont nuls ou très petits en n_0 : la somme qui peut approcher z sera donc composée pas un nombre de termes bien inférieur à N . Lorsque N est grand, l'avantage d'une représentation localisée est évident.

Si, maintenant, nous imaginons d'avoir **une base n -localisée et orthogonale**, alors les vecteurs v_j interviennent explicitement dans l'expression des composantes a_j , i.e.

$$a_j = \frac{\langle z, v_j \rangle}{\|v_j\|^2} = \frac{1}{\|v_j\|^2} \sum_{k=0}^{N-1} z(k) \overline{v_j(k)},$$

il est donc clair qu'une base orthogonale (ou orthonormée) localisée permet de retrouver de l'information saillante d'un signal à *partir des composantes* du signal même sur la base.

Des exemples d'information saillante sont, par exemple, la position d'une fracture pour une image médicale, ou un lieu d'accumulation d'un minéral pour une image géophysique, ou encore l'instant temporelle où l'image d'une vidéo a changé (ce qui est extrêmement utile dans la surveillance vidéo).

Ces observations montrent pourquoi beaucoup de chercheurs en mathématique, physique et ingénierie ont cherché un « juste milieu » entre la base canonique B , parfaitement n -localisée, mais m -délocalisée et la base de Fourier F , parfaitement m -localisé et qui permet de diagonaliser les opérateurs stationnaires, mais qui est n -délocalisée.

De plus, on voudrait avoir la possibilité de *calculer les composantes* d'un vecteur par rapport à cette base *rapidement*.

Nous verrons que ces deux dernières requêtes sont corrélées et que la base qu'on cherche sera une base d'ondes qui ont un support borné : elles oscillent autour d'une position spatiale et après elles s'amortissent à zéro, c'est pour cette raison qu'elles sont appelées « ondelettes », wavelets en Anglais.

1.2 Résultats préliminaires

La construction des ondelettes sur $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ commence avec une réflexion sur l'opération de convolution :

1. La convolution entre un signal z est une Gaussienne permet d'obtenir une *moyenne locale* de z , autour du centre de la Gaussienne ;
2. La convolution est équivalent, via DFT, à une multiplication spectrale, qui est une *opération diagonale*, et donc très *rapide*, dans la représentation de Fourier : $\widehat{z * w} = \hat{z} \hat{w} \implies z * w = (\hat{z} \hat{w})^\vee$.

Donc, il semble que la convolution soit un bon candidat pour nous permettre de générer la base que l'on souhaite, allons voir comment.

D'abord il faut introduire la notation suivante.

Déf. 1.2.1 (Réflexion conjuguée) $\forall w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ on écrit avec $\tilde{w} \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ la réflexion conjuguée de w , i.e.

$$\boxed{\tilde{w}(n) = \overline{w(-n)} = \overline{w(N-n)}} \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Bien évidemment, $\tilde{\tilde{w}} = w$.

Allons calculer la DFT de la réflexion conjuguée de w .

Lemme 1.2.1 Pour tout $m \in \mathbb{Z}$ ça vaut que :

$$\boxed{\hat{\tilde{w}}(m) = \overline{\hat{w}(m)}}, \quad (1.1)$$

i.e., la DFT de la réflexion conjuguée est le conjugué de la DFT.

Preuve.

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{w}}(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{w}(n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} \overline{w(-n)} e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} \overline{w(-n)} e^{2\pi i \frac{m(-n)}{N}} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \overline{w(-n) e^{-2\pi i \frac{m(-n)}{N}}} = \sum_{n=0}^{N-1} \overline{w(-n) e^{-2\pi i \frac{m(-n)}{N}}} = \sum_{k=-n}^{1-N} \overline{w(k) e^{-2\pi i \frac{mk}{N}}} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \overline{w(k) e^{-2\pi i \frac{mk}{N}}} \quad (\text{lemme de périodicité}). \end{aligned}$$

□

Si on veut utiliser la convolution pour définir une base orthonormale, on doit pouvoir la mettre en relation avec un produit scalaire, c'est là où le concept de réflexion conjuguée entre en jeu, comme le montre le résultat suivant.

Lemme 1.2.2 Soient $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, $k \in \mathbb{Z}$, alors

$$\boxed{(z * \tilde{w})(k) = \langle z, R_k w \rangle}, \quad (1.2)$$

Donc, faire la convolution avec \tilde{w} revient à faire le produit scalaire avec la translation de w . La preuve est laissé comme exercice.

On peut comprendre rapidement l'utilité de la proposition précédente : imaginons que le vecteur $w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ soit tel que ses translations $B_w = (R_k w)_{k=0}^{N-1}$ forment une base orthonormale de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$, alors les composantes d'un élément quelconque $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ sur cette base sont calculées via $\langle z, R_k w \rangle$ i.e. via $z * \tilde{w}$, mais, en appliquant IDFT \circ DFT, $\widehat{(z * \tilde{w})} = (\hat{z} \cdot \hat{\tilde{w}}) = (\hat{z} \cdot \overline{\hat{w}})$. Donc, si une base orthonormale B est obtenue via les translations d'un seul vecteur w , la représentation de z dans B peut être calculée avec des opérations rapides comme la multiplication ponctuelle, la conjugaison complexe et la FFT :

$$[z]_{B_w} = (\hat{z} \cdot \overline{\hat{w}})^{\sim}.$$

L'exemple le plus simple d'une telle base est la base canonique de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$, qui est engendrée par la translation de n'importe quel vecteur de la base, par exemple e_0 , vu que $e_k = R_k e_0 \forall k$.

Remarquablement, il existe une condition qui permet de caractériser, via la DFT, tout base orthonormale obtenue par translation d'un vecteur !

Théorème 1.2.1 Soit $w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ fixé. Alors, $(R_k w)_{k=0}^{N-1}$ est une base orthonormale de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ si et seulement si :

$$|\hat{w}(m)| = 1 \quad \forall m \in \mathbb{Z}_N.$$

Pour prouver ce théorème on utilisera le lemme suivant.

Lemme 1.2.3 $(R_k w)_{k=0}^{N-1}$ est une base orthonormale de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ si et seulement si

$$\langle w, R_k w \rangle = \delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k = 1, 2, \dots, N-1. \end{cases}$$

La preuve de ce lemme est laissé comme exercice, allons prouver le théorème ci-dessus en utilisant l'énoncé du lemme.

Preuve. On peut réécrire la condition du lemme via réflexion conjuguée $\langle w, R_k w \rangle = (w * \tilde{w})(k)$, donc le lemme nous assure que $(R_k w)_{k=0}^{N-1}$ est une base orthonormale si et seulement si $(w * \tilde{w})(k) = \delta(k)$.

Nous allons obtenir la thèse du théorème en interprétant cette condition dans le domaine de Fourier. En fait, on sait que $\hat{\delta}(m) = 1 \quad \forall m \in \mathbb{Z}_N$, donc $(R_k w)_{k=0}^{N-1}$ est une base orthonormale de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ si et seulement si

$$1 = \hat{\delta}(m) = \widehat{w * \tilde{w}}(m) = \hat{w}(m) \cdot \hat{\tilde{w}}(m) = \hat{w}(m) \cdot \overline{\hat{w}(m)} = |\hat{w}(m)|^2, \quad \forall m \in \mathbb{Z}_N.$$

Donc $(R_k w)_{k=0}^{N-1}$ est une base orthonormale de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ si et seulement si $|\hat{w}(m)| = 1 \quad \forall m \in \mathbb{Z}_N$. \square

Le théorème qu'on vient de démontrer constitue un *obstacle insurmontable* à la possibilité d'engendrer une base *orthonormale et localisée* du type $(R_k w)_{k=0}^{N-1}$, car dans ce cas $|\hat{w}(m)| = 1$ et donc, comme $|\widehat{R_k w}(m)| = |\hat{w}(m)| \quad \forall m \in \mathbb{Z}_N$, les éléments de la base seront complètement délocalisés dans les fréquences !

Néanmoins, on ne doit pas penser que l'idée soit totalement incorrecte : en fait, il suffit de modifier légèrement la construction pour obtenir ce que l'on veut : *au lieu de considérer seulement un vecteur dont les translations génèrent la base, il faut en considérer...deux !*

Avant de discuter ceci, on introduit une terminologie standard.

Déf. 1.2.2 (Base d'ondelettes à l'échelle 1) Soient N pair, $N = 2M \iff M = \frac{N}{2}$, $M \in \mathbb{N}$, $u, v \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ fixés. Une base orthonormale de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ de la forme

$$(R_{2k} u)_{k=0}^{M-1} \cup (R_{2k} v)_{k=0}^{M-1}$$

est dite une « base d'ondelettes à l'échelle 1 » pour $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$.

u, v sont les générateur de la base, en particulier,

$$\begin{cases} u : \text{ondelette père (father wavelet)} \\ v : \text{ondelette mère (mother wavelet)}. \end{cases}$$

L'exemple le plus trivial (et le premier historiquement) de base d'ondelettes à l'échelle 1 est celui des **ondelettes de Haar**, qui ont comme générateurs les signaux :

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1, 0, 0, \dots, 0), \quad v = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1, 0, 0, \dots, 0).$$

Nous allons chercher maintenant des conditions pour caractériser le couple d'ondelettes père et mère qui génère une base d'ondelettes à l'échelle 1. On verra que les conditions seront encore sur les transformées de Fourier de u et v .

Avant d'énoncer et prouver le théorème nous avons besoin de deux lemmes et d'introduire une notation et une matrice spéciale.

Commençons par la notation :

$$\boxed{z^-(n) = (-1)^n z(n)},$$

On a déjà vu quand on a examiné la centralisation du spectre d'un signal en $m = 0$ qu'il est vrai que

$$\widehat{z^-}(m) = \widehat{z}(m + M), \quad \forall m \in \mathbb{Z}_N, \quad (1.3)$$

nous remarquons aussi que

$$(z + z^-)(n) = z(n)(1 + (-1)^n) = \begin{cases} 2z(n) & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases} \quad (1.4)$$

Donc z^- sommé avec z permet de se restreindre aux valeurs paires de n (multipliés par 2).

Venons maintenant aux lemmes, dont la preuve est laissée comme exercice.

Lemme 1.2.4 Soient $M \in \mathbb{N}$, $N = 2M$ et $w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$. $(R_{2k} w)_{k=0}^{M-1}$ est une famille orthonormale de M éléments si et seulement si :

$$\boxed{|\widehat{w}(m)|^2 + |\widehat{w}(m + M)|^2 = 2}, \quad \forall m = 0, \dots, M-1,$$

i.e. si la moyenne entre $|\widehat{w}(m)|^2$ et $|\widehat{w}(m + N/2)|^2$ est unitaire.

Lemme 1.2.5 Soient $M \in \mathbb{N}$, $N = 2M$ et $u, v \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, alors :

$$\langle R_{2k} u, R_{2j} v \rangle = 0 \quad \forall j, k \in \mathbb{Z}_M \iff \langle u, R_{2k} v \rangle = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_M.$$

Introduisons, pour terminer, la matrice suivante.

Déf. 1.2.3 (Matrice de système) $M \in \mathbb{N}$, $N = 2M$ et $u, v \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, $\forall m \in \mathbb{Z}$, on définit la matrice de système de u et v comme ça :

$$A(m) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \widehat{u}(m) & \widehat{v}(m) \\ \widehat{u}(m + M) & \widehat{v}(m + M) \end{pmatrix}.$$

On peut définir $A(m) \forall m \in \mathbb{Z}$ grâce à la périodicité de \widehat{u} et \widehat{v} .

Nous avons maintenant toutes les informations pour donner la *caractérisation des bases orthonormales engendrées par les translations avec entiers pairs de deux vecteurs*, ce qui donnera la possibilité de construire des bases d'ondelettes à l'échelle 1.

Nous rappelons que une matrice unitaire U est une matrice carrée $n \times n$ avec des coefficients complexes qui vérifie soit la condition $U^{-1} = \overline{U}^t$, soit le fait que ses colonnes (et ses lignes) forment une base orthonormale pour \mathbb{C}^n par rapport au produit scalaire Euclidien complexe, i.e., ses colonnes (et ses lignes) sont des vecteurs unitaires et orthogonaux entre eux.

Théorème 1.2.2 Soient $M \in \mathbb{N}$, $N = 2M$ et $u, v \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, alors :

$$B = (R_{2k} u)_{k=0}^{M-1} \cup (R_{2k} v)_{k=0}^{M-1} \equiv (u, R_2 u, R_4 u, \dots, R_{N-2} u, v, R_2 v, R_4 v, \dots, R_{N-2} v)$$

est une base orthonormale de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ \iff la matrice de système $A(m)$ de u et v est unitaire $\forall m \in \mathbb{Z}_M$.

Vu le coefficient de normalisation $1/\sqrt{2}$ devant de la matrice $A(m)$, ses colonnes sont des vecteurs unitaires si leur norme au carré vaut 2 (conditions (1) et (2) ci-dessous). L'orthogonalité entre colonnes est traduite par le fait que leur produit scalaire est nul (condition (3) ci-dessous). En résumé, $A(m)$ est unitaire si et seulement si les conditions suivantes sont simultanément vérifiées :

$$\begin{cases} |\hat{u}(m)|^2 + |\hat{u}(m+M)|^2 = 2 & (1) \\ |\hat{v}(m)|^2 + |\hat{v}(m+M)|^2 = 2 & (2) \\ \hat{u}(m)\overline{\hat{v}(m)} + \hat{u}(m+M)\overline{\hat{v}(m+M)} = 0 & (3) \end{cases}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}_M. \quad (1.5)$$

Preuve. On applique le Lemme 1.2.4 pour assurer que

$$(R_{2k} u)_{k=0}^{M-1} \text{ est orthonormale } \iff |\hat{u}(m)|^2 + |\hat{u}(m+M)|^2 = 2 \quad \forall m \in \mathbb{Z}_M$$

et que

$$(R_{2j} v)_{j=0}^{M-1} \text{ est orthonormale } \iff |\hat{v}(m)|^2 + |\hat{v}(m+M)|^2 = 2 \quad \forall m \in \mathbb{Z}_M$$

mais cela correspond à dire que la première et la deuxième colonne de $A(m)$ sont deux vecteurs unitaires de \mathbb{C}^2 , $\forall m \in \mathbb{Z}_M$, i.e. aux conditions (1) et (2) de (1.5).

