Bordeaux, le 24/07/2006, Jean Fresnel

La géométrie du plan quadratique

0. Introduction

Un plan affine quadratique est un plan affine attaché à un plan vectoriel quadratique (T, q) non dégénéré ; c'est bien entendu le cas du plan affine euclidien. Beaucoup de notions associées au plan affine euclidien se retrouvent dans le plan affine quadratique. Rappelons qu'un plan vectoriel quadratique non dégénéré est soit défini, soit hyperbolique et qu'après extension des scalaires il est toujours hyperbolique. Cela veut dire que le plan affine hyperbolique est donc le plus "naturel".

Tout comme dans le cas euclidien la notion d'angle est associée au groupe spécial orthogonal. Dans notre cas ce groupe est bien commutatif, mais il n'agit pas transitivement sur les droites vectorielles ; c'est un groupe plus gros noté H qui agit transitivement et fidèlement sur les droites vectorielles non isotropes ; i.e. toutes les droites sauf deux si le plan est hyperbolique, ou toutes les droites s'il est défini. Cela conduit à la notion d'angle de droites vectorielles non isotropes et à celle de groupe des angles de droites qui est isomorphe à $\frac{H}{\{\pm \mathbb{1}\}}$; en revanche si le corps n'est pas ordonné, il n'y a pas de demi-droites. Il suit aussi de cela que la notion de bissectrice d'un angle apparaîtra lorsque l'élément correspondant de $\frac{H}{\{\pm \mathbb{1}\}}$ sera un carré.

Tout comme on interprète le plan euclidien, les automorphismes orthogonaux et les similitudes avec le corps des nombres complexes, i.e. l'extension quadratique de $\mathbb{R}$ qui rend le plan euclidien hyperbolique après extension des scalaires, de même pour le plan quadratique défini il existe un corps, extension de degré 2 avec les mêmes propriétés et pour le plan hyperbolique, c'est une algèbre de dimension 2 comme espace vectoriel qui joue ce rôle, sachant que les diviseurs de zéro correspondent aux droites isotropes.

Aux cercles du plan affine correspondent des coniques à centre reliées à la forme quadratique q sur T. Dans le complété projectif, après extension des scalaires, le complété projectif de chacune ces coniques passe par deux points de la droite à l'infini qui ne sont autres que les images des droites isotropes qui apparaîssent par extension des scalaires ; ce sont l'équivalent des fameux points cycliques de la situation euclidienne.

Tout cela conduit à trois remarques.

D'abord il est vraisemblable que toute configuration du plan euclidien faisant intervenir droites et cercles doit exister pour les coniques associées à un plan affine quadratique ; les obstructions à cela proviendraient de la caractéristique du corps de base et éventuellement de problèmes de rationalité, disons que la configuration devra exister après une éventuelle extension des scalaires.

Seconde remarque, pour étudier une configuration du plan affine concernant des coniques à centre dont le complété projectif intersecte la droite à l'infini en les mêmes points, après extension des scalaires, on remarque d'abord que ces coniques sont définies à partir d'une même forme quadratique q non dégénérée sur T. On munit alors le plan affine de la structure quadratique associée à q et on peut alors utiliser les outils du plan affine quadratique.

En troisième remarque, il résulte de ces considérations que les configurations en géométrie euclidienne n'utilisent pas le fait (un peu exceptionnel) que la racine carrée de la forme quadratique est une norme.

Dans tout ce qui suit, k est un corps commutatif avec $\operatorname{car} k \neq 2$, T un plan vectoriel sur k, q une forme quadratique non dégénérée sur T, (e, e') une base orthogonale de (T, q). Soient K la clôture algébrique k, $T_K := K e \oplus K e' \simeq T \otimes_k K$, q_K la forme quadratique sur T_K définie par $q_K(e) = q(e)$, $q_K(e') = q(e')$, $\hat{q}_K(e, e') = 0$ où $\hat{q}_K$ est la forme polaire associée à q_K.

