Comparaison de différentes méthodes d'optimisation sans contrainte

1 Banane de Rosenbrock

L'objectif de ce TP est de comparer différentes méthodes d'optimisation, afin de bien comprendre les différences fondamentales entre les méthodes de relaxation, de descente de gradient à pas constant, et de descente de gradient à pas optimal.

A cette fin, nous allons considérer une fonction classique en optimisation, appelée souvent "banane de Rosenbrock" :

$$J(x) = J(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + 10(x_1^2 - x_2)^2 \tag{1}$$

Cette fonction est-elle convexe ? En quel point J est elle minimum ?

Calculer $\nabla J(x)$ puis $\nabla^2 J(x)$.

Visualiser cette fonction en 3D avec matlab. On utilisera pour cela la fonction *meshgrid*.

Visualiser ensuite en 2D cette fonction, i.e. comme une image (le niveau de gris d'un pixel représente la valeur de la fonction). On pourra utiliser la fonction *imagesc*.

Commentaires ? Expliquer pourquoi la fonction J n'est pas facile à minimiser.

2 Préliminaires : optimisation en dimension 1

Comme rappelé en cours, la dimension 1 est un cas spécial pour l'optimisation (essentiellement dû au fait que $\mathbb{R}$ est un ensemble ordonné). De nombreux algorithmes d'optimisation (comme le gradient à pas optimal) utilisent une méthode d'optimisation en dimension 1.

Ecrire une fonction qui prends en entrée un point x et un vecteur d, et qui calcule le minimum de la fonction $f := t \mapsto J(x+dt)$ en utilisant la méthode de Newton (penser à calculer $f'(t) = \langle \nabla J(x+td), d\rangle$ et $f''(t) = \langle \nabla^2 J(x+td)d, d\rangle$).

3 Minimisation de J

3.1 Méthode de relaxation

Implémenter la méthode de relaxation. L'utiliser pour la fonction J, en partant du point $(-1, 1)$. Afficher la trajectoire des points calculés successivement par la méthode.

3.2 Méthode du gradient à pas constant

Implémenter la méthode du gradient à pas constant. L'utiliser pour la fonction J, en partant du point $(-1, 1)$. Afficher la trajectoire des points calculés successivement par la méthode. Comment faut-il régler le pas pour arriver vraiment au minimum ?

3.3 Méthode du gradient à pas optimal

Implémenter la méthode du gradient à pas optimal. L'utiliser pour la fonction J, en partant du point $(-1, 1)$. Afficher la trajectoire des points calculés successivement par la méthode. Comparer les temps de calcul avec la méthode précédente.

3.4 Méthode de Newton

Implémenter la méthodes de Newton. L'utiliser pour la fonction J, en partant du point $(-1, 1)$. Afficher la trajectoire des points calculés successivement par la méthode.

3.5 Méthode du gradient conjugué

Implémenter la méthodes du gradient conjuguée (version Polack-Ribière). L'utiliser pour la fonction J, en partant du point $(-1, 1)$. Afficher la trajectoire des points calculés successivement par la méthode.

3.6 Comparaisons

Comparer les différentes trajectoires obtenues. Commentaires (nombres d'itérations, temps de calcul, ...).