On a donc deux ensembles orthonormales, $(R_{2k} u)_{k=0}^{M-1}$ et $(R_{2k} v)_{j=0}^{M-1}$, de $M = N/2$ éléments chacun, pour vérifier que leur union soit une base orthonormale de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ il faut tout simplement démontrer que ces deux systèmes de vecteurs sont orthogonaux entre eux. On va prouver que ceci est équivalent à l'orthogonalité entre les deux colonnes de $A(m)$ $\forall m \in \mathbb{Z}_M$, i.e. la condition (3) de (1.5).

$(R_{2k} u)_{k=0}^{M-1}$ et $(R_{2j} v)_{j=0}^{M-1}$ sont orthogonales si

$$\langle R_{2k} u, R_{2j} v \rangle = 0, \quad \forall j, k \in \mathbb{Z}_M.$$

Si on utilise le résultat du Lemme 1.2.5, au lieu d'examiner $\langle R_{2k} u, R_{2j} v \rangle$ on peut se concentrer sur $\langle u, R_{2k} v \rangle$, qu'on peut réécrire comme $(u * \tilde{v})(2k)$ grâce au théorème 1.2.2. Par conséquent, l'orthogonalité entre $(R_{2k} u)_{k=0}^{M-1}$ et $(R_{2k} v)_{j=0}^{M-1}$ est équivalente à la condition :

$$(u * \tilde{v})(2k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_M,$$

i.e., au fait que les composantes paires de $u * \tilde{v}$ soient nulles. Comme on l'a vu avant de l'énoncé du théorème, nous pouvons nous restreindre aux composantes paires de $u * \tilde{v}$ en considérant la formule :

$$((u * \tilde{v}) + (u * \tilde{v})^-)(n) = \begin{cases} 2(u * \tilde{v})(n) & n \text{ pair} \\ 0 & n \text{ impair} \end{cases}$$

donc $(u * \tilde{v})(2k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_M \iff (u * \tilde{v}) + (u * \tilde{v})^- = 0 \xLeftrightarrow_{\text{DFT}} (u * \tilde{v})^\wedge + ((u * \tilde{v})^-)^\wedge = 0.$

Mais

$$(u * \tilde{v})^\wedge(m) = \hat{u}(m)\hat{v}(m) \stackrel{(1.2.1)}{=} \hat{u}(m)\overline{\hat{v}(m)}$$

et

$$((u * \tilde{v})^-)^\wedge(m) \stackrel{(1.3)}{=} (u * \tilde{v})^\wedge(m+M) = \hat{u}(m+M)\hat{v}(m+M) \stackrel{(1.2.1)}{=} \hat{u}(m+M)\overline{\hat{v}(m+M)},$$

donc l'orthogonalité des colonnes de $A(m)$ est équivalente à :

$$\hat{u}(m)\overline{\hat{v}(m)} + \hat{u}(m+M)\overline{\hat{v}(m+M)} = 0, \quad \forall m \in \mathbb{Z}_M,$$

i.e. la propriété (3) de l'énoncé. Ceci termine la preuve. \square

En général, avec l'exception de la base de Haar, il n'est pas évident de construire directement u et v , cependant, on peut utiliser la caractérisation donnée par le théorème, qui passe par la DFT de u et v , et revenir après aux valeurs initiales avec l'IDFT, tout en sachant que seulement dans de cas très particulier on trouvera une formule analytique pour u et v .

Avant de donner des exemples, allons examiner un corollaire important du théorème qu'on vient de démontrer.

Corollaire 1.2.1 *Les composantes fréquentielles d'une ondelette mère et d'une ondelette père ne peuvent pas s'annuler simultanément dans une valeur fixée quelconque de $m \in \mathbb{Z}_M$, i.e. si $\hat{u}(m) = 0$ alors $\hat{v}(m) \neq 0$ et vice-versa.*

Preuve. La preuve la plus simple passe par l'observation que, s'il existe $m \in \mathbb{Z}_M$ tel que $\hat{u}(m) = \hat{v}(m) = 0$, alors la première ligne de la matrice de système $A(m)$ serait nulle, et donc $A(m)$ ne serait pas unitaire (car pas inversible, ou car une ligne a norme 0).

Nous allons proposer un preuve alternative, moins directe, mais qui montre une première utilisation des propriétés (1-2-3) de (1.5). Imaginons d'avoir une base d'ondelette à l'échelle 1 de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ avec générateurs u et v , alors la (1) de (1.5) impose que la moyenne entre $|\hat{u}(m)|^2$ et $|\hat{u}(m+M)|^2$ soit 1 $\forall m$. Supposons, par exemple, $|\hat{u}(m)|^2 = 2$ et $|\hat{u}(m+M)|^2 = 0$ pour quelque valeurs de m , alors la (3) de (1.5) implique

$$\hat{u}(m)\overline{\hat{v}(m)} + \underbrace{\hat{u}(m+M)}_{=0}\overline{\hat{v}(m+M)} = 0 \iff \underbrace{\hat{u}(m)}_{\neq 0}\overline{\hat{v}(m)} = 0 \iff \hat{v}(m) = 0,$$

ce qui implique, par (2) de (1.5), que $|\hat{v}(m+M)|^2 = 2$. En résumé :

$$\begin{cases} |\hat{u}(m)|^2 = 2, & |\hat{u}(m+M)|^2 = 0 \\ |\hat{v}(m)|^2 = 0, & |\hat{v}(m+M)|^2 = 2, \end{cases}$$

ceci montre que les composantes fréquentielles de v et de u relatives à la fréquence arbitraire m ne peuvent pas s'annuler simultanément dans une valeur fixée de m . \square

Le corollaire montre une bonne raison pour appeler u et v ondelette père et mère : quand l'un est absente, l'autre est présente, et vice-versa. Comme en biologie, la présence de « deux parents » génère un système remarquablement plus riche par rapport à celui qu'on peut obtenir avec la présence d'un seul parent (comme dans le cas des organismes qui se reproduisent par division cellulaire).

1.3 Exemples de bases d'ondelettes à l'échelle 1 sur $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$

Allons examiner des exemples de bases d'ondelettes à l'échelle 1.

- *Exemple 1 : une bases d'ondelettes à l'échelle 1 explicite.*

Pour montrer des calculs explicites, nous allons considérer comme d'habitude le cas $N = 4, M = 2$.

Soient $\hat{u} = (\sqrt{2}, 1, 0, 1), \hat{v} = (0, 1, \sqrt{2}, -1)$ $\hat{u}, \hat{v} \in \ell^2(\mathbb{Z}_4)$, alors

$$\begin{aligned} A(0) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \hat{u}(0) & \hat{v}(0) \\ \hat{u}(0+2) & \hat{v}(0+2) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = I \\ A(1) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \hat{u}(1) & \hat{v}(1) \\ \hat{u}(1+2) & \hat{v}(1+2) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

qui sont évidemment des matrices unitaires, donc $B = (u, R_2u, v, R_2v)$ est une bases d'ondelettes à l'échelle 1 de $\ell^2(\mathbb{Z}_4)$. Pour déterminer explicitement B allons appliquer la IDFT à \hat{u} et \hat{v} :

$$B \begin{cases} u = (\hat{u})^\vee = W_4^{-1} \hat{u} = \frac{1}{4}(2 + \sqrt{2}, \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}, \sqrt{2}) \\ R_2 u = \frac{1}{4}(-2 + \sqrt{2}, \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}, \sqrt{2}) \\ v = (\hat{v})^\vee = W_4^{-1} \hat{v} = \frac{1}{4}(\sqrt{2}, -\sqrt{2} + 2i, \sqrt{2}, -\sqrt{2} - 2i) \\ R_2 v = \frac{1}{4}(\sqrt{2}, -\sqrt{2} - 2i, \sqrt{2}, -\sqrt{2} + 2i). \end{cases}$$

L'orthonormalité de B peut être vérifiée avec des calculs directs.

• *Exemple 2 : la base de Shannon à l'échelle 1.*

Avant de présenter cet exemple, on rappelle qu'on interprète les fréquences $m \simeq \frac{N}{2}$ comme des hautes fréquences et celles $m \simeq 0$ et $m \simeq N - 1$ comme des basses fréquences.

Il est habituel, dans les bases d'ondelettes qui font une répartition des hautes et basses fréquences entre les générateurs, de considérer :

- u : vecteur associé aux *basses fréquences* (filtre *passé bas*)
- v : vecteur associé aux *hautes fréquences* (filtre *passé haut*).

On considère un entier N divisible par 4 et on définit :

$$\hat{u}(m) = \begin{cases} \sqrt{2} & m = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \text{ ou } m = \frac{3}{4}N, \frac{3}{4}N + 1, \dots, N - 1 \\ 0 & m = \frac{N}{4}, \frac{N}{4} + 1, \dots, \frac{3}{4}N - 2, \frac{3}{4}N - 1, \end{cases}$$

$$\hat{v}(m) = \begin{cases} 0 & m = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \text{ ou } m = \frac{3}{4}N, \frac{3}{4}N + 1, \dots, N - 1 \\ \sqrt{2} & m = \frac{N}{4}, \frac{N}{4} + 1, \dots, \frac{3}{4}N - 2, \frac{3}{4}N - 1. \end{cases}$$

Nous observons que $\forall m$ ça vaut que :

- soit $\hat{u}(m) = 0$ ou $\hat{v}(m) = 0$, donc la condition (3) de (1.5) est vérifiée ;
- soit $\hat{u}(m) = \sqrt{2}$ et $\hat{u}(m + \frac{N}{2}) = 0$ ou vice-versa, donc les conditions (1) et (2) de (1.5) sont vérifiées.

Par conséquent, $A(m)$ est unitaire et alors

$$(R_2 k v)_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \cup (R_2 k u)_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}$$

est une base d'ondelettes à l'échelle 1 pour $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ dite **base d'ondelettes de Shannon**.

On a défini u et v via leur DFT, mais, exceptionnellement, dans ce cas c'est possible d'explicitier sous forme analytique u et v . Avec un calcul quasiment direct, on arrive à écrire, $\forall n = 1, 2, \dots, N$:

$$\begin{cases} u(0) = v(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ u(n) = \frac{\sqrt{2}}{N} e^{-i\pi \frac{n}{N}} \frac{\sin(\frac{\pi n}{2})}{\sin(\frac{\pi n}{N})} \\ v(n) = \frac{\sqrt{2}}{N} (-1)^n e^{-i\pi \frac{n}{N}} \frac{\sin(\frac{\pi n}{2})}{\sin(\frac{\pi n}{N})}. \end{cases}$$

Le nom de ces ondelettes provient du fait que cette base est similaire à celle qu'on peut obtenir grâce au théorème d'échantillonnage de Shannon.

On observe maintenant que v est tel que :

- $|\hat{v}(m)| = \sqrt{2}$ pour les $\frac{N}{2}$ valeurs des fréquences m telles que $\frac{N}{4} \leq m \leq \frac{3}{4}N - 1$, i.e. les hautes fréquences ;
- $|\hat{v}(m)| = 0$ pour les $\frac{N}{2}$ valeurs des fréquences m telles que $0 \leq m \leq \frac{N}{4}N - 1$ et $\frac{3}{4}N \leq m \leq N - 1$, i.e. les basses fréquences.

Donc :

$$[v]_F = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{v}(m) F_m = \frac{1}{N} \sum_{m=\frac{N}{4}}^{\frac{3}{4}N-1} \hat{v}(m) F_m$$

i.e. v est composé par la moitié des fréquences qui tombent à côté de la fréquence maximale $\frac{N}{2}$.

Comme on le sait, la translation ne change pas le module des composantes fréquentielles, donc toute translation $R_{2k}v$ a la même propriété que v .

De la même manière, on peut dire que u et ses translations $R_{2k}u$ sont composées seulement par la moitié des basses fréquences proches de 0 et de $N - 1$.

La conséquence est que, $\forall z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, dans la représentation

$$z = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \langle z, R_{2k}v \rangle R_{2k}v + \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \langle z, R_{2k}u \rangle R_{2k}u,$$

- la première somme représente la composante en hautes fréquences de z ;
- la deuxième somme représente la composante en basses fréquences de z .

• **Exemple 3 : la base de Shannon réelle à l'échelle 1.**

Dans les applications on veut souvent des bases réelles car les signaux qu'on a à disposition sont réels et aussi car le stockage de mémoire est la moitié par rapport à une base complexe.

La base de Shannon qu'on vient de présenter n'est pas réelle : en fait on rappelle que $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ est réel $\Leftrightarrow \hat{z}(m) = \overline{\hat{z}(N - m)} \forall m \in \mathbb{Z}_N$.

Si on regarde les composantes de \hat{u} , on voit que cette condition est vérifiée pour $m = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1$ et pour $m = \frac{N}{4} + 1, \dots, \frac{3}{4}N - 1$, où \hat{u} vaut 0. Néanmoins, la condition n'est pas vérifiée pour $m = \frac{N}{4}$ et $m = N - \frac{N}{4} = \frac{3}{4}N$, car $\hat{u}(\frac{N}{4}) = 0$ et $\hat{u}(\frac{3}{4}N) = \sqrt{2}$. La même observation vaut pour \hat{v} .

On peut modifier la définition de \hat{u} et \hat{v} en $m = \frac{N}{4}$ et $m = \frac{3}{4}N$ pour avoir l'égalité tout en respectant les conditions du théorème qui caractérise les bases d'ondelettes à l'échelle 1 :

$$\hat{u}(m) = \begin{cases} \sqrt{2} & m = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \text{ et } m = \frac{3}{4}N + 1, \dots, N - 1 \\ i & m = \frac{N}{4} \\ -i & m = \frac{3}{4}N \\ 0 & m = \frac{N}{4} + 1, \dots, \frac{3}{4}N - 1, \end{cases}$$

$$\hat{v}(m) = \begin{cases} 0 & m = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \\ 1 & m = \frac{N}{4}, \frac{3}{4}N \\ \sqrt{2} & m = \frac{N}{4} + 1, \dots, \frac{3}{4}N - 1, \end{cases}$$

(i , $-i$ et 1 sont les choix les plus simples ! On ne peut pas toujours prendre 1 car sinon $A(\frac{N}{4})$ n'est pas unitaire, comme on le montrera ci-dessous).

On observe que :

$$\hat{v}\left(\frac{N}{4}\right) = \overline{\hat{v}\left(\frac{3}{4}N\right)} = 1 \text{ et } \hat{u}\left(\frac{N}{4}\right) = i = \overline{(-i)} = \overline{\hat{u}\left(\frac{3}{4}N\right)},$$

pour les autres valeurs de m , \hat{u} et \hat{v} coïncident avec la base de Shannon définie avant et donc ils satisfont les conditions requises pour être une base d'ondelette.