1. Le groupe orthogonal de (T, q)

Soit $u \in G\ell(T)$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) On a $u \in SO(T)$ (resp. $u \in O(T) - SO(T)$),

ii) $\operatorname{Mat}(u; e, e') = \begin{bmatrix} x & -\alpha y \\ y & x \end{bmatrix}$ (resp. $\operatorname{Mat}(u; e, e') = \begin{bmatrix} x & \alpha y \\ y & -x \end{bmatrix}$) avec $x, y \in k$, $q(e)\, x^2 + q(e')\, y^2 = q(e)$ et $\alpha := \frac{q(e')}{q(e)}$.

2. Le groupe orthogonal de (T_K, q_K)

Soit $u \in G\ell(T_K)$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) On a $u \in SO(T_K)$ (resp. $u \in O(T_K) - SO(T_K)$), *ii)* $\mathrm{Mat}(u;e,e')=\begin{bmatrix} x & -\alpha y \\ y & x \end{bmatrix}$ (resp. $\mathrm{Mat}(u;e,e')=\begin{bmatrix} x & \alpha y \\ y & -x \end{bmatrix}$) avec $x,y\in K$, $q(e)\,x^2+q(e')\,y^2=q(e)$ et $\alpha:=\frac{q(e')}{q(e)}$.

3. Le groupe des angles de droites

3.1. Le sous-groupe H Soient $\mathfrak{D}$ l'ensemble des droites non isotropes de (T,q) , $\mathfrak{D}_K$ l'ensemble des droites Ke de T_K où $e\in T-\{0\}$.

Lemme *Soit* $u\in SO(T_K)$, $e\in T-\{0\}$ *, non isotrope,* $e'\in T$ *de façon que* (e,e') *soit une base orthogonale de* (T,q) *alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*
i) On a $u(Ke)\in\mathfrak{D}_K$,
ii) on a $\mathrm{Mat}(u;e,e')=\begin{bmatrix} x & -\alpha y \\ y & x \end{bmatrix}$ *et il existe* $\theta\in K^\times$ *avec* $\theta x,\theta y\in k$ *et* $\theta^2\in k$,
iii) on a $u^2\in SO(T)$.

Définition Soit $H:=\{\,u\in SO(T_K)\mid u(Ke)\in\mathfrak{D}_K\}$, on a donc $H=\{\,u\in SO(T_K)\mid u^2\in SO(T)\,\}$, ainsi H est un sous-groupe de $SO(T_K)$ et de plus on a $H=\{\,u\in SO(T_K)\mid u(\mathfrak{D}_K)=\mathfrak{D}_K\}$ et H opère transitivement et fidèlement sur $\mathfrak{D}_K$.

Remarque Soient $\mu\in k^\times$, $\mathfrak{Q}_\mu:=\{\,t\in T\mid q(t)=\mu\,\}$, alors $SO(T)$ opère transitivement et fidèlement sur $\mathfrak{Q}_\mu$.

3.2. Les angles de droites.
Soient toujours $\mathfrak{D}$ l'ensemble des droites non isotropes de T . Si $D=ke$ est élément de $\mathfrak{D}$, on note $\mathfrak{D}_K$ la droite de T_K définie par $D_K:=Ke$. Sur $\mathfrak{D}\times\mathfrak{D}$ on définit une relation d'équivalence $\mathfrak{R}$ par $(D,D')\,\mathfrak{R}\,(\Delta,\Delta')$ si et seulement si il existe $u\in H$ tel que $u(D_K)=\Delta_K$ et $u(D'_K)=\Delta'_K$. Alors $\mathcal{A}:=\frac{\mathfrak{D}\times\mathfrak{D}}{\mathfrak{R}}$ s'appelle l'ensemble des angles de couples de droites de $\mathfrak{D}$ et l'image de (D,D') se note $\widehat{D,D'}$.

