Bordeaux, le 19/01/2014, Jean Fresnel

Le théorème de Descartes sur quatre cercles tangents

Introduction L'objet de ces quelques pages est l'étude d'un problème connu depuis **Appolonius** (262-190 av J.C.) qui consiste à déterminer les configurations de quatre cercles du plan euclidien qui sont tangents deux à deux. Il est facile de montrer que l'on peut indexer les quatre cercles C_1, C_2, C_3, C_4 de façon que C_1, C_2, C_3 soient tangents extérieurement et que C_4 soit tangent extérieurement à C_1, C_2, C_3 (*fig.* 3) ou que C_1, C_2, C_3 soient tangents intérieurement à C_4 (*fig.* 4) . Il semble que les premiers résultats soient dûs à **Descartes** dans le cadre d'un échange épistolaire avec la princesse **Elizabeth de Bohême** ([De.] , 1643) . Coxeter a repris le problème, ainsi que d'autres comme il est cité dans l'introduction de sa note ([Co.] , 1968) , en remarquant qu'il y avait une faiblesse dans la démonstration de **Descartes.**

La preuve que l'on présent ici a l'avantage de pouvoir utiliser la notion d'angle orienté et aussi d'utiliser Maple qui permet un calcul rapide de factorisation d'un polynôme de degré 6 à quatre variables.

Si les quatre cercles sont tangents extérieurement, alors les rayons r_1, r_2, r_3, r_4 de ces cercles sont reliés par la relation

$2((\frac{1}{r_1})^2+(\frac{1}{r_2})^2+(\frac{1}{r_3})^2+(\frac{1}{r_4})^2)-(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4})^2=0$, c'était la formule de **Descartes.**

Si les cercles C_1, C_2, C_3 sont tangents extérieurement et si C_1, C_2, C_3 soient tangents intérieurement à C_4 , alors les rayons r_1, r_2, r_3, r_4 de ces cercles sont reliés par la relation

$2((\frac{1}{r_1})^2+(\frac{1}{r_2})^2+(\frac{1}{r_3})^2+(\frac{1}{r_4})^2)-(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_4})^2=0$.

Nous présentons aussi une analyse précise de l'existence et du nombre de cercles tangents à trois cercles donnés qui sont tangents extérieurement.

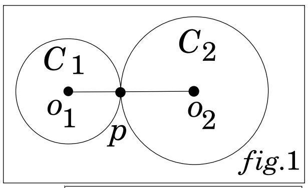

*fig.*1

Définition Soient C_1 (resp. C_2) deux cercles du plan euclidien de centre o_1 (resp. o_2) et qui sont tangents en un point p . On dit que C_1 et C_2 sont *tangents extérieurement* si $p \in [o_1, o_2]$, i.e. si p appartient au segment $[o_1, o_2]$ (*fig.*1). On dit que C_1 *est tangent intérieurement à* C_2 si $o_1 \in [o_2, p]$ (*fig.*2).

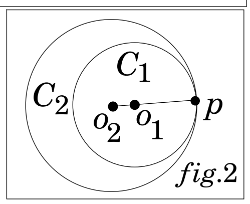

*fig.*2

Théorème (**Descartes** novembre 1643)
Soit $\mathbf{E}$ *le plan euclidien.*
1. *Soient* C_1 (resp. C_2, C_3, C_4) *quatre cercles du plan* $\mathbf{E}$, *de rayon* a (resp. b, c, d) . *On suppose que* C_i *est tangent extérieurement à* C_j *pour* $1 \leq i < j \leq 4$ (*fig.*3). *Alors on a la relation*
$2(x^2+y^2+z^2+t^2)-(x+y+z+t)^2=0$
où $x := \frac{1}{a}$, $y := \frac{1}{b}$, $z := \frac{1}{c}$, $t := \frac{1}{d}$.