Pour $m = \frac{N}{4}$ la matrice de système est :

$$A\left(\frac{N}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

qui est évidemment unitaire.

En résumé, $B = (R_{2k}v)_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \cup (R_{2k}u)_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}$ est une base d'ondelettes à l'échelle 1 avec u et v à valeurs réelles. Par conséquent, tous les autres vecteurs de la base sont à valeurs réels, car translations de v et u .

Les hautes et basses fréquences sont encore réparties entre v et u , avec la seule différence qu'il y a, ici, un chevauchement en $m = \frac{N}{4}$ et $\frac{3}{4}N - 1$.

Le désavantage de la base de Shannon réelle est que les vecteurs u et v ne peuvent pas être écrits avec une forme analytique simple comme dans le cas de la base complexe, on doit se contenter de les calculer numériquement via IDFT de \hat{u} et \hat{v} et de stocker leurs valeurs.

On peut néanmoins dessiner leur graphe à l'aide d'un outil numérique une fois qu'on fixe N . Par exemple, si on fixe $N = 64$ (qui est divisible par 4), on a les graphes de figure 1.1.

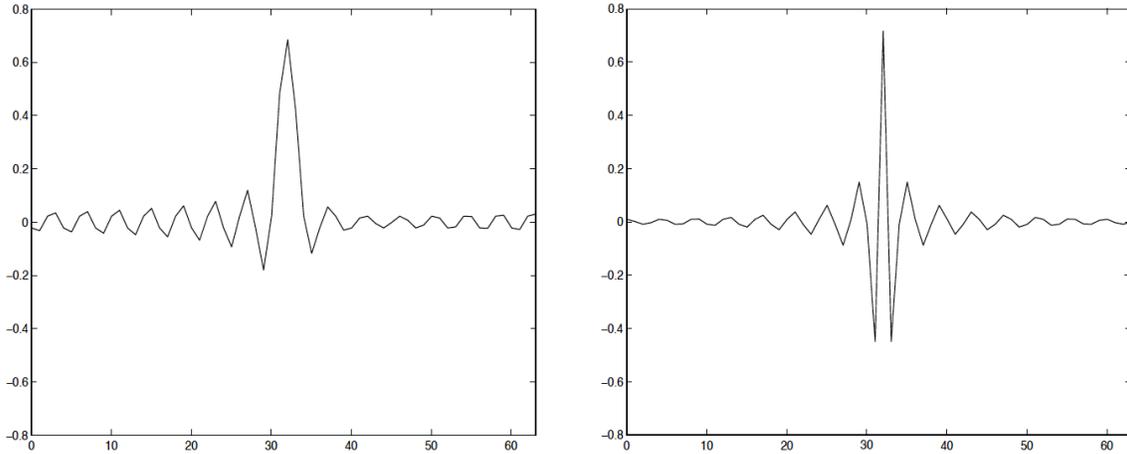


FIGURE 1.1 – Gauche : $R_{32}u$. Droite : $R_{32}v$.

Il faut noter que, dans les graphes, on considère la translation $R_{32}u$ et $R_{32}v$ pour les centrer entre 0 et 63. Il y a plusieurs observations intéressantes à faire.

1) Les graphes sont *localisés autour de leur centre* (32 dans ce cas), cela peut être surprenant car on a rien fait, explicitement, pour avoir ce type de comportement !

Essayons de comprendre la raison à cela : écrivons la formule de synthèse pour v

$$v(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{v}(m) e^{2\pi i \frac{mn}{N}} \implies v(0) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{v}(m),$$

$v(0)$ est la moyenne des valeurs $\hat{v}(m)$, qui sont toutes ≥ 0 , par contre, si $n \neq 0$, alors les exponentielles complexes oscillent et dans la somme on va avoir des termes qui s'éliminent entre eux. Ce

comportement devient de plus en plus intense au fur et à mesure que n augmente. C'est pour cela que la valeur de $v(n)$ décroît de plus en plus dès qu'on s'éloigne de $n = 0$. Bien évidemment, si on considère $R_{32}v$, la décroissance sera par rapport à $n = 32$ et non plus par rapport à 0.

Le comportement de u est expliqué d'une manière similaire : pour $n = 0$ on a la moyenne des $\hat{u}(m)$ et même si on a des composantes complexes, elles s'éliminent car $\dots + i - i = 0$!

2) Les valeurs de v sont distribuées d'une manière égale dans le semi-axe positif et négatif (on dit que la masse de v est *isotrope*), cela est expliqué grâce au fait que $\hat{v}(0) = 0$ et $\hat{v}(0) = \sum_{n=0}^{N-1} v(n) = N\langle v \rangle$, donc la moyenne $\langle v \rangle$ de v est 0.

Par contre, $\hat{u}(0) = N\langle u \rangle = \sqrt{2}$, donc la masse de u n'est pas isotrope et, en fait, elle est distribuée plus dans les ordonnées positives.

3) $R_{32}v$ est symétrique par rapport à $n = 32$, tandis que $R_{32}u$ non. Cela est expliqué par le fait que \hat{v} est 100% réel, donc $\hat{v}(m) = \hat{v}(N - m)$, mais comme v est réel lui aussi, en appliquant IDFT : $v(n) = v(N - n)$ d'où la symétrie de v par rapport à 0... et donc de $R_{32}v$ par rapport à $n = 32$.

Par contre \hat{u} n'est pas 100% réel et donc u n'est pas symétrique par rapport à $n = 0$, i.e. $R_{32}u$ n'est pas symétrique par rapport à $n = 32$.

La forme de v et de u quand on considère $R_{256}u$, $R_{256}v$ et $N = 512$ (divisible par 4), voir les graphes de figure 1.2, montre clairement pourquoi on les appelle **ondelettes** !

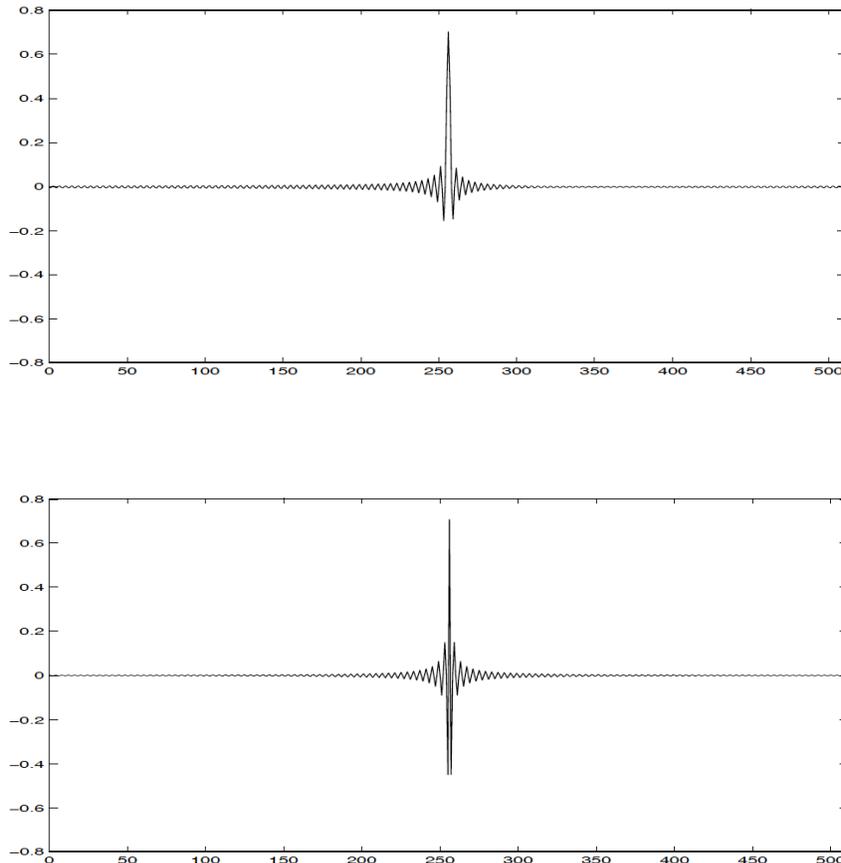


FIGURE 1.2 – Haut : $R_{256}u$. Bas : $R_{256}v$. $N = 512$.

1.3.1 Caractérisation explicite des bases d'ondelettes à l'échelle 1 sur $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$

On a vu que le caractère unitaire de la matrice $A(m)$ est nécessaire et suffisant pour avoir une base d'ondelettes à l'échelle 1 sur $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$.

Les matrices unitaires peuvent être caractérisées et grâce à cette propriété on peut donner une caractérisation explicite des bases d'ondelettes sur $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$.

Théorème 1.3.1 *Soient $M \in \mathbb{N}$, $N = 2M$.*

- $(r(n))_{n=0}^{M-1}$ réels tels que : $0 \leq r(n) \leq \sqrt{2}$;
- $(\theta(n))_{n=0}^{M-1}$, $(\varphi(n))_{n=0}^{M-1}$, $(\sigma(n))_{n=0}^{M-1}$, $(\rho(n))_{n=0}^{M-1}$ réels tels que :

$$\theta(n) + \rho(n) + \varphi(n) - \sigma(n) = (2k + 1)\pi$$

$\forall k \in \mathbb{Z}$ (qui dépend de n) quand $0 < r(n) < \sqrt{2}$. Par contre si $r(n) = 0$ ou $r(n) = \sqrt{2}$, alors on ne pose aucune contrainte sur $\theta(n), \rho(n), \varphi(n)$ et $\sigma(n)$.

On définit $\forall n \in \mathbb{Z}_M$:

$$\begin{cases} \hat{u}(n) = r(n)e^{i\theta(n)}, & \hat{u}(n + \frac{N}{2}) = \sqrt{2 - r(n)^2}e^{i\varphi(n)} \\ \hat{v}(n) = \sqrt{2 - r(n)^2}e^{i\sigma(n)}, & \hat{v}(n + \frac{N}{2}) = r(n)e^{i\rho(n)}. \end{cases}$$

Alors $u, v \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ définis par $u = (\hat{u})^\vee$ et $v = (\hat{v})^\vee$ sont tels que

$$B = (R_{2k}v)_{k=0}^{M-1} \cup (R_{2k}u)_{k=0}^{M-1}$$

est une base d'ondelettes à l'échelle 1 sur $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$. De plus, chacune de ces bases peut être écrite sous cette forme.

Comme on l'a dit, ce théorème est basé sur la caractérisation des matrices unitaires via une paramétrisation opportune. La preuve est plutôt technique et on ne la détaille pas.

1.3.2 L'ondelette mère associée à une ondelette père

Le résultat que nous allons présenter ici dit que, à chaque potentielle ondelette père u , on peut toujours associer une « compagne » v telle que u et v deviennent père et mère d'une base d'ondelettes à l'échelle 1 de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$.

Théorème 1.3.2 *Soient $M \in \mathbb{N}, N = 2M$.*

- Soit $u \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ tel que $(R_{2k}u)_{k=0}^{M-1}$ est une famille orthonormale de M éléments différents.
- Soit $v \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ défini par :

$$\boxed{v(k) = (-1)^{k-1} \overline{u(1-k)}} \quad \forall k \in \mathbb{Z}_N.$$

Alors : $B = (R_{2k}u)_{k=0}^{M-1} \cup (R_{2k}v)_{k=0}^{M-1}$ est une base d'ondelettes à l'échelle 1 pour $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$.

Preuve. Calculons la DFT de la suite $v(k)$:

$$\hat{v}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} v(n)e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^{n-1} \overline{u(1-n)} e^{-2\pi i \frac{mn}{N}}.$$

On veut opérer le changement de variable $k = 1 - n$, ce qui implique une variabilité de $k = 1 - 0 = 1$ à $k = 1 - N + 1 = -N + 2$, mais l'intervalle discret $k = -N + 2, \dots, 0, 1$ est de taille N et les suites

qui apparaissent dans la somme sont N -périodiques, donc on peut écrire la somme avec les bornes $k = 0$ et $k = N - 1$:

$$\begin{aligned}
\hat{v}(m) &= \sum_{k=0}^{N-1} \overline{u(k)} (-1)^{-k} e^{-2\pi i \frac{m(1-k)}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} \overline{u(k)} (e^{-i\pi})^{-k} e^{2\pi i \frac{mk}{N}} \underbrace{e^{-2\pi i \frac{m}{N}}}_{\text{ne dépend pas de } k} \\
&= e^{-2\pi i \frac{m}{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{u(k)} \underbrace{e^{i\pi k}}_{e^{2\pi i \frac{k}{2}} = e^{2\pi i k \frac{M}{N}}, \text{ vu que } M/N=1/2} e^{2\pi i \frac{mk}{N}} = e^{-2\pi i \frac{m}{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{u(k)} e^{2\pi i (m+M) \frac{k}{N}} \\
&= e^{-2\pi i \frac{m}{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{u(k)} e^{-2\pi i (m+M) \frac{k}{N}} = e^{-2\pi i \frac{m}{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{u(k)} e^{-2\pi i (m+M) \frac{k}{N}} \\
&= e^{-2\pi i \frac{m}{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{u(k)} e^{-2\pi i (m+M) \frac{k}{N}},
\end{aligned}$$

donc

$$\hat{v}(m) = e^{-2\pi i \frac{m}{N}} \overline{\hat{u}(m+M)}$$

et

$$\hat{v}(m+M) = e^{-2\pi i \frac{m+M}{N}} \overline{\hat{u}(m + \underbrace{2M}_{M+M=N})}.$$

Par N -périodicité on a $\hat{u}(m+2M) = \hat{u}(m)$ et $e^{-2\pi i \frac{m+M}{N}} = \underbrace{e^{-2\pi i \frac{M}{N}}}_{e^{-i\pi} = -1} e^{-2\pi i \frac{m}{N}}$, donc

$$\hat{v}(m+M) = -e^{-2\pi i \frac{m}{N}} \overline{\hat{u}(m)}.$$

Mais alors :

$$\begin{cases} \hat{v}(m) = e^{-2\pi i \frac{m}{N}} \overline{\hat{u}(m+M)} \\ \hat{v}(m+M) = -e^{-2\pi i \frac{m}{N}} \overline{\hat{u}(m)} \end{cases}$$

donc $|\hat{v}(m)|^2 + |\hat{v}(m+M)|^2 = |\hat{u}(m+M)|^2 + |\hat{u}(m)|^2$. Mais $(R_{2k}u)_{k=0}^{M-1}$ est supposée être une famille orthonormale, donc, grâce au théorème 1.2.1, $|\hat{u}(m)| = 1 \forall m$ et alors on obtient $|\hat{u}(m+M)|^2 + |\hat{u}(m)|^2 = |\hat{v}(m)|^2 + |\hat{v}(m+M)|^2 = 2 \forall m$.