3.3. Le groupe des angles de droites
Soit $D\in\mathfrak{D}$. Si $u\in H$, alors il existe $D'\in\mathfrak{D}$, unique tel que $u(D_K)=D'_K$; soit alors $\varphi(u):=\widehat{D,D'}$. Facilement φ induit une bijection $\rho:\frac{H}{\{\pm 1\}}\longrightarrow\mathcal{A}$ qui est

indépendante de D . Il suit que ρ induit sur $\mathcal{A}$ la structure du groupe abélien $\frac{H}{\{\pm \mathbb{1}\}}$ qui sera notée additivement. En particulier, on a
$\widehat{D_1,D_2} + \widehat{D_2,D_3} = \widehat{D_1,D_3}$, $\widehat{D_1,D_1} = 0$, $\widehat{D_1,D_2} = -\widehat{D_2,D_1}$, $\widehat{D_1,D_2} = \widehat{u(D_1),u(D_2)}$ si $u \in SO(T)$ et $\widehat{D_1,D_2} = -\widehat{u(D_1),u(D_2)}$ si $u \in O(T) - SO(T)$.

Remarque Si le corps k n'est pas ordonné, il n'y a pas de notion de demi-droite.

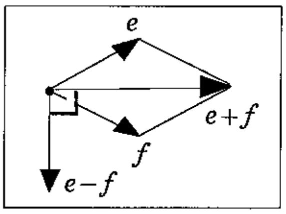
4. Les droites orthogonales *Soient $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites vectorielles, non isotropes de T , $D, D' \in \mathcal{D}$, $u \in H$ tel que $D'_K = u(D_K)$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*
i) On a $u^2 = -\mathbb{1}_T$,
ii) les droites D et D' sont orthogonales relativement à q .

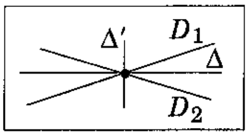
Démonstration i) implique ii) On a $D = ke$, soit $\alpha := \hat{q}(e, u(e))$, alors on a $\alpha = \hat{q}(u(e), u^2(e))$, soit donc $\alpha = \hat{q}(u(e), -e)$; il résulte que $\alpha = 0$ parce que car $k \neq 2$. Donc D et D' sont orthogonales.
ii) implique i) Si $\hat{q}(u(e), e) = 0$, alors $\hat{q}(u^2(e), u(e)) = 0$, ainsi $u^2(e) = \lambda e$ et en appliquant q , on obtient $\lambda^2 = 1$. On a donc
$\mathrm{Mat}(u;\, e, u(e)) = \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $u \in SO(T_K)$ implique $\lambda = -1$. Ainsi $u^2(e) = -e$, et aussi $u^2(u(e)) = -u(e)$; ce qui veut dire que $u^2 = -\mathbb{1}_T$.

5. Les bissectrices de l'angle $\widehat{D_1,D_2}$

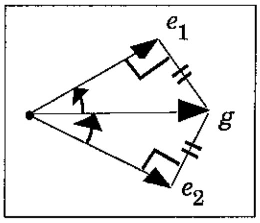
5.0. Définition Soient $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites vectorielles, non isotropes de T , $D, D' \in \mathcal{D}$, on dit que $\Delta \in \mathcal{D}$ est *bissectrice de D et D'* si $\widehat{D,\Delta} = \widehat{\Delta,D'}$.

5.1. *Soient $D, D' \in \mathcal{D}$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*
i) Les droites D et D' admettent une bissectrice $\Delta \in \mathcal{D}$,
ii) on a $q(D) = q(D')$.
Si ces conditions sont réalisées, on a $D = ke$, $D' = ke'$ avec $q(e) = q(e')$ et alors $k(e+e')$ et $k(e-e')$ sont les bissectrices de D et D' et elles sont orthogonales. Par ailleurs il existe $u \in SO(T)$ tel que $u(e) = e'$, soit $v \in H$ (resp. $w \in H$) *tel que $v^2 = u$* (resp. $w^2 = -u$) *; alors $Kv(e) = K(e+e')$* (resp. $Kw(e) = K(e-e')$).





5.2. Soient $\mathfrak{D}$ l'ensemble des droites vectorielles, non isotropes de T, $D_1, D_2 \in \mathfrak{D}$, alors $\Delta \in \mathfrak{D}$ est bissectrice de D_1 et D_2 si et seulement si $\sigma_\Delta(D_1) = D_2$ où σ_Δ est la symétrie orthogonale de droite Δ.



5.3. Soient $g \in T - \{0\}$, $e_i \in D_i$ de façon que $\hat{q}(g - e_i, e_i) = 0$ pour $i = 1, 2$.
Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.
i) La droite kg est bissectrice de D_1 et D_2,
ii) on a $q(g - e_1) = q(g - e_2)$.