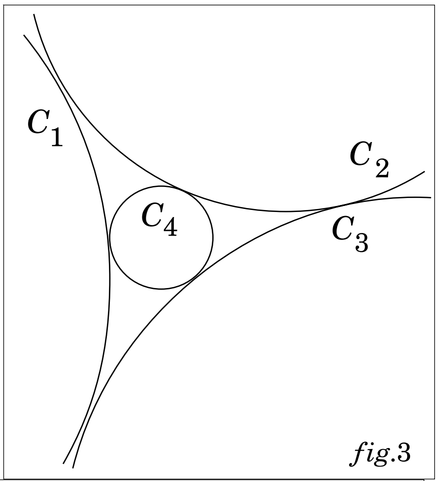

*fig.*3

2. *Soient* C_1 (resp. C_2, C_3, C_4) *quatre cercles du plan* $\mathbf{E}$, *de rayon* a (resp. b, c, d). *On suppose que pour* $1 \leq i < j \leq 3$, C_i *est tangent extérieurement à* C_j *et que* C_i *est tangent intérieurement à* C_4 *pour* $1 \leq i \leq 3$ (*fig.*4). *Alors on a la relation*
$2(x^2+y^2+z^2+t^2)-(x+y+z-t)^2=0$ *où* $x := \frac{1}{a}, y := \frac{1}{b}, z := \frac{1}{c}, t := \frac{1}{d}$.

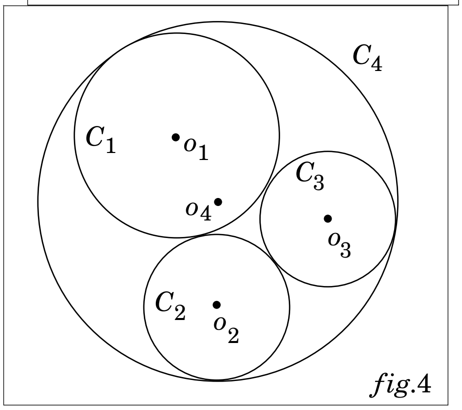

*fig.*4

3. *Soient* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *avec* $x>0, y>0, z>0$, *alors il existe, à isométrie près, une unique configuration de trois cercles* C_1, C_2, C_3 *de rayons respectifs* $a := \frac{1}{x}$, $b := \frac{1}{y}$, $c := \frac{1}{z}$ *avec* C_i *tangent extérieurement à* C_j *pour* $1 \leq i < j \leq 3$. *Soient*
$Q(T) := T^2 - 2(x+y+z)\,T + 2(x^2+y^2+z^2) - (x+y+z)^2$.

3.1. *Si* $2(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2<0$, *le polynôme* Q *admet une seule racine* $t \in \mathbb{R}$ *avec* $t>0$, i.e. *il existe un seul* $t \in \mathbb{R}$ *avec* $t>0$ *tel que* $2(x^2+y^2+z^2+t^2)-(x+y+z+t)^2=0$. *Alors il existe un unique cercle* C_4 *qui est tangent extérieurement à* C_1, C_2, C_3 *et il a pour rayon* $d := \frac{1}{t}$.

3.2. *Si* $2(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2>0$, *le polynôme* Q *admet deux racines* t (resp. t') *avec* $t, t' \in \mathbb{R}$, $t>0$, $t'>0$, i.e. *il existe* t , $t' \in \mathbb{R}$, $t>0$, $t'>0$ *avec* $2(x^2+y^2+z^2+t^2)-(x+y+z+t)^2=0$ *et* $2(x^2+y^2+z^2+t'^2)-2(x+y+z+t')^2=0$. *Alors il existe exactement deux cercles* C_4 *et* C'_4 *qui sont tangents extérieurement à* C_1, C_2, C_3 , *ils sont de rayons* $d := \frac{1}{t}$ *et* $d' := \frac{1}{t'}$ (*fig.*5).