Donc on a la validité des conditions (1) et (2) du théorème de caractérisation des bases d'ondelettes 1.2.2, il nous manque seulement de vérifier la condition (3) :

$$\hat{u}(m) \overline{\hat{v}(m)} + \hat{u}(m+M) \overline{\hat{v}(m+M)} = \hat{u}(m) e^{2\pi i \frac{m}{N}} \hat{u}(m+M) - \hat{u}(m+M) e^{2\pi i \frac{m}{N}} \hat{u}(m) = 0.$$

□

1.4 Représentation rapide d'un signal dans la base d'ondelettes

Pour éviter une confusion dans la notation, dans cette section on écrira avec E la base canonique de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$.

Soit $B = (R_{2k}u)_{k=0}^{M-1} \cup (R_{2k}v)_{k=0}^{M-1}$ une base d'ondelettes à l'échelle 1 de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$. Vu que B est une base orthonormale, on sait que les composantes d'un signal $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ quelconque par rapport à B sont données par les produits scalaires entre z et les éléments de la base B .

Pour les calculer rapidement on peut utiliser le fait que :

$$\langle z, R_{2k}u \rangle = z * \tilde{u}(2k) \quad \text{et} \quad \langle z, R_{2k}v \rangle = z * \tilde{v}(2k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}_M,$$

donc

$$[z]_B = \begin{pmatrix} z * \tilde{u}(0) \\ z * \tilde{u}(2) \\ \vdots \\ z * \tilde{u}(N-2) \\ z * \tilde{v}(0) \\ z * \tilde{v}(2) \\ \vdots \\ z * \tilde{v}(N-2) \end{pmatrix}.$$

Dans la figure 1.3 on montre la **banque de filtres**, i.e. la séquence de convolutions et d'autres opérations, qui implémente le calcul de $[z]_B$.

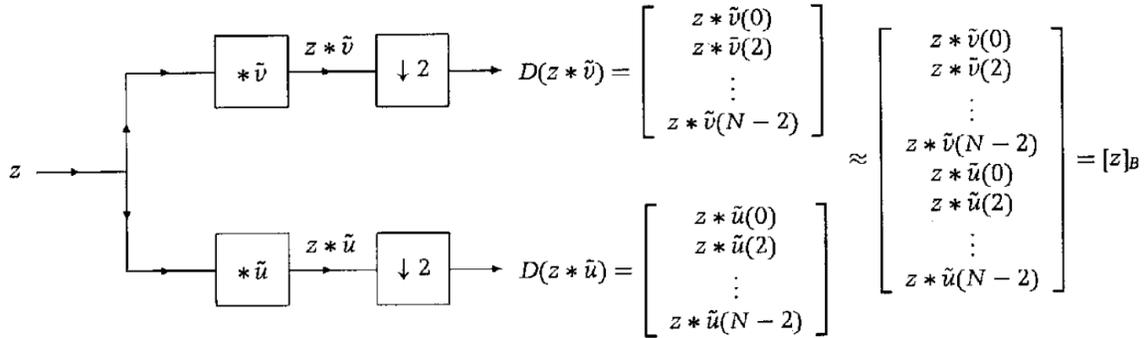


FIGURE 1.3 – Banque de filtres pour le calcul de $[z]_B$ avec l'opérateur de décimation. Le symbole \approx est utilisé pour l'union.

On voit que le calcul de $[z]_B$ correspond à une convolution (avec \tilde{u} et \tilde{v}), suivie par l'opération de *négliger les composantes d'indice impair*.

Cette dernière opération a un nom.

Déf. 1.4.1 (Opérateur de décimation ou downsampling) Soient $M \in \mathbb{N}$ et $N = 2M$.

L'opérateur

$$D : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_M)$$

$$z \longmapsto Dz, \quad \boxed{Dz(n) = z(2n)} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_M,$$

est dit « opérateur de décimation » ou « opérateur de downsampling » et dénoté avec le symbole suivant : $\downarrow 2$ car la taille des vecteurs après l'action de D est réduite à la moitié, en fait $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ et $Dz \in \ell^2(\mathbb{Z}_M)$, $M = N/2$.

Explicitement :

$$D : \begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{Z}_N) & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{Z}_M) \\ (z(0), z(1), z(2), \dots, z(N-1)) & \longmapsto & (z(0), z(2), z(4), \dots, z(N-2)). \end{array}$$

Voyons un exemple :

$$z = (2, 3i, 5, -1, -1, -i, i, 4) \in \ell^2(\mathbb{Z}_8), \quad D(z) = (2, 5, -1, i) \in \ell^2(\mathbb{Z}_8).$$

Pour passer de $[z]_B$ à $[z]_E$ on peut utiliser la banque de filtres inverse à celle d'avant. Pour cela il faut définir l'opérateur inverse à D .

Déf. 1.4.2 (Opérateur de restauration ou de upsampling) Soient $M \in \mathbb{N}, N = 2M$.

L'opérateur

$$U : \begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{Z}_M) & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{Z}_N) \\ z & \longmapsto & Uz, \end{array}$$

$$Uz(n) = \begin{cases} z(\frac{n}{2}) & n \text{ pair} \\ 0 & n \text{ impair} \end{cases}$$

$\forall n \in \mathbb{Z}_N$ est dit « opérateur de restauration ou upsampling » et dénoté avec le symbole suivant : $\uparrow 2$ car U double la taille d'un vecteur en rajoutant 0 entre deux valeurs adjacentes, en fait $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_M)$ et $Uz \in \ell^2(\mathbb{Z}_N), N = 2M$.

Explicitement :

$$U : \begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{Z}_M) & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{Z}_N) \\ (z(0), z(1), z(2), \dots, z(M-1)) & \longmapsto & (z(0), 0, z(1), 0, \dots, 0, z(M-2), 0, z(M-1)). \end{array}$$

Voyons un exemple :

$$z = (2, 5, -1, i) \in \ell^2(\mathbb{Z}_4), \quad U(z) = (2, 0, 5, 0, -1, 0, i, 0) \in \ell^2(\mathbb{Z}_8).$$

On va maintenant examiner ce qu'on obtient si on compose D et U .

1.5 Reconstruction parfaite dans une banque de filtres

En suivant la nomenclature traditionnelle qu'on utilise dans les banques de filtres, nous allons inverser l'ordre entre u et v qu'on a suivi jusqu'à là, en écrivant v avant de u dans une base d'ondelettes.

Par définition, si on applique U et après D , on a l'identité :

$$\forall z \in \ell^2(\mathbb{Z}_M), \quad D(U(z)) = z \iff D \circ U = id_{\ell^2(\mathbb{Z}_M)}.$$

Néanmoins, c'est la composition inverse à être intéressante dans l'analyse des signaux, car, si on applique D à un signal, on va réduire sa taille de la moitié, ce qui nous permet de faire des calculs plus rapidement ! Allons alors examiner ce qu'on obtient si on commence avec D et après on applique U : un moment de réflexion montre qu'on revient à un vecteur qui a des zéros au lieu des composantes originales d'indice impair. Si on utilise (1.4) on peut écrire :

$$\forall z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N), \quad U(D(z)) = \frac{1}{2}(z + z^-) \implies U \circ D \neq id_{\ell^2(\mathbb{Z}_N)},$$

donc, malgré D soit l'inverse à gauche de U , il n'est pas son inverse à droite.

Pour avoir une reconstruction parfaite d'un signal quand les opérateurs D et U sont utilisés, il faut composer $U \circ D$ avec d'autres opérations, le théorème suivant montre que ces opérations sont des convolutions¹ (voir figure 1.4).

1. Rappeler que le symbole pour l'opérateur de convolution par $w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ est T_w .

Théorème 1.5.1 Soient $M \in \mathbb{N}$, $N = 2M$ et $u, v, z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$. Si u, v sont les générateurs d'une base en ondelettes à l'échelle 1 pour $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$, alors

$$\forall z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N), \quad \boxed{v * U(D(z * \tilde{v})) + u * U(D(z * \tilde{u})) = z} \quad (1.6)$$

i.e.

$$\boxed{(T_v \circ U \circ D \circ T_{\tilde{v}}) + (T_u \circ U \circ D \circ T_{\tilde{u}}) = id_{\ell^2(\mathbb{Z}_N)}}.$$

Preuve. La preuve est faite en explicitant les opérations écrites dans la composition des deux termes de la somme. Comme les opérations sont les mêmes, nous allons considérer seulement le premier terme.

Pour simplifier la notation on considérera toujours $m, n \in \mathbb{Z}_N$ et $k \in \mathbb{Z}_M$, comme ça on pourra identifier avec l'écriture $n = 2k$ les indices pair entre 0 et $N - 1$.

- $T_{\tilde{v}}z \equiv z_1 \in \ell^2(\mathbb{Z}_N) : z_1(n) = (z * \tilde{v})(n) = \langle z, R_n v \rangle ;$
- $(D \circ T_{\tilde{v}})z = D(T_{\tilde{v}}z) = Dz_1 \equiv z_2 \in \ell^2(\mathbb{Z}_M) : z_2(k) = z_1(2k) ;$
- $(U \circ D \circ T_{\tilde{v}})z = U(D(T_{\tilde{v}}z)) = Uz_2 \equiv z_3 \in \ell^2(\mathbb{Z}_N) :$

$$z_3(n) = \begin{cases} z_2\left(\frac{n}{2}\right) = z_2(k) = z_1(2k) = \langle z, R_{2k}v \rangle & \text{si } n = 2k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ;$$

- $(T_v \circ U \circ D \circ T_{\tilde{v}})z = T_v(U(D(T_{\tilde{v}}z))) = T_v z_3 \equiv z_4 \in \ell^2(\mathbb{Z}_N) :$

$$z_4(m) = (v * z_3)(m) = \sum_{n=0}^{N-1} v(m-n)z_3(n) = \sum_{n=0}^{N-1} R_n v(m)z_3(n).$$

Les composantes non nulles de $z_3(n)$ sont celles relatives à $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}_M$, qui coïncident avec $\langle z, R_{2k}v \rangle$, donc on peut réécrire $z_4(m)$ comme ça :

$$z_4(m) = \sum_{k=0}^{M-1} \langle z, R_{2k}v \rangle R_{2k}v(m), \quad \forall m \in \mathbb{Z}_N,$$

alors $z_4 = (T_v \circ U \circ D \circ T_{\tilde{v}})z = \sum_{k=0}^{M-1} \langle z, R_{2k}v \rangle R_{2k}v$. De la même manière, on obtient $(T_u \circ U \circ D \circ T_{\tilde{u}})z = \sum_{k=0}^{M-1} \langle z, R_{2k}u \rangle R_{2k}u$. Par hypothèse, u, v sont les générateurs d'une base d'ondelettes à l'échelle 1 pour $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$, donc la somme $(T_v \circ U \circ D \circ T_{\tilde{v}})z + (T_u \circ U \circ D \circ T_{\tilde{u}})z$ est la décomposition de z sur la base d'ondelettes engendrée par u, v , i.e. cette somme permet la reconstruction parfaite de z . \square

Le diagramme de la figure 1.4 montre la reconstruction parfaite de z avec la décomposition de l'identité qu'on vient d'examiner.

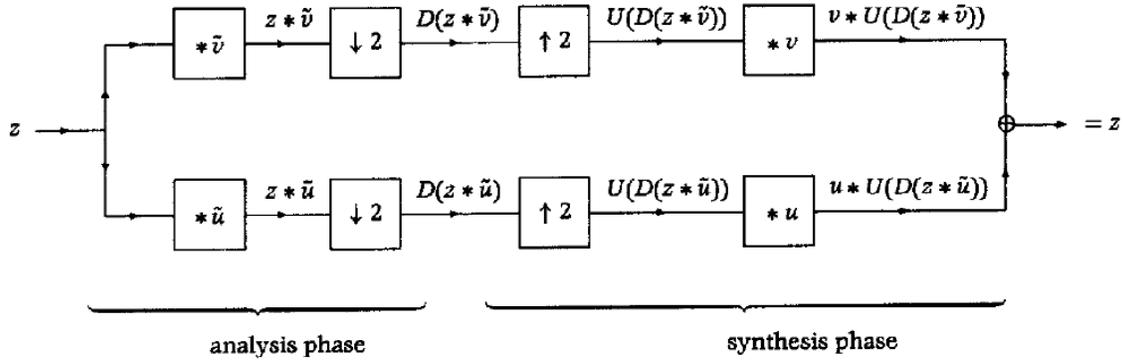


FIGURE 1.4 – Reconstruction parfaite d’un signal après les phases d’analyse et de synthèse avec une base d’ondelette à l’échelle 1.

Nous observons que les opérations dans le diagramme sont rapides, donc a déterminé des conditions qui nous permettent de passer rapidement à une base orthonormale localisée en fréquence et espace ou temps (voir l’exemple des ondelettes de Shannon) et de revenir en arrière.

1.5.1 Filtrage en ondelettes à l’échelle 1

Le schéma de reconstruction parfaite montre la cohérence de la construction qu’on a développée et permet le calcul rapide des composantes des signaux sur la base d’ondelettes à l’échelle 1. Néanmoins, dans les applications c’est intéressant aussi de modifier ces composantes.

Ceci est fait avec l’introduction d’un filtre entre l’action de l’opérateur de décimation D (i.e. après la phase d’analyse) et celui de restauration U (i.e. après la phase de synthèse).

Selon les applications, la forme analytique du filtre sera différente. L’avantage d’utiliser une base en ondelettes consiste en le fait que le filtrage pourra être localisé dans le domaine fréquentiel et spatial ou temporel.

