Comparaison de différentes méthodes d'optimisation sans contrainte

1 Banane de Rosenbrock

L'objectif de ce TP est de comparer différentes méthodes d'optimisation, afin de bien comprendre les différences fondamentales entre les méthodes de relaxation, de descente de gradient à pas constant, et de descente de gradient à pas optimal.

A cette fin, nous allons considérer une fonction classique en optimisation, appelée souvent "banane de Rosenbrock" :

$$J(x,y) = (x-1)^2 + 10(x^2 - y)^2 \tag{1}$$

Cette fonction est-elle convexe ? En quel point J est elle minimum ?

Calculer $\nabla J(x,y)$ puis $\nabla^2 J(x,y)$.

Visualiser cette fonction en 3D avec matlab. On utilisera pour cela la fonction *meshgrid*.

Visualiser ensuite en 2D cette fonction, i.e. comme une image (le niveau de gris d'un pixel représente la valeur de la fonction). On pourra utiliser la fonction *imagesc*.

Commentaires ? Expliquer pourquoi la fonction J n'est pas facile à minimiser.

2 Préliminaires : optimisation en dimension 1

Comme rappelé en cours, la dimension 1 est un cas spécial pour l'optimisation (essentiellement dû au fait que $\mathbb{R}$ est un ensemble ordonné). De nombreux algorithmes d'optimisation (comme le gradient à pas optimal) utilisent une méthode d'optimisation en dimension 1.

Ecrire une fonction qui prends en entrée un point x et un vecteur d, et qui calcule le minimum de la fonction $t \mapsto J(x + dt)$ en utilisant la méthode de Newton.

3 Minimisation de J

3.1 Méthode de relaxation

Implémenter la méthode de relaxation. L'utiliser pour la fonction J, en partant du point $(-1, 1)$. Afficher la trajectoire des points calculés successivement par la méthode.

3.2 Méthode du gradient à pas constant

Implémenter la méthode du gradient à pas constant. L'utiliser pour la fonction J, en partant du point $(-1, 1)$. Afficher la trajectoire des points calculés successivement par la méthode.

3.3 Méthode du gradient à pas optimal

Implémenter la méthode du gradient à pas optimal. L'utiliser pour la fonction J, en partant du point $(-1, 1)$. Afficher la trajectoire des points calculés successivement par la méthode.

3.4 Méthode de Newton

Implémenter la méthodes de Newton. L'utiliser pour la fonction J, en partant du point $(-1, 1)$. Afficher la trajectoire des points calculés successivement par la méthode.

3.5 Méthode du gradient conjugué

Implémenter la méthodes du gradient conjugué (version Polack-Ribière). L'utiliser pour la fonction J, en partant du point $(-1, 1)$. Afficher la trajectoire des points calculés successivement par la méthode.

3.6 Comparaisons

Comparer les différentes trajectoires obtenues. Commentaires (nombres d'itérations, temps de calcul, ...).