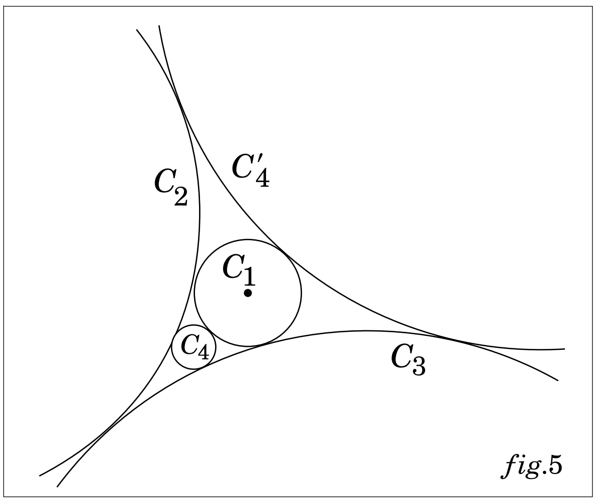

*fig.*5

4. *Soient* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *avec* $x>0, y>0, z>0$*, alors il existe, à isométrie près, une unique configuration de trois cercles* C_1, C_2, C_3 *de rayons respectifs* $a := \frac{1}{x}$ *,* $b := \frac{1}{y}$ *,* $c := \frac{1}{z}$ *avec* C_i *tangent extérieurement à* C_j *pour* $1 \leq i < j \leq 3$ *. Soit* $R(T) := T^2 + 2(x+y+z)T + 2(x^2+y^2+z^2) - (x+y+z)^2$.

4.1. *Si* $2(x^2+y^2+z^2) - (x+y+z)^2 < 0$ *, alors le polynôme* $R(T)$ *admet une seule racine* $t \in \mathbb{R}$ *, avec* $t > 0$ *, ce qui veut dire que sous cette hypothèse, il existe un unique* $t \in \mathbb{R}$ *,* $t > 0$ *tel que* $2(x^2+y^2+z^2+t^2) - (x+y+z-t)^2 = 0$ *. Alors il existe un unique cercle* C_4 *tel que* C_1, C_2, C_3 *soient tangents intérieurement à* C_4 *, il a pour rayon* $d := \frac{1}{t}$.

4.2. *Si* $2(x^2+y^2+z^2) - (x+y+z)^2 \geq 0$ *, alors il n'existe pas de cercle* C_4 *tel que* C_1, C_2, C_3 *soient tangents intérieurement à* C_4 *.*

Remarque 1 Bien entendu 3.1 et 3.2 sont une réciproque de 1. ; 4.1 et 4.2 sont une réciproque de 2 .

Remarque 2 Si quatre cercles du plan E sont une tangents deux à deux, alors on peut les indexer en C_1, C_2, C_3, C_4 , de façon que la configuration satisfasse les hypothèses de 1. ou de 2. .

Démonstration

1) Montrons 1. .

Les hypothèses de 1. donnent la configuration ci-contre (*fig.* 6) en notant p_{ij} le point de tangence de C_i et C_j pour $i \neq j$. Soit θ_1 une mesure de l'angle $\widehat{o_1 - o_4, o_2 - o_4}$, alors on a ([Fr. MMG] , C.2.1.1. p. 180 version 1996, p. 185 version 2010)

$$\cos\theta_1 = \frac{(a+d)^2 + (b+d)^2 - (a+b)^2}{2\,(a+d)(b+d)}.$$

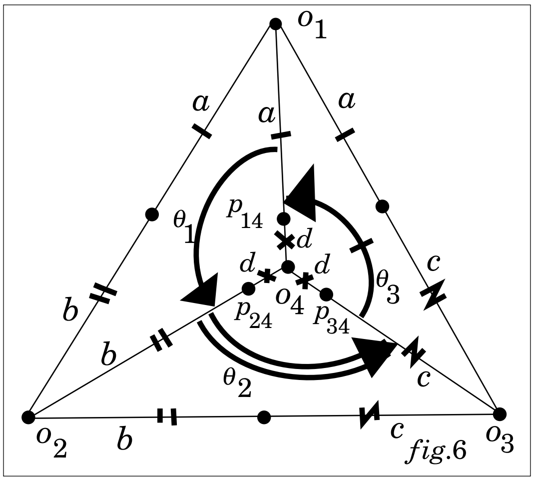

*fig.*6

Si donc $x := \frac{1}{a}$, $y := \frac{1}{b}$, $z := \frac{1}{c}$, $t := \frac{1}{d}$, cela s'écrit $\cos\theta_1 = \frac{t\,(x+y) + xy - t^2}{(x+t)(y+t)}$. De même si θ_2 (resp. θ_3) est une mesure de l'angle $\widehat{o_2 - o_4, o_3 - o_4}$ (resp. $\widehat{o_3 - o_4, o_1 - o_4}$) , on aura $\cos\theta_2 = \frac{t\,(y+z) + yz - t^2}{(y+t)(z+t)}$, $\cos\theta_3 = \frac{t\,(z+x) + zx - t^2}{(z+t)(x+t)}$. Sachant que $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \equiv 0 \text{ modulo } 2\pi\mathbb{Z}$, le lemme ci-après dit que $(\cos\theta_1)^2 + (\cos\theta_2)^2 + (\cos\theta_3)^2 = 1 + 2\cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3$. Cela se traduit par