Pour avoir un exemple concret, imaginons d’avoir un signal $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ qui dépend de l’espace et de vouloir doubler l’importance des composantes fréquentielles élevées de z autour de la valeur spatiale échantillonnée $n = 4$. Nous pouvons réaliser ceci en introduisant un filtre qui multiplie par 2 le coefficient $z * \tilde{v}(4)$, car on sait que la partie relative aux convolutions avec v de la base en ondelettes est celle associée aux hautes fréquences, i.e.

$$\begin{pmatrix} z * \tilde{u}(0) \\ z * \tilde{u}(2) \\ z * \tilde{u}(4) \\ \vdots \\ z * \tilde{u}(N-2) \\ z * \tilde{v}(0) \\ z * \tilde{v}(2) \\ z * \tilde{v}(4) \\ \vdots \\ z * \tilde{v}(N-2) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} z * \tilde{u}(0) \\ z * \tilde{u}(2) \\ z * \tilde{u}(2) \\ \vdots \\ z * \tilde{u}(N-2) \\ z * \tilde{v}(0) \\ z * \tilde{v}(2) \\ \mathbf{2 \cdot (z * \tilde{v}(4))} \\ \vdots \\ z * \tilde{v}(N-2) \end{pmatrix}$$

C’est grâce à cette propriété qu’on parle de *filtrage spatio-fréquentiel* ou *tempo-fréquentiel* quand on utilise la base en ondelettes au lieu de la base de Fourier.

1.6 Ondelettes sur $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$

L'extension au cas 2D des ondelette sur $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$ est analogue à l'extension 2D de la DFT. Soient $M_1, M_2 \in \mathbb{N}$ et $N_1 = 2M_1$ et $N_2 = 2M_2$. Pour tout $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$ on définit :

$$z_1^-(n_1, n_2) = (-1)^{n_1} z(n_1, n_2) \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$$

$$z_2^-(n_1, n_2) = (-1)^{n_2} z(n_1, n_2) \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$$

$$z_{1,2}^-(n_1, n_2) = (-1)^{n_1+n_2} z(n_1, n_2) \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}).$$

Par calcul direct, on peut vérifier que

$$z(k_1, k_2) + z_1^-(k_1, k_2) + z_2^-(k_1, k_2) + z_{1,2}^-(k_1, k_2) = \begin{cases} 4z(k_1, k_2) & k_1 \text{ et } k_2 \text{ pair} \\ 0 & k_1 \text{ ou } k_2 \text{ impair.} \end{cases}$$

Soient $u_0, u_1, u_2, u_3 \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$, on définit la matrice $A(n_1, n_2)$ dont la m -ième colonne est :

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \hat{u}_m(n_1, n_2) \\ \hat{u}_m(n_1 + \frac{N_1}{2}, n_2) \\ \hat{u}_m(n_1, n_2 + \frac{N_2}{2}) \\ \hat{u}_m(n_1 + \frac{N_1}{2}, n_2 + \frac{N_2}{2}) \end{pmatrix} \quad m = 0, 1, 2, 3.$$

Alors ça vaut le théorème suivant.

Théorème 1.6.1 *La famille*

$$\bigcup_{i=0}^3 (R_{2k_1, 2k_2} u_i)_{0 \leq k_1 \leq M_1-1; 0 \leq k_2 \leq M_2-1}$$

est une base orthonormale pour $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$ si et seulement si la matrice $A(n_1, n_2)$ est unitaire pour tout $n_1 = 0, 1, \dots, \frac{N_1}{2} - 1$ et pour tout $n_2 = 0, 1, \dots, \frac{N_2}{2} - 1$.

Il ne devrait pas être surprenant que la manière la plus simple pour générer des ondelette 2D est via le produit tensoriel d'ondelette 1D. Soit $(R_{2k} v_1)_{k=0}^{N_1-1} \cup (R_{2k} u_1)_{k=0}^{N_1-1}$ une base d'ondelette à l'échelle 1 pour $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1})$ et soit $(R_{2k} v_2)_{k=0}^{N_2-1} \cup (R_{2k} u_2)_{k=0}^{N_2-1}$ une base d'ondelette à l'échelle 1 pour $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_2})$.

On définit :

$$\begin{cases} w_0(n_1, n_2) = v_1(n_1)v_2(n_2) \\ w_1(n_1, n_2) = u_1(n_1)v_2(n_2) \\ w_2(n_1, n_2) = v_1(n_1)u_2(n_2) \\ w_3(n_1, n_2) = u_1(n_1)u_2(n_2). \end{cases} \quad (1.7)$$

Alors ça vaut le théorème suivant.

Théorème 1.6.2 *La famille*

$$\bigcup_{i=0}^3 (R_{2k_1, 2k_2} w_i)_{0 \leq k_1 \leq M_1-1; 0 \leq k_2 \leq M_2-1}$$

est une base orthonormale de $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$.

On peut aussi étendre l'algorithme de reconstruction parfaite à des banques de filtre 2D, on ne va pas détailler l'algorithme dans ce cas, néanmoins, il est instructif de voir comment les opérateurs de décimation et de restauration sont définis dans le cas 2D.

Déf. 1.6.1 (Opérateur de décimation 2D)

$$\begin{aligned} D : \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}) \\ z &\longmapsto Dz, \quad Dz(k_1, k_2) = z(2k_1, 2k_2), \end{aligned}$$

$k_1 = 0, 1, \dots, M_1 - 1$ et $k_2 = 0, 1, \dots, M_2 - 1$.

Déf. 1.6.2 (Opérateur de restauration 2D)

$$\begin{aligned} U : \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}) \\ z &\longmapsto Uz, \end{aligned}$$

$$Uz(k_1, k_2) = \begin{cases} z(\frac{k_1}{2}, \frac{k_2}{2}) & k_1 \text{ et } k_2 \text{ pair} \\ 0 & k_1 \text{ ou } k_2 \text{ impair,} \end{cases}$$

$k_1 = 0, 1, \dots, M_1 - 1$ et $k_2 = 0, 1, \dots, M_2 - 1$. Donc, U introduit 3 zéros pour toute composante non nulle.

Théorème 1.6.3 Pour tout $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$,

$$U(D(z)) = \frac{1}{4}(z + z_1^- + z_2^- + z_{1,2}^-).$$

Après ce bref interlude, on revient à la construction des ondelettes 1D sur \mathbb{Z}_N .

1.7 Construction itérative des ondelettes sur \mathbb{Z}_N

C'est utile de résumer ce qu'on a vu jusqu'à là :

- Étant donné $u, v \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, on a déterminé des conditions nécessaires et suffisantes sur $\text{DFT}(u)$ et $\text{DFT}(v)$ pour avoir une base d'ondelette à l'échelle 1 de la forme :

$$(R_{2^k}v) \cup (R_{2^k}u), \quad k = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1.$$

- On peut concentrer les hautes fréquences dans les termes qui concernent v et les basses fréquences dans ceux qui concernent u , donc on a un certain degré de localisation fréquentielle.
- On a montré aussi la possibilité d'avoir une localisation spatiale avec les ondelettes de Shannon.
- On a vu aussi que le changement de base pour amener à la représentation en ondelettes peut être calculé avec un banque de filtres et que ce changement de base peut être implémenté rapidement grâce à la FFT.

Tout cela montre qu'on est en train d'aller vers la bonne direction !

Allons maintenant reprendre le schéma de figure 1.4 : il n'est pas difficile de reconnaître une possibilité de récursivité, en fait, si on applique d'une manière itérative l'opérateur de décimation et de restauration et si ces opérations sont « compatibles » entre elles (dans un sens qu'on va définir plus tard), alors on a encore une reconstruction parfaite.

Dans la théorie des ondelettes standard *on itère seulement dans une des deux branches du schéma, celle relative au filtre passe-bas u* (des itérations plus compliquées sont considérées dans la « wavelet-packet theory »).

On va étudier dans la suite cette procédure itérative, qui nous amènera à *construire la base en ondelettes multi-échelle* de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$.

Avant de commencer on va commenter *pourquoi considérer des itérations est intéressant* : quand on a analysé les ondelettes de Haar on a vu la possibilité de « changer l'échelle » à laquelle on représente le signal, avec une réduction de la dimension du signal même.

Si on itère, on peut arriver à une échelle très grossière, que bien sûr nous donne seulement une information approximative sur le signal, mais que, dans certaines situations, peut déjà être suffisante pour comprendre si une partie d'un signal est significative ou pas.

Les calculs à une échelle très grossière sont typiquement très rapides car la dimension du signal traité est petite.

Si les informations obtenues à l'échelle la plus grossière sont prometteuses, alors on rajoute des détails en passant à une représentation moins grossières, sinon on analyse (rapidement) d'autres parties du signal.

Cette stratégie, couramment utilisée en phase d'analyse, permet d'économiser temps, énergie, mémoire de l'ordinateur, etc.

La première étape itérative du schéma précédent peut être représentée à travers du schéma ci-dessus, dans lequel on remplace \tilde{u}, \tilde{v} avec \tilde{u}_1, \tilde{v}_1 .

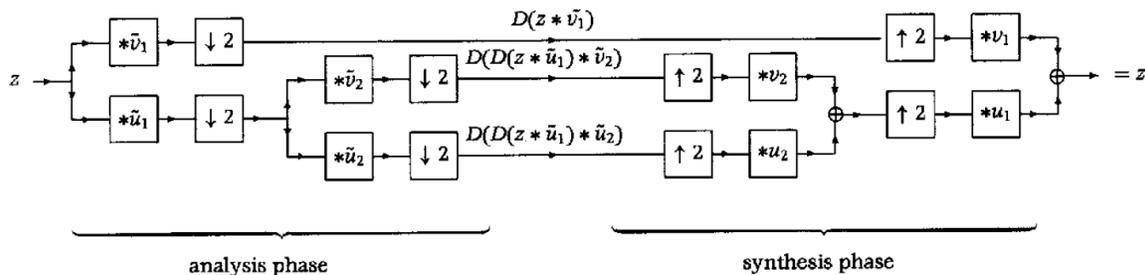


FIGURE 1.5 – La première étape itérative pour la construction d’une base d’ondelette multi-échelle.

Analyse :

- On suppose que N soit divisible par 4 ;
- On ne touche pas $D(z * \tilde{v}_1)$;
- On répète sur $D(z * \tilde{u}_1)$ ce qu’on a fait sur z :
 - on considère deux vecteurs u_2, v_2 en $\ell^2(\mathbb{Z}_{\frac{N}{2}})$ dont la matrice de système associée (avec N remplacé par $\frac{N}{2}$) soit unitaire ;
 - on passe $D(z * \tilde{u}_1)$ aux filtres de convolution par \tilde{v}_2 et \tilde{u}_2 , suivi par un opérateur de décimation.
 - la phase d’analyse nous donnera comme résultat :

$$D(z * \tilde{v}_1), D(D(z * \tilde{u}_1) * \tilde{v}_2), D(D(z * \tilde{u}_1) * \tilde{u}_2).$$

Synthèse :

- Comme montré dans la figure 1.5, on introduit deux opérateurs de upsampling pour la branche du bas, suivie par une convolution avec v_2 et u_2 , et après on reconstruit avec la branche du haut.

C’est intuitif d’imaginer que, si N est divisible par 2^p , on peut répéter le processus p fois. La seule contrainte à respecter c’est le caractère unitaire de la matrice de système pour chaque filtre, pour garantir la reconstruction parfaite.

On peut formaliser le schéma précédent avec la définition suivante.

Déf. 1.7.1 Soit N divisible par 2^p . Une banque de filtre en ondelettes itérative à p échelles est défini par deux suites de vecteurs u_1, u_2, \dots, u_p et v_1, v_2, \dots, v_p tels que :

$$u_j, v_j \in \ell^2\left(\mathbb{Z}_{\frac{N}{2^{j-1}}}\right) \quad \forall j = 1, 2, \dots, p,$$

et tels que la matrice de système :

$$A_j(m) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \hat{u}_j(m) & \hat{v}_j(m) \\ \hat{u}_j(m + \frac{N}{2^j}) & \hat{v}_j(m + \frac{N}{2^j}) \end{pmatrix}$$

est unitaire $\forall m \in \mathbb{Z}_{N/2^j} = 0, 1, \dots, \frac{N}{2^j} - 1, j = 1, 2, \dots, p$.

Observer que pour $j = 1$ on obtient une banque de filtres en ondelettes à l'échelle 1.

Pour tout signal d'entrée $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, on définit :

$$\begin{cases} x_1 = D(z * \tilde{v}_1) \in \ell^2\left(\mathbb{Z}_{\frac{N}{2}}\right) \\ y_1 = D(z * \tilde{u}_1) \in \ell^2\left(\mathbb{Z}_{\frac{N}{2}}\right), \end{cases}$$

on répète la construction sur la version passe-bas de z à l'échelle 1, i.e. y_1 :

$$\begin{cases} x_2 = D(y_1 * \tilde{v}_2) = D(D(z * \tilde{u}_1) * \tilde{v}_2) \in \ell^2\left(\mathbb{Z}_{\frac{N}{4}}\right) \\ y_2 = D(y_1 * \tilde{u}_2) = D(D(z * \tilde{u}_1) * \tilde{u}_2) \in \ell^2\left(\mathbb{Z}_{\frac{N}{4}}\right), \end{cases}$$

on répète la construction sur la version passe-bas de z à l'échelle 2, i.e. y_2 :

$$\begin{cases} x_3 = D(y_2 * \tilde{v}_3) = D(D(D(z * \tilde{u}_1) * \tilde{u}_2) * \tilde{v}_3) \in \ell^2\left(\mathbb{Z}_{\frac{N}{4}}\right) \\ y_3 = D(y_2 * \tilde{u}_3) = D(D(D(z * \tilde{u}_1) * \tilde{u}_2) * \tilde{u}_3) \in \ell^2\left(\mathbb{Z}_{\frac{N}{4}}\right), \end{cases}$$

et on itère sur la version passe-bas de z à l'échelle j , i.e. y_j , $\forall j = 2, \dots, p$, en obtenant :

$$\begin{cases} x_j = D(y_{j-1} * \tilde{v}_j) = D(D(\dots D(D(z * \tilde{u}_1) * \tilde{u}_2) \dots \tilde{u}_{j-1}) * \tilde{v}_j) \in \ell^2\left(\mathbb{Z}_{\frac{N}{2^j}}\right) \\ y_j = D(y_{j-1} * \tilde{u}_j) = D(D(\dots D(D(z * \tilde{u}_1) * \tilde{u}_2) \dots \tilde{u}_{j-1}) * \tilde{u}_j) \in \ell^2\left(\mathbb{Z}_{\frac{N}{2^j}}\right). \end{cases} \quad (1.8)$$

La figure 1.6 donne une représentation graphique de la récurrence.