Démonstration

1) Il s'agit de montrer 5.1..

1.1) Montrons *i)* implique *ii)* Il existe donc $u \in H$ tel que $u(D_K) = \Delta_K$ et $u(\Delta_K) = D'_K$, il suit de cela que $u^2(D_K) = D'_K$. Or si $u \in H$, on sait que $u^2 \in SO(T)$, ainsi $u^2(D) = D'$, ce qui implique $q(D) = q(D')$.

1.2) Montrons *ii)* implique *i)* On a $q(D) = q(D')$, ce qui veut dire que $D = ke$ et $D' = ke'$ avec $q(e) = q(e')$. Il existe donc $u \in SO(T)$ tel que $u(e) = e'$, soit $v \in SO(T_K)$ tel que $v^2 = u$. On a donc $v \in H$, ce qui implique que $v(Ke) = \Delta_K$ où $\Delta \in \mathfrak{D}$, en plus on a $v(\Delta_K) = D'_K$; ce qui montre que Δ est bissectrice de D et D'.

1.3) Si ces conditions sont réalisées, on a $D = ke$, $D' = ke'$ avec $q(e) = q(e')$, il suit d'abord que $\hat{q}(e + e', e - e') = 0$. Soit $u \in SO(T)$ tel que $u(e) = e'$, et $v \in H$ (resp. $w \in H$) tel que $v^2 = u$ (resp. $w^2 = -u$) ; alors
$\hat{q}(v(e), e - e') = \hat{q}(v(e), e) - \hat{q}(v(e), v^2(e)) = 0$, cela montre que $Kv(e) = K(e + e')$. on montre de même que $Kw(e) = K(e - e')$.

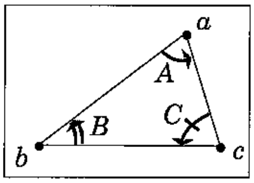
2) Il s'agit de montrer 5.2.. On suppose toujours que $D_1 = ke$ et $D_2 = kf$ avec $q(e) = q(f)$. Soit σ une symétrie orthogonale telle que $\sigma(D_1) = D_2$; on a donc $\sigma(e) = f$ ou $\sigma(e) = -f$. Supposons $\sigma(e) = f$, alors on a aussi $\sigma(f) = e$ et donc $\sigma(e + f) = e + f$, cela veut dire que σ est une symétrie orthogonale de droite $k(e + f)$. Si $\sigma(e) = -f$ on déduit de même que σ est une symétrie orthogonale de droite $k(e - f)$.

3) Il s'agit de montrer 5.3.. Montrons que *ii)* implique *i)*. Des formules $g = e_1 + (g - e_1)$, $g = e_2 + (g - e_2)$ et $q(g - e_1) = q(g - e_2)$ on déduit facilement que $q(e_1) = q(e_2)$ et alors aussi que $\hat{q}(g, e_1 - e_2) = 0$. Par ailleurs $q(e_1) = q(e_2)$ implique $\hat{q}(e_1 + e_2, e_1 - e_2) = 0$; ainsi $kg = k(e_1 + e_2)$ et alors 3.3. montre que kg est bissectrice de D_1 et D_2.

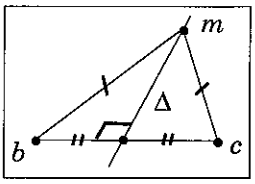
Montrons *i)* implique *ii)*. Soit σ la symétrie orthogonale telle que $\sigma(g)=g$. Soit $e_1 \in D_1$ tel que $\hat{q}(g-e_1, e_1)=0$, alors $\hat{q}(\sigma(g-e_1), \sigma(e_1))=0$, soit $\hat{q}(g-\sigma(e_1)), \sigma(e_1))=0$, ce qui veut dire que $e_2=\sigma(e_1)$ en utilisant 5.2., il suit donc de cela que $q(g-e_1)=q(g-e_2)$.