$$(\frac{t(y+z)+yz-t^2}{(y+t)(z+t)})^2+(\frac{t(y+z)+yz-t^2}{(y+t)(z+t)})^2+(\frac{t(z+x)+zx-t^2}{(z+t)(x+t)})^2=1+$$
$$2(\frac{t(y+z)+yz-t^2}{(y+t)(z+t)})(\frac{t(y+z)+yz-t^2}{(y+t)(z+t)})(\frac{t(z+x)+zx-t^2}{(z+t)(x+t)}).$$

En multipliant les deux membres par $(x+t)^2(y+t)^2(z+t)^2$, on obtient la relation $P(x,y,z,t)=0$ avec

$P(X,Y,Z,T):=(T(X+Y)+XY-T^2)^2(Z+T)^2+$

$(T(Y+Z)+YZ-T^2)^2(X+T)^2+(T(Z+X)+ZX-T^2)^2(Y+T)^2-$

$(X+T)^2(Y+T)^2(Z+T)^2-$

$2(T(X+Y)+XY-T^2)(T(Y+Z)+YZ-T^2)(T(Z+X)+ZX-T^2)$ **.**

Alors un calcul de $P(X,Y,Z,T)$ (soulagé par Maple et aussi par mon collègue **Arnaud Jehanne**) dit que

$P(X,Y,Z,T)=T^4(2(X^2+Y^2+Z^2+T^2)-(X+Y+Z+T)^2)$.

Ainsi les élements $x>0$, $y>0$, $z>0$, $t>0$ tels que $P(x,y,z,t)=0$ sont les éléments $x>0$, $y>0$, $z>0$, $t>0$ avec

$2(x^2+y^2+z^2+t^2)-(x+y+z+t)^2=0$. Cela montre bien **1.** .

2) Montrons **2.** .