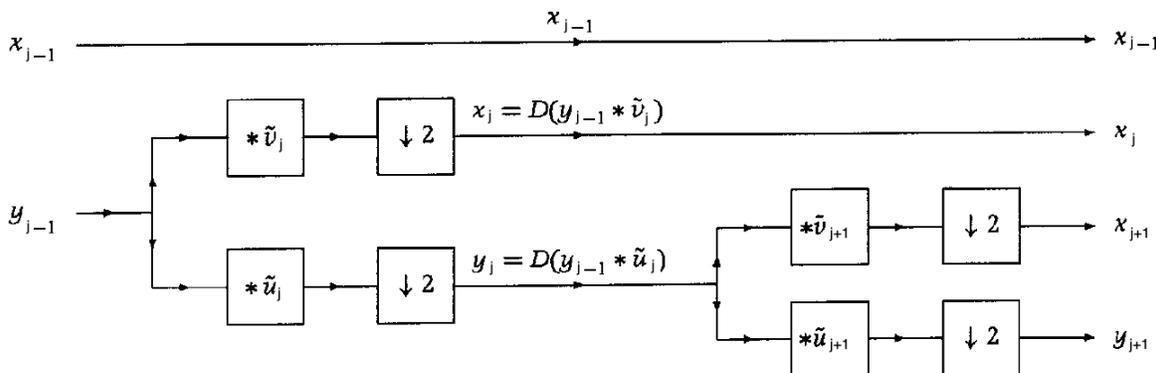


FIGURE 1.6 – La j -ème étape itérative pour la construction d'une base d'ondelette multi-échelle.

Il faut souligner que les vecteurs y_1, \dots, y_{p-1} n'apparaissent pas dans la sortie de la phase d'analyse : pour tout $j < p$, y_j est utilisé pour définir x_{j+1} et y_{j+1} . En fait, la sortie de la phase d'analyse du banque de filtres d'ondelette à l'échelle p est l'ensemble de vecteurs

$$(x_1, x_2, \dots, x_p, y_p) \quad (\text{sortie de la phase d'analyse}).$$

Le seul parmi les vecteurs y_j qu'on considère à la sortie de la phase d'analyse est le vecteur y_p : vu qu'il est obtenu par itération d'un filtre passe-bas (la convolution avec les vecteurs \tilde{u}_j), y_p **représente la version la plus grossière du signal** z est sa présence est indispensable pour avoir un nombre correct de composantes à la sortie de la phase d'analyse. En fait, la somme du nombre des composantes des vecteurs $(x_1, x_2, \dots, x_p, y_p)$ est (correctement) N :

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{N}{2} + \frac{N}{4} + \dots + \frac{N}{2^{p-1}} + \frac{N}{2^p}}_{x_1, x_2, \dots, x_p} + \underbrace{\frac{N}{2^p}}_{y_p} &= N \sum_{j=1}^p \left(\frac{1}{2}\right)^j + N \frac{1}{2^p} = N \left[\sum_{j=0}^p \left(\frac{1}{2}\right)^j - 1 + \frac{1}{2^p} \right] \\ &= N \left[\frac{1 - \frac{1}{2^{p+1}}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2^p} - 1 \right] = N \left[2 \left(1 - \frac{1}{2^{p+1}}\right) + \frac{1}{2^p} - 1 \right] = N \left[2 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} - 1 \right] = N. \end{aligned}$$

On passe maintenant à la description de la phase de synthèse, visualisée dans la figure 1.7. On va utiliser les propriétés de reconstruction parfaite qu'on a discuté dans la section 1.5.

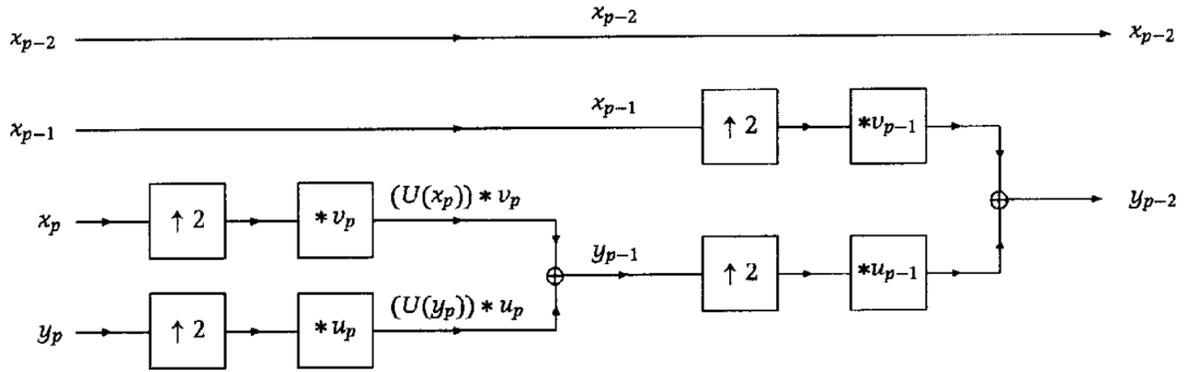


FIGURE 1.7 – La deuxième étape itérative pour la construction d'une base d'ondelette multi-échelle.

- La première étape consiste en calculer $U(y_p) * u_p$ et $U(x_p) * v_p$ pour reconstruire y_{p-1} via la formule :

$$y_{p-1} = U(y_p) * u_p + U(x_p) * v_p,$$

comme montré par la branche en bas de la figure 1.7.

- Dans la deuxième étape on utilise le vecteur y_{p-1} qu'on vient de calculer et le vecteur x_{p-1} qu'on a à disposition de la phase d'analyse pour calculer y_{p-2} via la formule :

$$y_{p-2} = U(y_{p-1}) * u_{p-1} + U(x_{p-1}) * v_{p-1},$$

comme montré par la branche intermédiaire de la figure 1.7.

- La j -ième itération sera alors :

$$y_{j-1} = U(y_j) * u_j + U(x_j) * v_j \quad p \leq j \leq 2.$$

- La reconstruction de y_1 comme :

$$y_1 = U(y_2) * u_2 + U(x_2) * v_2$$

permettra la reconstruction (parfaite) de z comme ça :

$$z = U(y_1) * u_1 + U(x_1) * v_1.$$

Le théorème suivant donne une estimation de la complexité computationnelle de la banque de filtres qu'on vient de décrire.

Théorème 1.7.1 Soient $N = 2^n$ et $1 \leq p \leq n$, et supposons que les vecteurs $\tilde{u}_1, \tilde{u}_p, \dots, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_p$ soient déjà pré-calculés. Alors, la phase d'analyse et celle de reconstruction nécessitent (chacune) un nombre de multiplications complexes inférieur ou égale à $4N + N \log_2 N$.

De plus, si les filtres $u_1, \dots, u_p; v_1, \dots, v_p$ ont k composantes $\neq 0$, alors la phase d'analyse nécessite maximum $4kN$ multiplications complexes.

Cette description itérative est intuitive et elle montre bien comment implémenter les filtres, néanmoins, les formules (1.8) montrent que **les convolutions nécessaires pour calculer les vecteurs x_j et y_j sont emboîtées**.

Dans la section suivante nous allons examiner une formulation équivalente dans laquelle les vecteurs x_j et y_j peuvent être calculés via des convolutions découplées. Ceci donne la possibilité de paralléliser l'algorithme et donne plus de flexibilité en phase de filtrage.

1.8 Une construction alternative : analyse multi-résolution

On veut définir une extension de l'opérateur de décimation D , pour cela on aura besoin du résultat suivant.

Lemme 1.8.1 Soit $N = 2M$. Pour tout $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ et $x, y, w \in \ell^2\left(\mathbb{Z}_{\frac{N}{2}}\right)$:

$$D(z) * w = D(z * U(w)),$$

et

$$U(x) * U(y) = U(x * y).$$

La preuve est laissé comme exercice.

Déf. 1.8.1 Les opérateurs de décimation et de restauration, respectivement, à l'échelle j sont :

$$\begin{aligned} D^j : \ell^2(\mathbb{Z}_N) &\longrightarrow \ell^2\left(\mathbb{Z}_{\frac{N}{2^j}}\right) \\ z &\longmapsto D^j(z), \quad D^j(z)(n) = z(2^j n), \end{aligned}$$

i.e., $D^1 = D$ et $D^j = (D \circ D^{j-1}) \forall j > 1$, et

$$\begin{aligned} U^j : \ell^2\left(\mathbb{Z}_{\frac{N}{2^j}}\right) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_N) \\ z &\longmapsto U^j(z), \quad U^j(z)(n) = \begin{cases} z\left(\frac{n}{2^j}\right) & \text{si } \frac{n}{2^j} \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \end{aligned}$$

La condition $\frac{n}{2^j} \in \mathbb{Z}$ veut dire qu'il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = k2^j$. Si $j = 1$, alors $n = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \dots$, i.e. les indices entiers relatifs pair (comme pour l'opérateur U , et donc $U^1 = U$); si $j = 2$, alors $n = 0, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \dots$, i.e. des indices entiers relatifs séparés par un pas double par rapport à U^1 ; si $j = 3$, alors $n = 0, \pm 8, \pm 16, \pm 32, \dots$, i.e. des indices entiers relatifs séparés par un pas double par rapport à U^2 et quatre fois le pas de relatif à U^1 , etc.

Par simple itération du lemme précédent, on obtient le resultat suivant.

Corollaire 1.8.1 Pour tout $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ et $x, y, w \in \ell^2\left(\mathbb{Z}_{\frac{N}{2^j}}\right)$:

$$D^j(z) * w = D^j(z * U^j(w)) \tag{1.9}$$

et

$$U^j(x * y) = U^j(x) * U^j(y), \tag{1.10}$$

pour tout $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ et $x, y, w \in \ell^2\left(\mathbb{Z}_{\frac{N}{2^j}}\right)$.

L'éq. (1.9) : elle dit que décimer à l'échelle $N/2^j$ un signal z et après faire la convolution avec un autre signal w de taille $N/2^j$ est égale à faire la convolution entre z et l'upsampling du signal w à l'échelle N , et après décimer le résultat à l'échelle $N/2^j$.

On va maintenant introduire la terminologie équivalente à celle réursive vue dans la section précédente.

Déf. 1.8.2 Soit N divisible par 2^p , i.e. $\frac{N}{2^p} = k \in \mathbb{Z}$.

Soient $u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p$ $2p$ vecteurs tels que : $u_j, v_j \in \ell^2\left(\mathbb{Z}_{\frac{N}{2^{j-1}}}\right)$.

On pose $\boxed{f_1 = v_1}$, $\boxed{g_1 = u_1}$ et $\forall j = 2, 3, \dots, p$:

$$\boxed{f_j = g_{j-1} * U^{j-1}(v_j)},$$

$$\boxed{g_j = g_{j-1} * U^{j-1}(u_j)}.$$

Explicitement :

$$f_2 = g_1 * U^1(v_2) = u_1 * U(v_2)$$

$$g_2 = g_1 * U^1(u_2) = u_1 * U(u_2)$$

$$f_3 = g_2 * U^2(v_3) = u_1 * U(u_2) * U^2(v_3)$$

$$g_3 = g_2 * U^2(u_3) = u_1 * U(u_2) * U^2(u_3)$$

⋮

$$f_j = u_1 * U(u_2) * U^2(u_3) * \dots * U^{j-2}(u_{j-1}) * U^{j-1}(v_j)$$

$$g_j = u_1 * U(u_2) * U^2(u_3) * \dots * U^{j-2}(u_{j-1}) * U^{j-1}(u_j),$$

il faut observer que c'est le filtre v_j qui est utilisé dans la dernière convolution qui définit f_j .

Il est un simple exercice de démontrer les formules $(z * w)^\sim = \tilde{z} * \tilde{w}$ et $(U(z))^\sim = U(\tilde{z})$. D'ici nous avons que :

$$\tilde{f}_j = (g_{j-1} * U^{j-1}(v_j))^\sim = \tilde{g}_{j-1} * (U^{j-1}(v_j))^\sim = \tilde{g}_{j-1} * U^{j-1}(\tilde{v}_j), \quad (1.11)$$

et, de la même manière, que :

$$\tilde{g}_j = \tilde{g}_{j-1} * U^{j-1}(\tilde{u}_j). \quad (1.12)$$

Comme annoncé à la fin de la section précédente, on aimerait avoir la possibilité de décrire la sortie de l'étape d'analyse et de celle de synthèse d'une banque de filtres en ondelettes à p échelles via une ensemble de convolutions découplées, i.e. non appliquées récursivement comme dans la Déf. 1.7.1 et comme dans les formules (1.8). Le résultat suivant montre que c'est possible.

Théorème 1.8.1 Soit N divisible par 2^p , $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, $u_1, \dots, u_p; v_1, \dots, v_p$ tels que $u_j, v_j \in \ell^2\left(\mathbb{Z}_{\frac{N}{2^{j-1}}}\right)$ $\forall j = 1, 2, \dots, p$. Si x_j et y_j sont comme dans la Déf. 1.7.1 et si f_j, g_j sont comme dans la Déf. 1.8.2, alors la relation entre eux est donnée par :

$$\boxed{x_j = D^j(z * \tilde{f}_j)}$$

et que

$$\boxed{y_j = D^j(z * \tilde{g}_j)}.$$

Preuve. On fera la preuve par récursivité (à l'arrière) sur j :

- $j = 1$: c'est vrai, car $f_1 = v_1$, $g_1 = u_1$ et $x_1 = D(z * \tilde{v}_1)$, $y_1 = D(z * \tilde{u}_1)$;
- on suppose l'énoncé vrai pour $j - 1$ et on le prouve pour j (> 1 fini) arbitraire :

$$\begin{aligned}
 x_j &\stackrel{\text{(déf.)}}{=} D(y_{j-1} * \tilde{v}_j) \stackrel{\text{(hyp. induction)}}{=} D(D^{j-1}(z * \tilde{g}_{j-1}) * \tilde{v}_j) \\
 &\stackrel{\text{(1.9)}}{=} D \circ D^{j-1}(z * \tilde{g}_{j-1} * U^{j-1}(\tilde{v}_j)) \\
 &\stackrel{\text{(1.11)}}{=} D^j(z * \tilde{f}_j),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_j &\stackrel{\text{(déf.)}}{=} D(y_{j-1} * \tilde{u}_j) \stackrel{\text{(hyp. induction)}}{=} D(D^{j-1}(z * \tilde{g}_{j-1}) * \tilde{u}_j) \\
 &\stackrel{\text{(1.9)}}{=} D \circ D^{j-1}(z * \tilde{g}_{j-1} * U^{j-1}(\tilde{u}_j)) \\
 &\stackrel{\text{(1.12)}}{=} D^j(z * \tilde{g}_j).
 \end{aligned}$$

□

Le théorème suivant dit qu'il y a une description similaire pour la phase de reconstruction, montrée graphiquement en figure 1.8.