6. Angles et bissectrices de droites du plan affine quadratique

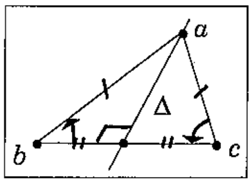
6.1. Définition Soient toujours k un corps commutatif avec $\operatorname{car} k \neq 2$, T un plan vectoriel sur k, q une forme quadratique non dégénérée sur T. Soit $E=o+T$, l'espace affine de direction T. Si D et D' sont deux droites affines de E dont les directions ne sont pas isotropes, on appelle angle de D et D' et on le note $\widehat{D,D'}$, l'angle de la direction de D et de la direction de D'. Si D et D' sont deux droites affines de E qui se coupent en un point a et dont les directions ne sont pas isotropes, on appelle bissectrice de D et D' toute droite de E pasant par a et dont la direction est celle d'une bissectrice de la direction de D et D'.



6.2. Lemme *(la somme des angles d'un triangle) Soit (a,b,c) un triangle de E tel que les directions de $V(a,b), V(b,c), V(c,a)$ ne soient pas isotropes. Alors on a* $\widehat{V(a,b),V(a,c)}+\widehat{V(c,a),V(c,b)}+\widehat{V(b,c),V(b,a)}=0$.



6.3. Lemme *(la médiatrice) Soient $b,c \in E$ de façon que $c-b$ ne soit pas isotrope, $\Delta := \{ m \in E \mid q(m-b)=q(m-c) \}$. Alors $\Delta=\frac{b+c}{2}+(b-c)^{\perp}$.* La droite Δ s'appelle la *médiatrice de b et c. Soit (a,b,c) un triangle de E tel que les directions de $V(a,b), V(b,c), V(c,a)$ ne soient pas isotropes, alors les médiatrices de* a et b, b et c, c et a *sont concourantes.*



6.4. Lemme *(le triangle isocèle) Soit (a,b,c) un triangle de E tel que les directions de $V(a,b), V(b,c), V(c,a)$ ne soient pas isotropes. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

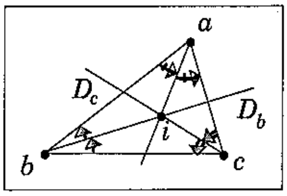
i) On a $q(a-b)=q(a-c)$,

ii) le point a est sur la médiatrice Δ de b et c,

iii) on a $\widehat{V(b,c),V(b,a)}=\widehat{V(c,a),V(c,b)}$.

Démonstration L'équivalence $i)$ et $ii)$ résulte de 6.3. .
On suppose $ii)$ satisfait, soit σ la symétrie orthogonale de droite Δ , alors on a $\sigma(a)=a$, $\sigma(b)=c$, $\sigma(c)=b$. Ce qui montre $iii)$.
On suppose $iii)$ satisfait. Facilement la droite $V(b,a)$ coupe Δ en un point a' . En appliquant σ on a donc $\widehat{V(c,a),V(c,b)}=\widehat{V(c,a'),V(c,b)}$, ainsi $V(c,a)=V(c,a')$. On a $a'\in V(b,a)\cap V(c,a)$, ce qui montre que $a=a''$. Alors 6.3. montre que $q(a-b)=q(a-c)$.

6.5. Lemme (*les bissectrices d'un triangle sont concourantes*)



Soit (a,b,c) *un triangle de* E , i.e. *un repère affine de* E . *On suppose que les directions des droites* $V(a,b)$, $V(b,c)$, $V(c,a)$ *ne sont pas isotropes. On suppose en outre que les droites* $V(b,c)$ *et* $V(b,a)$ (resp. $V(c,b)$ *et* $V(c,a)$) *admettent une bissectrice* D_b (resp. D_c). *Alors* D_b *et* D_c *se coupent en un point* i *et la droite* $V(a,i)$ *est bissectrice des droites* $V(a,b)$ *et* $V(a,c)$.

Démonstration C'est une conséquence immédiate de 5.3. .