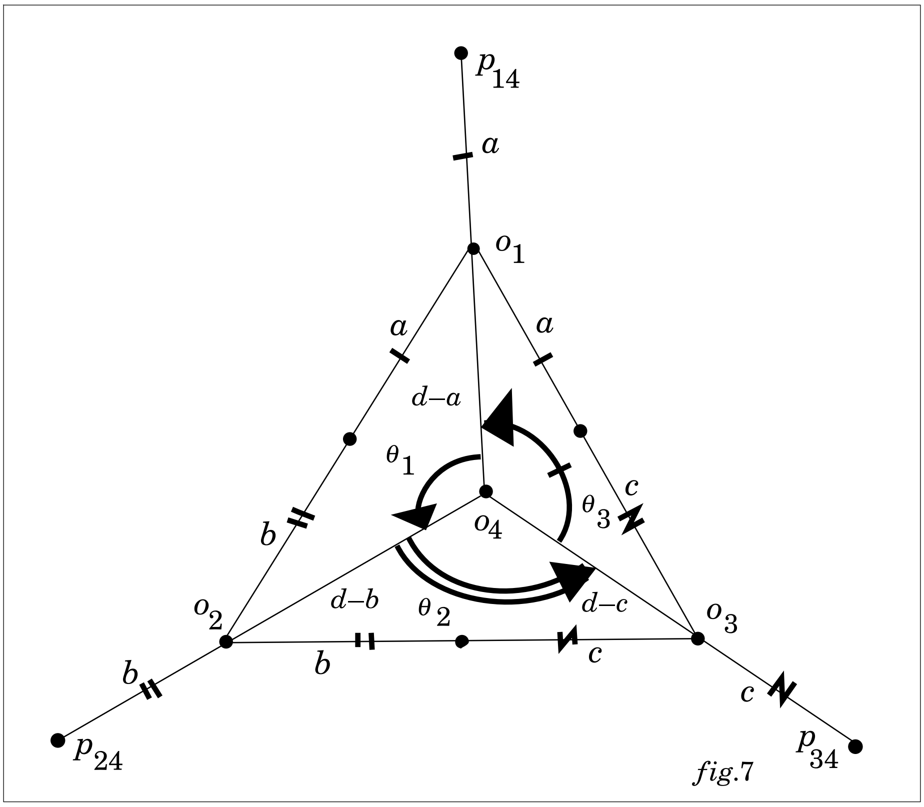

*fig.*7

Les hypothèses de 2. donnent la configuration ci-dessus (*fig.*7) en notant p_{ij} le point de tangence de C_i et C_j pour $i\neq j$. Soit θ_1 une mesure de l'angle $\widehat{o_1-o_4, o_2-o_4}$, alors on a ([Fr. MMG] , C.2.1.1. p. 180 version 1996, p. 185 version 2010) $\cos\theta_1=\frac{(d-a)^2+(d-b)^2-(a+b)^2}{2(d-a)(d-b)}$.

Si donc $x:=\frac{1}{a}$, $y:=\frac{1}{b}$, $z:=\frac{1}{c}$, $t:=\frac{1}{d}$, cela s'écrit $\cos\theta_1=\frac{-t(x+y)+xy-t^2}{(x-t)(y-t)}$.

De même si θ_2 (resp. θ_3) est une mesure de l'angle $\widehat{o_2-o_4, o_3-o_4}$ (resp. $\widehat{o_3-o_4, o_1-o_4}$), on aura $\cos\theta_2 = \frac{-t(y+z)+yz-t^2}{(y-t)(z-t)}$, $\cos\theta_3 = \frac{-t(z+x)+zx-t^2}{(z-t)(x-t)}$. Sachant que $\theta_1+\theta_2+\theta_3 \equiv 0 \text{ modulo } 2\pi\mathbb{Z}$, le lemme ci-après dit que
$(\cos\theta_1)^2+(\cos\theta_2)^2+(\cos\theta_3)^2 = 1+2\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3$. Cela se traduit par
$$\left(\frac{-t(y+z)+yz-t^2}{(y-t)(z-t)}\right)^2+\left(\frac{-t(y+z)+yz-t^2}{(y-t)(z-t)}\right)^2+\left(\frac{-t(z+x)+zx-t^2}{(z-t)(x-t)}\right)^2=1+$$
$$2\left(\frac{-t(y+z)+yz-t^2}{(y-t)(z-t)}\right)\left(\frac{-t(y+z)+yz-t^2}{(y-t)(z-t)}\right)\left(\frac{-t(z+x)+zx-t^2}{(z-t)(x-t)}\right).$$
En multipliant les deux membres par $(x-t)^2(y-t)^2(z-t)^2$, on obtient la relation $P(x,y,z,-t)=0$ où le polynôme $P(X,Y,Z,T)$ a été défini en 1). Ainsi les éléments $x>0$, $y>0$, $z>0$, $t>0$ tels que $P(x,y,z,-t)=0$ sont les éléments $x>0$, $y>0$, $z>0$, $t>0$ avec
$2(x^2+y^2+z^2+t^2)-(x+y+z-t)^2=0$. Cela montre bien 2..

3) Montrons 3..

Soient $x,y,z\in\mathbb{R}$, $x>0, y>0, z>0$,
$Q(T) := T^2-2(x+y+z)T+2(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2$. Le discriminant de $Q(T)$ est $(x+y+z)^2-2(x^2+y^2+z^2)+(x+y+z)^2=4(xy+yz+zx)>0$, alors $Q(T)$ admet toujours deux racines réelles.