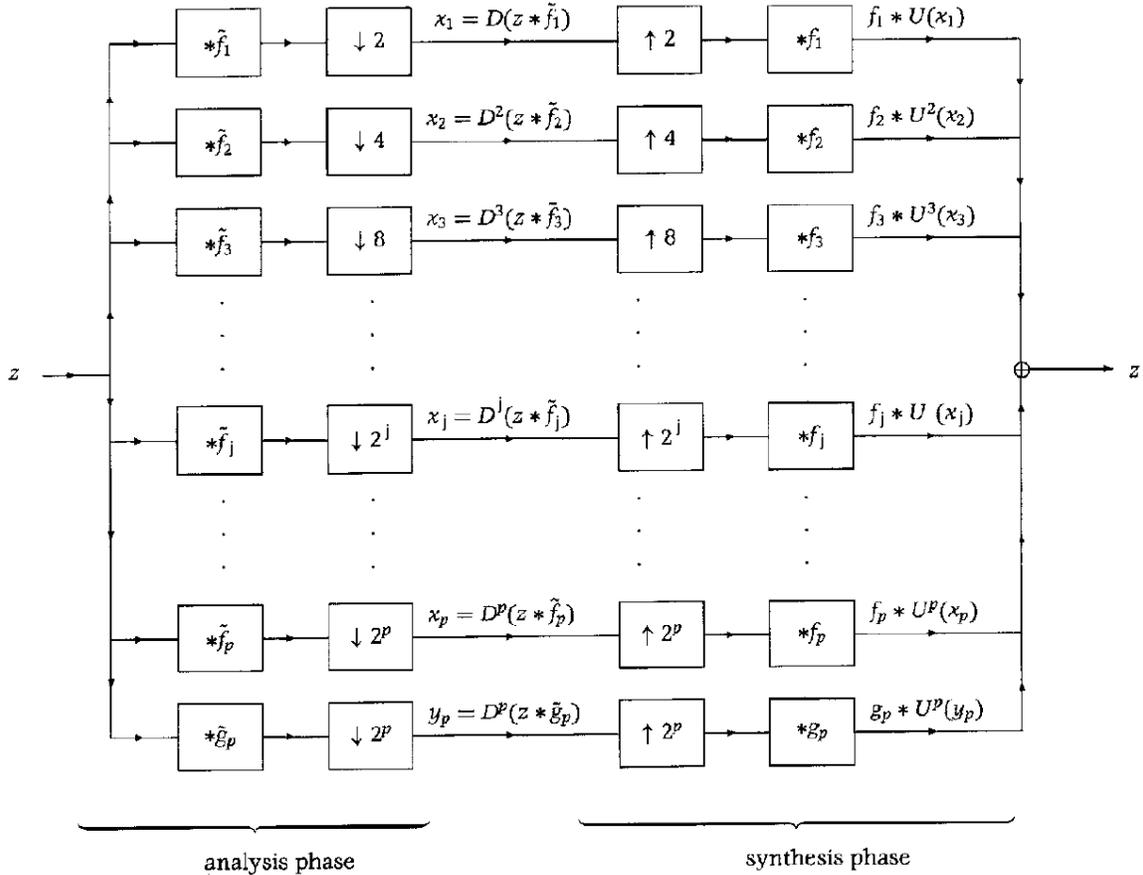


FIGURE 1.8 – Analyse et synthèse multi-résolution complète.

Théorème 1.8.2 *Si l'entrée de la branche j -ième, $1 \leq j \leq p$, de la phase de reconstruction (i.e la branche après laquelle on fait la convolution avec v_j) est x_j et toutes les autres entrées sont nulles, alors la sortie de la phase de reconstruction est :*

$$f_j * U^j(x_j).$$

Si l'entrée de la branche finale (i.e celle après laquelle on fait la convolution avec u_p) est y_p et toutes les autres entrées sont nulles, alors la sortie de la phase de reconstruction est :

$$g_p * U^p(y_p).$$

Allons maintenant à mettre en relation ce qu'on vient de voir avec la possibilité de construire une base d'ondelettes à p échelles de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$. Pour faire ça, rappelons que la sortie de la phase d'analyse est donnée par la famille de vecteurs x_1, \dots, x_p, y_p et que $\forall k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2^p} - 1$:

$$\begin{aligned} x_j(k) &= D^j(z * \tilde{f}_j)(k) = z * \tilde{f}_j(2^j k) = \langle z, R_{2^j k} f_j \rangle, \\ y_p(k) &= D^p(z * \tilde{g}_p)(k) = z * \tilde{f}_p(2^p k) = \langle z, R_{2^p k} g_p \rangle. \end{aligned}$$

Nous pouvons observer des composantes exprimées via des produits scalaires et, de plus, le nombre totale de composantes des x_1, \dots, x_p, y_p est exactement N , donc il semble qu'on peut reconnaître dans les composantes ci-dessus les coefficients de l'expansion de z par rapport à une base orthonormale.

Dans les pages suivantes on va démontrer que c'est exactement comme ça. Pour simplifier le langage on anticipe la définition suivante.

Déf. 1.8.3 *Soit N divisible par 2^p , $p \in \mathbb{N}$ et, étant donnés des éléments $f_1, \dots, f_p, g_p \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, soit :*

$$B = (R_{2^k} f_1)_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \cup (R_{4^k} f_2)_{k=0}^{\frac{N}{4}-1} \cup \dots \cup (R_{2^p k} f_p)_{k=0}^{\frac{N}{2^p}-1} \cup (R_{2^p k} g_p)_{k=0}^{\frac{N}{2^p}-1}.$$

Si B est une base orthonormale pour $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$, alors on dit que :

- B est une **base d'ondelette à p échelles** pour $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$;
- f_1, \dots, f_p, g_p sont les **générateurs** de B .

Le but de l'analyse qu'on fera dans les pages suivantes est de montrer que les éléments f_1, \dots, f_p, g_p qu'on a introduit dans la définition 1.8.2 génèrent une base d'ondelette à p échelles pour $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$.

Une étape fondamentale pour prouver cela est contenue dans le lemme suivant.

Lemme 1.8.2 *Soit N divisible par 2^j et soient :*

- $g_{j-1} \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$;
- $(R_{2^{j-1}k} g_{j-1})_{k=0}^{\frac{N}{2^{j-1}}-1}$ une famille orthonormale de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ avec $\frac{N}{2^{j-1}}$ éléments ;
- $u_j, v_j \in \ell^2\left(\mathbb{Z}_{\frac{N}{2^j}}\right)$;
- $f_j = g_{j-1} * U^{j-1}(v_j)$, $g_j = g_{j-1} * U^{j-1}(u_j)$.

Si la matrice de système

$$A_j(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \hat{u}_j(n) & \hat{v}_j(n) \\ \hat{u}_j(n + \frac{N}{2^j}) & \hat{v}_j(n + \frac{N}{2^j}) \end{pmatrix},$$

est unitaire $\forall n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2^j} - 1$, alors :

$$(R_{2^j k} f_j)_{k=0}^{\frac{N}{2^j}-1} \cup (R_{2^j k} g_j)_{k=0}^{\frac{N}{2^j}-1}$$

est une famille orthonormale de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ avec $\frac{N}{2^j-1}$ éléments.

Preuve. Pour commencer, on rappelle que $z * \tilde{w}(k) = \langle z, R_k w \rangle$. Grâce à l'hypothèse d'orthonormalité :

$$g_{j-1} * \tilde{g}_{j-1}(2^{j-1}k) = \langle g_{j-1}, R_{2^{j-1}k} g_{j-1} \rangle = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2^{j-1}} - 1. \end{cases}$$

L'hypothèse sur la matrice $A_j(n)$ implique que :

$$(R_{2^k} v_j)_{k=0}^{\frac{N}{2^j}-1} \cup (R_{2^k} u_j)_{k=0}^{\frac{N}{2^j}-1}$$

est une base de $\ell^2\left(\mathbb{Z}_{\frac{N}{2^{j-1}}}\right)$.

En particulier :

$$v_j * \tilde{v}_j(2k) = \langle v_j, R_{2k} v_j \rangle = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2^j} - 1 \end{cases}$$

et

$$v_j * \tilde{u}_j(2k) = \langle v_j, R_{2k} u_j \rangle = 0 \quad \forall k$$

et

$$u_j * \tilde{u}_j(2k) = \langle u_j, R_{2k} u_j \rangle = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k = 1, \dots, \frac{N}{2^j} - 1 \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} \langle f_j, R_{2^j k} f_j \rangle &= f_j * \tilde{f}_j(2^j k) \\ &\stackrel{(1.11)}{=} g_{j-1} * U^{j-1}(v_j) * \tilde{g}_{j-1} * U^{j-1}(\tilde{v}_j)(2^j k) \\ &= (g_{j-1} * \tilde{g}_{j-1}) * (U^{j-1}(v_j * \tilde{v}_j))(2^j k) \\ &\stackrel{(\text{d\'ef. conv.})}{=} \sum_{n=0}^{N-1} (g_{j-1} * \tilde{g}_{j-1})(2^j k - n) U^{j-1}(v_j * \tilde{v}_j)(n). \end{aligned}$$

Mais :

$$U^{j-1}(v_j * \tilde{v}_j)(n) = \begin{cases} (v_j * \tilde{v}_j)(l) & n = 2^{j-1}l \\ 0 & \text{autrement,} \end{cases}$$

donc, en r\'ealit\'e, la sommation par rapport aux n est r\'eduite \`a celle par rapport \`a $n = 2^{j-1}l$, que l'on peut \xe9crire comme une sommation en l apr\es un changement de variable :

$$\langle f_j, R_{2^j k} f_j \rangle = \sum_{l=0}^{\frac{N}{2^{j-1}}-1} g_{j-1} * \tilde{g}_{j-1}(2^j k - 2^{j-1}l) (v_j * \tilde{v}_j)(l)$$

mais on a vu que :

$$g_{j-1} * \tilde{g}_{j-1}(2^j k - 2^{j-1}l) = g_{j-1} * \tilde{g}_{j-1}(2^{j-1}(2^k - l)) = \begin{cases} 1 & l = 2k \\ 0 & l \neq 2k, \quad l \in \mathbb{Z}_{\frac{N}{2^{j-1}}}, \end{cases}$$

donc :

$$\langle f_j, R_{2^j k} f_j \rangle = (v_j * \tilde{v}_j)(2k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k = 1, \dots, \frac{N}{2^j} - 1 \end{cases}$$

i.e. $(R_{2^j k} f_j)_{k=0}^{\frac{N}{2^j}-1}$ est une famille orthonormale.

Si on suit la m\eme proc\'edure avec g_j au lieu de f_j on obtient :

$$\langle g_j, R_{2^j k} g_j \rangle = (u_j * \tilde{u}_j)(2k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k = 1, \dots, \frac{N}{2^j} - 1, \end{cases}$$

i.e., aussi $(R_{2^j k} g_j)_{k=0}^{\frac{N}{2^j}-1}$ est une famille orthonormale.

Également on obtient :

$$\langle f_j, R_{2^j k} g_j \rangle = (v_j * \tilde{u}_j)(2k) = 0 \quad \forall k$$

donc $\langle R_{2^j k} f_j, R_{2^j l} g_j \rangle = 0 \quad \forall j, k$.

□

Nous allons voir avec le théorème suivant que ce lemme implique qu'on peut décomposer un sous-espace de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ engendré par les translations de 2^{j-1} d'un vecteur, i.e. $\text{span}(R_{2^{j-1}k} g_{j-1})_{k=0}^{\frac{N}{2^{j-1}}-1}$ en deux sous-espaces orthogonaux, i.e. $\text{span}(R_{2^j k} f_j)_{k=0}^{\frac{N}{2^j}-1}$ et $\text{span}(R_{2^j k} g_j)_{k=0}^{\frac{N}{2^j}-1}$, chacun engendré par les translations de la quantité 2^j d'un autre vecteur.

Avant d'énoncer et de démontrer le théorème, on rappelle que, si E est un espace vectoriel avec produit scalaire et si U_1, U_2 sont des sous-espaces de E telles que $U_2 = U_1^\perp$, alors $E = U_1 \oplus U_2$, i.e. $\forall v \in E$ il existe une seule couple $(u_1, u_2) \in U_1 \times U_2$ telle que : $v = u_1 + u_2$.

Théorème 1.8.3 *Soit N divisible par 2^j et :*

- $g_{j-1} \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$;
- $(R_{2^{j-1}k} g_{j-1})_{k=0}^{\frac{N}{2^{j-1}}-1}$ une famille orthonormale de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$;
- $u_j, v_j \in \ell^2\left(\mathbb{Z}_{\frac{N}{2^j}}\right)$ et soit la matrice de système $A_j(n)$ unitaire $\forall n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2^j} - 1$;
- $f_j = g_{j-1} * U^{j-1}(v_j)$;
- $g_j = g_{j-1} * U^{j-1}(u_j)$.

Alors, si on définit les espaces

$$\begin{aligned} V_{-j+1} &= \text{span}(R_{2^{j-1}k} g_{j-1})_{k=0}^{\frac{N}{2^{j-1}}-1} \\ V_{-j} &= \text{span}(R_{2^j k} g_j)_{k=0}^{\frac{N}{2^j}-1} \\ W_{-j} &= \text{span}(R_{2^j k} f_j)_{k=0}^{\frac{N}{2^j}-1}, \end{aligned}$$

ça vaut que :

$$\boxed{V_{-j+1} = V_{-j} \oplus W_{-j}}.$$

La raison pour laquelle on utilise un indice négatif est que, comme ça, les espaces vont grandir avec l'indice, en fait : $V_{-j} \subseteq V_{-j+1}$.

La meilleure manière pour représenter ce qu'on a fait jusqu'à là est via la figure 1.9, dans laquelle les flèches représentent l'inclusion.

