Minimisation de la variation totale

Dans ce TP, on considère différentes approches pour minimiser l'énergie :

$$\int_\Omega |Du| + \frac{1}{2\mu}\|f-u\|^2 \tag{1}$$

1 Fonctionnelle approchée

Dans cette première partie, on regarde l'approximation suivante du modèle ROF :

$$\int_\Omega \sqrt{|\nabla u|^2+\epsilon^2} + \frac{1}{2\mu}\|f-u\|^2 \tag{2}$$

1.1 Descente de gradient

Calculer l'équation d'Euler-Lagrange associée à la fonctionnelle ci-dessus. Calculer le minimiseur par une méthode de descente de gradient.

Choisir une image, la bruiter (et la sauver). Déterminer empiriquement la vitesse de convergence de l'algorithme.

1.2 Méthode de type quasi-Newton

Utiliser la méthode de quasi-Newton pour minimiser la fonctionnelle. Déterminer empiriquement la vitesse de convergence de l'algorithme. On peut montrer qu'une telle méthodde converge linéairement. Néanmoins, en pratique, on observe souvent une vitesse de convergence quadratique.

2 Algorithmes de projection

On rappelle que la solution du modèle (1) est donnée par :

$$u = f - P_{G_\mu}(f) \tag{3}$$

Il suffit donc de savoir calculer la projection sur la boule de rayon μ dans G pour calculer u.

2.1 Algorithme d'Antonin Chambolle

On peut calculer la projection en utilisant une méthode de point fixe à partir des relations de Kuhn et Tucker.

Le problème discret à résoudre pour calculer la projection est le suivant :

$$\min\left\{\|\mu \mathrm{div}\,(p) - f\|_X^2 : p \;/\; |p_{i,j}| \leq 1 \;\forall i,j = 1,\ldots,N\right\} \tag{4}$$

On le résout par une méthode de point fixe : $p^0 = 0$, and

$$p_{i,j}^{n+1} = \frac{p_{i,j}^n + \tau(\nabla(\mathrm{div}\,(p^n) - f/\mu))_{i,j}}{1 + \tau|(\nabla(\mathrm{div}\,(p^n) - f/\mu))_{i,j}|} \tag{5}$$

Si le paramètre τ vérifie $\tau < 1/8$, alors $\mu\mathrm{div}\,(p^n)$ converge vers $P_{G_\mu}(f)$ lorsque $n \to +\infty$.

En pratique, on observe la convergence pour $\tau < 1/4$.

Vérifier numériquement ces assertions. Regarder la vitesse de convergence empirique.

2.2 Algorithme de gradient projeté

On peut aussi calculer la projection en utilisant un algorithme de gradient projeté.

$$\left\{ \begin{array}{l} v^m = \frac{f}{\mu} + \mathrm{div}\, p^m \\ p_{i,j}^{m+1} = \frac{p_{i,j}^m + \tau(\nabla v^m)_{i,j}}{\max\left\{1, |p_{i,j}^n + \tau(\nabla v^m)_{i,j}|\right\}} \end{array} \right. \tag{6}$$

et si $\tau < 1/4$, on montre que μv^m converge vers la solution de (1).

2.3 Extension au cas de la déconvolution

On considère le cas de la déconvolution :

$$\frac{1}{2\mu}\|Au - f\|^2 + \int_\Omega |Du| \tag{7}$$

où A est un opérateur de flou (numériquement, on pourra prendre pour A un noyau gaussien).

On peut montrer que le schéma suivant permet de calculer la solution u avec $\nu\|A^*A\| \leq 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_n = u_n + \nu A^*(f - Au_n) \\ u_{n+1} = \mathrm{argmin}_u \left(\frac{1}{2\mu\nu}\|v_n - u\|^2 + \int |Du| \right) \end{array} \right. \tag{8}$$

Programmer cette méthode. Comparer sa vitesse avec les méthodes pour la focntionnelle approchée.

3 Algorithme de Nesterov

Une nouvelle classe d'algorithme du premier ordre particulièrement efficace est apparue récemment. L'algorithme suivant permet de calculer la solution de (1).

1. Set $k = 0$, $v_0 = 0$, $x_0 = 0$, $L = \mu\|\mathrm{div}\,\|^2 = 8\mu$.
2. Set $k = k + 1$, and compute $\eta_k = -\nabla\,(f - \mu\mathrm{div}\,(x_k))$.
3. Set $y_k = P_K(x_k - \eta_k/L)$, with $K = \left\{x \in L^2 \times L^2 \ / \ \|x\| \leq 1\right\}$.

4. Set $v_k = v_{k-1} + \frac{k+1}{2}\eta_k$.
5. Set $z_k = P_K(-v_k/L)$.
6. Set $x_{k+1} = \frac{2}{k+3}z_k + \frac{k+1}{k+2}y_k$.
7. The output of the algorithm is : $u = f - \mu \mathrm{div}\,(y_{\mathrm{lim}})$.

Programmer cette méthode. Comparer sa vitesse de convergence avec les autres méthodes étudiés dans ce TP.