3.1) Si $2(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2<0$, alors $Q(T)$ admet une seule racine réelle t avec $t>0$ et donc $2(x^2+y^2+z^2+t^2)-(x+y+z+t)^2=0$. Soient $a:=\frac{1}{x}, b:=\frac{1}{y}, c:=\frac{1}{z}, d:=\frac{1}{t}$. Sachant que
$P(x,y,z,t)=t^4(2(x^2+y^2+z^2+t^2)-(x+y+z+t)^2)$, on a $P(x,y,z,t)=0$ et alors les calculs menés en 1) disent que
$(u_1)^2+(u_2)^2+(u_3)^2=1+2u_1u_2u_3$ si
$$u_1 := \frac{(a+d)^2+(b+d)^2-(a+b)^2}{2(a+d)(b+d)},\ u_2 := \frac{(b+d)^2+(c+d)^2-(b+c)^2}{2(b+d)(c+d)},$$
$$u_3 := \frac{(c+d)^2+(a+d)^2-(c+a)^2}{2(c+d)(a+d)}.$$
Il est facile de montrer que $|u_i|<1$ pour $1\le i\le 3$. Alors le lemme ci-après dit qu'il existe $\mu_i\in\mathbb{R}$ avec $\mu_1+\mu_2+\mu_3\equiv 0 \text{ modulo } 2\pi\mathbb{Z}$ et $\cos\mu_i=u_i$ pour $1\le i\le 3$.

Il existe $o_1,o_2,o_3\in E$ avec $\|o_1-o_4\|=a+d$, $\|o_2-o_4\|=b+d$, $\|o_1-o_2\|=a+b$ parce que $a+d, b+d, a+b$ satisfont les inégalités triangulaires convenables ([Fr. MMG] , C.5.2.2. p. 190 version 1996, p. 194 version 2010)). avec en plus $\text{mes } \widehat{o_1-o_4, o_2-o_4} \equiv \mu_1 \text{ modulo } 2\pi\mathbb{Z}$ ([Fr. MMG] , C.2.1.1. p. 180 version 1996, p. 185 version 2010). Ensuite il existe o_3 avec $\|o_3-o_4\|=c+d$ et ([Fr. MMG] , C.2.1.1. p. 180 version 1996, p. 185 version 2010) $\text{mes } \widehat{o_2-o_4, o_3-o_4}\equiv\mu_1 \text{ modulo } 2\pi\mathbb{Z}$. Comme $\mu_1+\mu_2+\mu_3\equiv 0 \text{ modulo } 2\pi\mathbb{Z}$, il suit de cela que $\text{mes } \widehat{o_3-o_4, o_1-o_4}\equiv\mu_3 \text{ modulo } 2\pi\mathbb{Z}$. Alors les formules

$\cos\mu_3 = \dfrac{\|o_4-o_3\|^2+\|o_4-o_1\|^2-\|o_3-o_1\|^2}{2\|o_4-o_3\|\,\|o_4-o_1\|}$ et

$u_3 := \dfrac{(c+d)^2+(a+d)^2-(c+a)^2}{2\,(c+d)(a+d)}$. avec $\|o_3-o_4\| = c+d$, $\|o_1-o_4\| = a+d$ impliquent que $\|o_3-o_1\| = c+a$. Ainsi, on est en présence de quatre cercles de centre o_1 (resp. o_2, o_3, o_4) et de rayons a (resp. b,c,d) qui sont tangents deux à deux extérieurement.

3.2) Si $2(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2>0$, cela veut dire que le produit des racines de $Q(T)$ est positif et comme la somme des racines est $2(x+y+z)>0$, le polynôme $Q(T)$ admet deux racines positives distinctes t et t' (puique le discriminant de $Q(T)$ n'est pas nul). Alors la méthode utilisée en 3.1) permet de construire quatre cercles C_1,C_2,C_3,C_4 de rayons $a:=\frac{1}{x}$, $b:=\frac{1}{y}$, $c:=\frac{1}{z}$, $d:=\frac{1}{t}$ avec C_1,C_2,C_3,C_4 tangents extérieurement deux à deux, et il existe aussi un cercle C'_4 de rayon $d':=\frac{1}{t'}$ qui est tangent extérieurement à C_1,C_2,C_3.

4) Soient $x,y,z\in\mathbb{R}$, $x>0, y>0, z>0$,
$R(T) := T^2+2(x+y+z)\,T+2(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2$. Facilement le discriminant de ce polynôme est strictement positif, la somme des racines est négative.

4.1) Si $2(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2<0$ le polynôme $R(T)$ aura une racine exactement une racine positive.