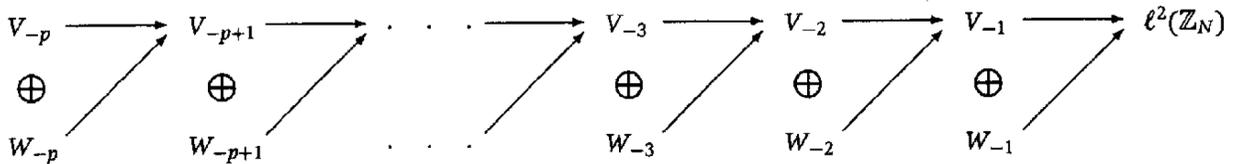


FIGURE 1.9 – Décomposition multi-résolution.

Il est important d'observer que ce point de vu peut être appliqué aussi à la construction des ondelettes sur \mathbb{Z} et \mathbb{R} !

Déf. 1.8.4 V_j est dit *espaces d'échelle* j et W_j est dit *espaces de détail* à l'échelle j .

Preuve. Grâce au lemme précédent, on sait que chaque élément de la base $R_{2^j k} g_j$ de V_{-j} est \perp à chaque élément de la base $R_{2^j l} f_j$ de W_{-j} . Donc, par linéarité $V_{-j} \perp W_{-j}$;

Allons maintenant montrer que V_{-j} et W_{-j} sont des sous espaces de V_{-j+1} . Pour tout $k = 0, \dots, \frac{N}{2^j} - 1$:

$$\begin{aligned} R_{2^j k} g_j(n) &= g_j(n - 2^j k) = g_{j-1} * U^{j-1}(u_j)(n - 2^j k) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} g_{j-1}(n - 2^j k - m) U^{j-1}(u_j)(m). \end{aligned}$$

Mais, comme,

$$U^{j-1}(u_j)(m) = \begin{cases} U_j\left(\frac{m}{2^{j-1}}\right) & \frac{m}{2^{j-1}} \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{autrement,} \end{cases}$$

la somme est réduite aux m de la forme $2^{j-1}l$, donc

$$\begin{aligned} R_{2^j k} g_j(n) &= \sum_{l=0}^{\frac{N}{2^{j-1}}-1} g_{j-1}(x - 2^j k - 2^{j-1}l) u_j(l) \\ &= \sum_{l=0}^{\frac{N}{2^{j-1}}-1} u_j(l) R_{2^{j-1}(l+2k)} g_{j-1}(n) \quad \forall n, \end{aligned}$$

donc

$$R_{2^j k} g_j = \sum_{l=0}^{\frac{N}{2^{j-1}}-1} u_j(l) R_{2^{j-1}(l+2k)} g_{j-1}$$

et de la même manière, on obtient :

$$R_{2^j k} f_j = \sum_{l=0}^{\frac{N}{2^{j-1}}-1} v_j(l) R_{2^{j-1}(l+2k)} g_{j-1}.$$

Ceci montre que $R_{2^j k} g_j$ et $R_{2^j k} f_j$ sont des combinaisons linéaires de translatés de g_{j-1} par des multiples entiers de 2^{j-1} , i.e ils sont des combinaisons linéaires d'éléments de la base de V_{-j+1} .

Vu que les éléments de la base de V_{-j} et de W_{-1} appartiennent à V_{-j+1} , alors $V_{-j}, W_{-1} \subseteq V_{-j+1}$.

Pour démontrer que $V_{-j+1} = V_{-j} \oplus W_{-j}$ ça nous reste seulement à prouver que les dimensions de V_{-j} et de W_{-1} sont complémentaires en V_{-j+1} . V_{-j} et W_{-j} sont orthogonales, donc leur intersection est réduite au vecteur nul, i.e. $\dim(V_{-j} \cap W_{-j}) = 0$. De plus, comme $\dim(V_{-j}) = \dim(W_{-j}) = \frac{N}{2^j}$,

$$\dim(V_{-j} \oplus W_{-j}) = \dim(V_{-j}) + \dim(W_{-j}) = 2 \frac{N}{2^j} = \frac{N}{2^{j-1}} = \dim(V_{-j+1}).$$

Ceci termine la preuve du fait que $V_{-j+1} = V_{-j} \oplus W_{-j}$. □

Corollaire 1.8.2 Soit N divisible par 2^p et soit $u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p$ une suite de filtres en ondelettes à l'échelle p , alors $f_1, f_2, \dots, f_p, g_p$ sont les générateurs d'une base en ondelette à l'échelle p .

Preuve. Vu le fait que la famille $f_1, f_2, \dots, f_p, g_p$ à N éléments on doit tout simplement démontrer l'orthonormalité pour prouver qu'elle est une base orthonormale de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$.

Comme $f_1 = v_1$ et $g_1 = u_1$, on a que $(R_{2^k} f_1)_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \cup (R_{2^k} g_1)_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}$ est une famille orthonormale. Par récurrence, en utilisant le Lemme 1.8.2, on a que $(R_{2^j k} f_j)_{k=0}^{\frac{N}{2^j}-1}$ (pour tout $j = 1, \dots, p$) et aussi

$(R_{2^p k} g_p)_{k=0}^{\frac{N}{2^p}-1}$ sont orthonormales. Donc, pour démontrer l'orthogonalité de la famille totale, ça reste de prouver l'orthogonalité des éléments qui appartiennent aux deux ensembles.

Pour démontrer ça on assume que $m < l$ et on utilise le théorème précédent pour écrire :

$$R_{2^j k} f_j \in W_{-j} \subseteq V_{-j+1} \subset \dots \subseteq V_{-m}$$

et $R_{2^m j} f_m \in W_{-m}$. Comme $V_{-m} \perp W_{-m}$, donc $R_{2^j k} f_j$ est orthogonale à $R_{2^m j} f_m$. Également, pour tout $j \leq p$, $R_{2^p k} g_p \in V_{-p} \subseteq V_{-j}$ et donc il est orthogonal à $R_{2^j k} f_j \in W_{-j}$. \square

On va introduire une notation canonique dans la littérature sur les ondelettes :

Déf. 1.8.5 Nous écrivons :

$$\boxed{\psi_{-j,k} = R_{2^j k} f_j}, \quad \boxed{\varphi_{-j,k} = R_{2^j k} g_j}.$$

La base d'ondelettes à l'échelle p avec cette notation est :

$$(\psi_{-1,k})_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \cup (\psi_{-2,k})_{k=0}^{\frac{N}{4}-1} \cup \dots \cup (\psi_{-p,k})_{k=0}^{\frac{N}{2^p}-1} \cup (\varphi_{-p,k})_{k=0}^{\frac{N}{2^p}-1}.$$

Les éléments de cette base sont appelés « ondelettes sur \mathbb{Z}_N ».

Avec cette notation :

$$\boxed{V_{-j} = \text{span}(\varphi_{-j,k})_{k=0}^{\frac{N}{2^j}-1}}, \quad \boxed{W_{-j} = \text{span}(\psi_{-j,k})_{k=0}^{\frac{N}{2^j}-1}}.$$

Si on reprend les formules :

$$f_j = u_1 * U(u_2) * U^2(u_3) * \dots * U^{j-2}(u_{j-1}) * U^{j-1}(v_j),$$

$$g_j = u_1 * U(u_2) * U^2(u_3) * \dots * U^{j-2}(u_{j-1}) * U^{j-1}(u_j),$$

et on tient en considération le fait que $\widehat{U(z)}(m) = \hat{z}(m)$, on obtient

$$\hat{\psi}_{-j,0}(m) = \hat{f}_j(m) = \hat{u}_1(m) \hat{u}_2(m) \dots \hat{u}_{j-1}(m) \hat{v}_j(m),$$

et

$$\hat{\varphi}_{-j,0}(m) = \hat{g}_j(m) = \hat{u}_1(m) \hat{u}_2(m) \dots \hat{u}_{j-1}(m) \hat{u}_j(m).$$

On observe aussi que :

$$\hat{\psi}_{-j,k} = R_{2^j k} f_j = R_{2^j k} \psi_{-j,0}, \quad \varphi_{-p,k} = R_{2^p k} g_p = R_{2^p k} \varphi_{-p,0}.$$

Si on applique la DFT, qui transforme la translation en un facteur de phase, on obtient pour tout j et k :

$$\boxed{\psi_{-j,k}(m) = e^{-2\pi i \frac{m 2^j k}{N}} \hat{\psi}_{-j,0}(m)},$$

$$\boxed{\hat{\varphi}_{-j,k}(m) = e^{-2\pi i \frac{m 2^j k}{N}} \hat{\varphi}_{-j,0}(m)}.$$

Jusqu'à ce moment, on n'a pas demandé des relations entre les filtres u_j et v_j à échelles différentes et ça semblerait aussi qu'aucune relation n'est possible, car il s'agit de vecteurs de taille différentes.

Néanmoins, le résultat suivant montre une relation très importante qui permet d'obtenir des filtres u_j et v_j tels que la matrice de systèmes $A_j(n)$ est unitaire pour tout n à partir de filtres u_1 et v_1 qui satisfont cette propriété pour A_1 . Le résultat est connu sous le nom de « folding lemma », ou lemme du repliage, allons voir pourquoi.

Lemme 1.8.3 (Folding lemma) Soit $N \in \mathbb{N}$ pair et $u_1 \in \ell^2\left(\mathbb{Z}_{\frac{N}{2}}\right)$.

1) Si on définit la suite $\frac{N}{2}$ -périodique $u_2 \in \ell^2\left(\mathbb{Z}_{\frac{N}{2}}\right)$ comme ça : $u_2(n) = u_1(n) + u_1\left(n + \frac{N}{2}\right)$, alors, pour tout m :

$$\hat{u}_2(m) = \hat{u}_1(2m).$$

2) si N est divisible par 2^j et si on définit $u_j(n) = \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} u_1\left(n + \frac{kN}{2^{j-1}m}\right) \in \ell^2\left(\mathbb{Z}_{\frac{N}{2^{j-1}}}\right)$, alors, pour tout m :

$$\hat{u}_j(m) = \hat{u}_1(2^{j-1}m).$$

Preuve. On prouve seulement 1), car la 2) suit directement par récurrence. On écrit :

$$\hat{u}_2(m) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} u_2(n) e^{-2\pi i \frac{mn}{\frac{N}{2}}}$$

mais, par définition de u_2 :

$$\hat{u}_2(m) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} u_1(n) \underbrace{e^{-2\pi i \frac{mn}{\frac{N}{2}}}}_{e^{-2\pi i \frac{(2m)n}{N}}} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} u_1\left(n + \frac{N}{2}\right) e^{-2\pi i \frac{mn}{\frac{N}{2}}}.$$

Allons manipuler le deuxième terme via un changement d'indice : $k = n + \frac{N}{2} \iff n = k - \frac{N}{2} - 1$, vu que n varie entre 0 et $\frac{N}{2} - 1$, k varie entre $\frac{N}{2}$ et $N - 1$, donc

$$\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} u_1\left(n + \frac{N}{2}\right) e^{-2\pi i \frac{mn}{\frac{N}{2}}} = \sum_{k=\frac{N}{2}}^{N-1} u_1(k) e^{-2\pi i m \frac{k-\frac{N}{2}}{\frac{N}{2}}}$$

mais $e^{-2\pi i m \frac{k-\frac{N}{2}}{\frac{N}{2}}} = e^{-2\pi i \frac{mk}{\frac{N}{2}}} e^{-2\pi i \frac{m\frac{N}{2}}{\frac{N}{2}}} = e^{-2\pi i \frac{(2m)k}{N}} e^{-2\pi i m} = e^{-2\pi i \frac{(2m)k}{N}}$, donc

$$\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} u_1\left(n + \frac{N}{2}\right) e^{-2\pi i \frac{mn}{\frac{N}{2}}} = \sum_{k=\frac{N}{2}}^{N-1} u_1(k) e^{-2\pi i \frac{(2m)k}{N}} \stackrel{k \leftrightarrow n}{=} \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} u_1(n) e^{-2\pi i \frac{(2m)n}{N}}.$$

Si on remplace le deuxième terme de l'expression de $\hat{u}_2(m)$ avec ce qu'on vient d'écrire nous arrivons à :

$$\hat{u}_2(m) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} u_1(n) e^{-2\pi i \frac{(2m)n}{N}} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} u_1(n) e^{-2\pi i \frac{(2m)n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} u_1(n) e^{-2\pi i \frac{(2m)n}{N}} = \hat{u}_1(2m).$$

□

La raison pour le nom du lemme est que u_2 est obtenu de u_1 en considérant seulement les premières $\frac{N}{2}$ composantes, les repliant et en sommant.

Une conséquence immédiate du lemme de repliage est la suivante.

Corollaire 1.8.3 Soit N divisible par 2^p et $u, v \in \ell_2(\mathbb{Z}_N)$ tels que la matrice de système $A(n)$ est unitaire pour tout n . Soient $u_1 = u$, $v_1 = v$ et, pour tout $j = 2, \dots, p$,

$$u_j(n) = \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} u_1 \left(n + \frac{kN}{2^{j-1}} \right)$$

et

$$v_j(n) = \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} v_1 \left(n + \frac{kN}{2^{j-1}} \right).$$

Alors, $u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p$ est une suite de filtres en ondelettes à l'échelle p .

Preuve. La j -ème matrice de système est :

$$A_j(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \hat{u}_j(n) & \hat{v}_j(n) \\ \hat{u}_j(n + \frac{N}{2^j}) & \hat{v}_j(n + \frac{N}{2^j}) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \hat{u}_1(2^{j-1}n) & \hat{v}_1(2^{j-1}n) \\ \hat{u}_1(2^{j-1}n + \frac{N}{2}) & \hat{v}_1(2^{j-1}n + \frac{N}{2}) \end{pmatrix} = A_1(2^{j-1}n),$$

qui est unitaire pour tout n . □

Sous les hypothèses du corollaire, on obtient que :

$$\hat{\psi}_{-j,0}(n) = \hat{u}(n)\hat{u}(2n) \dots \hat{u}(2^{j-2}n)\hat{v}(2^{j-1}n),$$

$$\hat{\varphi}_{-j,0}(n) = \hat{u}(n)\hat{u}(2n) \dots \hat{u}(2^{j-2}n)\hat{u}(2^{j-1}n).$$

Des ondelettes de ce type sont particulièrement simples à construire, car il faut tout simplement construire u, v tels que la matrice de système associée soit unitaire et le reste est automatique.

Pour terminer, on cite le fait que l'extension 2D est faite encore grâce au produit tensoriel, mais la notation devient extrêmement lourde.