Supposons $x\le y\le z$ et $2(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2<0$ et soit t la racine positive de $R(T)$, il s'agit de montrer que $t<x$. En effet la fonction $\theta\mapsto R(\theta)$ est croissante sur $]0,+\infty[$ et $R(x)=4x^2+(y-z)^2>0$, il suit de cela que $R(t)=0$ implique $t<x$.

Soient $a:=\frac{1}{x}$, $b:=\frac{1}{y}$, $c:=\frac{1}{z}$, $d:=\frac{1}{t}$, on a donc $a<d$, $b<d$, $c<d$. Soit
$u_1 := \dfrac{(d-a)^2+(d-b)^2-(a+b)^2}{2\,(d-a)(d-b)}$, $u_2 := \dfrac{(d-b)^2+(d-c)^2-(b+c)^2}{2\,(d-b)(d-c)}$,
$u_3 := \dfrac{(d-c)^2+(d-a)^2-(c+a)^2}{2\,(d-c)(d-ap)}$.

Comme $R(t)=0$, veut dire que $P(x,y,z,-t)=0$, il suit des calculs menés en 2) que $(u_1)^2+(u_2)^2+(u_3)^2=1+2\,u_1u_2u_3$. Facilement $|u_i|<1$ pour $1\le i\le 3$, alors le lemme ci-après dit qu'il existe $\mu_i\in\mathbb{R}$ avec
$\mu_1+\mu_2+\mu_3 \equiv 0 \,\mathrm{modulo}\, 2\pi\mathbb{Z}$ et $\cos\mu_i=u_i$ pour $1\le i\le 3$.

Alors la méthode utilisée en 3.1) permet de construire $o_1,o_2,o_3,o_4\in E$ avec $\|o_1-o_4\|=d-a$, $\|o_2-o_4\|=d-b$, $\|o_3-o_4\|=d-c$, $\|o_1-o_2\|=a+b$, $\|o_2-o_3\|=b+c$, $\|o_3-o_1\|=c+a$. Soient C_1 (resp. C_2,C_3,C_4) le cercle de centre o_1 (resp. o_2,o_3,o_4) et de rayon a (resp. b,c,d). Alors ces quatre cercles satisfont 4.1. .

4.2) Si $2(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2>0$, les racines du polynôme $R(T)$ seront négatives, ce qui veut bien dire qu'il n'existe pas de cercle C_4 tel que C_1, C_2, C_3 soient tangents intérieurement à C_4 .

Lemme (une relation sur les cosinus)
1. *Soient* $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathbb{R}$ *avec* $\theta_1+\theta_2+\theta_3 \equiv 0 \text{ modulo } 2\pi\mathbb{Z}$ *, alors on a* $(\cos\theta_1)^2+(\cos\theta_2)^2+(\cos\theta_3)^2 = 1+2\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3$.
2. *Soient* $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}$ *avec* $|u_i|<1$ *pour* $1 \leq i \leq 3$ *et* $(u_1)^2+(u_2)^2+(u_3)^2 = 1+2u_1u_2u_3$ *. Alors il existe* $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}$ *avec* $\mu_1+\mu_2+\mu_3 \equiv 0 \text{ modulo } 2\pi\mathbb{Z}$ *et* $u_i = \cos\mu_i$ *pour* $1 \leq i \leq 3$ *. De plus si* $\mu'_1, \mu'_2, \mu'_3 \in \mathbb{R}$ *avec* $\mu'_1+\mu'_2+\mu'_3 \equiv 0 \text{ modulo } 2\pi\mathbb{Z}$ *et* $u_i = \cos\mu'_i$ *pour* $1 \leq i \leq 3$ *, alors on a* $\mu'_i \equiv \mu_i \text{ modulo } 2\pi\mathbb{Z}$ *pour* $1 \leq i \leq 3$ *ou* $\mu'_i \equiv -\mu_i \text{ modulo } 2\pi\mathbb{Z}$ *pour* $1 \leq i \leq 3$.

Démonstration
1) Montrons 1. . On suppose que $\theta_1+\theta_2+\theta_3 \equiv 0 \text{ modulo } 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\cos\theta_3 = \cos(\theta_1+\theta_2) = \cos_1\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2$ et donc
$(\cos\theta_3-\cos\theta_1\cos\theta_2)^2 = (\sin\theta_1)^2\,(\sin\theta_2)^2 = (1-(\cos\theta_1)^2)(1-(\cos\theta_2)^2)$
et la relation $(\cos\theta_1)^2+(\cos\theta_2)^2+(\cos\theta_3)^2 = 1+2\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3$ suit.
2) Montrons 2. . Soit $v_i \in \mathbb{R}$ avec $\cos v_i = u_i$ pour $1 \leq i \leq 3$. La relation $(u_1)^2+(u_2)^2+(u_3)^2 = 1+2u_1u_2u_3$ s'écrit aussi
$(u_3-u_1u_2)^2 = (1-u_1)^2)(1-(u_2)^2)$, et donc
$(\cos v_3-\cos v_1\cos v_2)^2 = (1-(\cos v_1)^2)(1-(\cos v_2)^2)$.
Soit donc $(\cos v_3-\cos v_1\cos v_2)^2 = (\sin v_1)^2(\sin v_2)^2$; alors il existe $\varepsilon_2 \in \{\pm 1\}$ unique tel que $\cos v_3 - \cos v_1\cos(\varepsilon_2 v_2) = \sin v_1 \sin(\varepsilon_2 v_2)$. Cela s'écrit aussi $\cos v_3 = \cos(v_1+\varepsilon_2 v_2)$. Alors il existe $\varepsilon_3 \in \{\pm 1\}$ unique tel $v_1+\varepsilon_2 v_2+\varepsilon_3 v_3 \equiv 0$ modulo $2\pi\mathbb{Z}$. Alors $\mu_1 := v_1$, $\mu_2 := \varepsilon_2 v_2$, $\mu_3 := \varepsilon_3 v_3$ convient. Sachant que μ_1 étant fixé modulo $2\pi\mathbb{Z}$, alors μ_2, μ_3 sont uniques modulo $2\pi\mathbb{Z}$; cela termine la démonstration de 2. .

Bibliographie

[Co.] **Coxeter H. S. M.** *The problem of Appolonius* American Mathermatical Monthly, vol. 75, n° 1 jan. 1968 pp. 5-15
[De.] **Descartes R** *Œuvres,* Publiées par C. Adam et P. Tannery, vol4, Paris 1901
[Fr. MMG] **Fresnel J** *Méthodes modernes en géométrie* (Hermann 1996 , 2010)

queſtions particulieres. Car il me ſemble que le ſurplus, qui conſiſte à chercher la conſtruction & la demonſtration par les propoſitions d'Euclide, en cachant le proceder de l'Algebre, n'eſt qu'vn amuſement pour les petits Geometres, qui ne requiert pas beaucoup d'eſprit ny de ſcience. Mais lors qu'on a quelque queſtion qu'on veut acheuer, pour en faire vn Theoreme qui ſerue de regle generale pour en ſoudre pluſieurs autres ſemblables, il eſt beſoin de retenir iuſques à la fin toutes les meſmes lettres qu'on a poſées au commencement; ou bien, ſi on en change quelques-vnes pour faciliter le calcul, il les faut remettre par apres, eſtant à la fin, à cauſe qu'ordinairement pluſieurs s'effacent l'vne contre l'autre, ce qui ne ſe peut voir, lors qu'on les a changées.

Il eſt bon auſſi alors d'obſeruer que les quantitez, qu'on denomme par les lettres, ayent ſemblable rapport les vnes aux autres, le plus qu'il eſt poſſible; cela rend le Theoreme plus beau & plus court, pour ce que ce qui s'enonce de l'vne de ces quantitez, s'enonce en meſme façon des autres, & empeſche qu'on ne puiſſe faillir au calcul, pour ce que les lettres qui ſignifient des quantitez qui ont meſme rapport, s'y doiuent trouuer diſtribuées en meſme façon; & quand cela manque, on reconnoiſt ſon erreur.

Ainſi, pour trouuer vn Theoreme qui enſeigne quel eſt le rayon du cercle, qui touche les trois donnez par poſition, il ne faudroit pas, en cét exemple, poſer les trois lettres *a, b, c,* pour les lignes AD, DC, | DB, mais pour les lignes AB, AC & BC, pour ce que ces dernieres ont meſme rapport l'vne que l'autre aux

extrait d'une lettre de Descartes à la Princesse de Bohême