7. L'algèbre de dimension 2 associée au plan quadratique

7.1. Le corps associé au plan quadratique défini.

7.1.1. L'application norme Soient (T,q) un plan quadratique défini, (e,e') une base orthogonale, $\alpha:=-\frac{q(e')}{q(e)}$, $L:=\frac{k[X]}{(X^2-\alpha)\,k[X]}=k\oplus k\theta$ où θ est l'image de X dans L . Sachant que (T,q) est défini, le polynôme $X^2-\alpha$ est un irréductible de $k[X]$, il suit de cela que L est un corps de degré 2 sur k . Soit σ le k-automorphisme de L défini par $\sigma(x+y\theta)=x-y\theta$ pour $x,y\in k$. Facilement si $z\in L$, alors $N(z):=z\sigma(z)\in k$, on a $N(zz')=N(z)N(z')$ et N est une forme quadratique sur le k-espace vectoriel L , on a
$\hat{N}(z,z')=\frac{1}{2}(z\sigma(z')+z'\sigma(z))$, où $\hat{N}$ est la forme polaire associée à N . Soit $\rho:T\to L$ défini par $\rho(xe+ye'):=x+y\theta$, alors ρ est un k-isomorphisme de k-espace vectoriel et on a $q(e)N(\rho(t))=q(t)$ pour tout $t\in T$.

7.1.2. Le groupe orthogonal de (L,N)

Soit $t\in L$ avec $N(t)=1$, alors $v_t:L\to L$ défini par $v_t(z):=tz$ est un élément de $SO(L)$; de plus $t\mapsto v_t$ définit un isomorphisme du groupe

$\{t\in L^\times \mid N(t)=1\}$ sur $SO(L)$. Par ailleurs $w_t;L\to L$ défini par $t\to v_t\sigma$ est un élément de $O(L)-SO(L)$; de plus $t\mapsto w_t$ définit une bijection de $\{t\in L^\times \mid N(t)=1\}$ sur $O(L)-SO(L)$.

7.1.3. Le groupe des similitudes de (L,N)

Soit $t\in L^\times:=L-\{0\}$, alors $u_t:L\to L$ défini par $u_t(z):=tz$ est un élément de $\mathrm{Sim}^+(L)$, i.e. une similitude directe de (L,N) ; de plus $t\mapsto u_t$ définit un isomorphisme du groupe $L^\times$ sur $\mathrm{Sim}^+(L)$. Par ailleurs $w_t;L\to L$ défini par $t\to v_t\sigma$ est un élément de $\mathrm{Sim}^-(L)$, i.e. une similitude indirecte de (L,N) ; de plus $t\mapsto w_t$ définit une bijection de $L^\times$ sur $\mathrm{Sim}^-(L)$.

7.2. L'algèbre associée au plan hyperbolique

7.2.1. L'application norme Soit (T,q) le plan hyperbolique, (e,e') une base hyperbolique, i.e. $q(e)=q(e')=0$, $\hat{q}(e,e')=1$. Soient l'algèbre $A:=k\times k$, σ l'automorphisme de A défini par $\sigma(x,y)=(y,x)$. Soit $N:A\to k$ défini par $N((x,y)):=xy$, alors $\sigma(z)z=N(z)(1,1)$, il suit de cela que $N(zz')=N(z)N(z')$, ainsi N induit un homomorphisme de $A^\times$ sur $k^\times$, où $A^\times$ (resp. $k^\times$) désigne le groupe des inversibles de A (resp. k). En plus N est une forme quadratique sur le k-espace vectoriel A ; si $\hat{N}$ est la forme polaire associée à N, on a $\hat{N}((z,z')(1,1)=\frac{1}{2}(z\sigma(z')+z'\sigma(z))$.

7.2.2. Le groupe orthogonal de (A,N)

Soit $t\in A$ avec $N(t)=1$, alors $v_t:A\to A$ défini par $v_t(z):=tz$ est un élément de $SO(A)$; de plus $t\mapsto v_t$ définit un isomorphisme du groupe $\{t\in A^\times \mid N(t)=1\}$ sur $SO(A)$. Par ailleurs $w_t:A\to A$ défini par $t\to v_t\sigma$ est un élément de $O(A)-SO(A)$; de plus $t\mapsto w_t$ définit une bijection de $\{t\in A^\times \mid N(t)=1\}$ sur $O(A)-SO(A)$.

7.2.3. Le groupe des similitudes de (A,N)

Soit $t\in A^\times$, alors $u_t:A\to A$ défini par $u_t(z):=tz$ est un élément de $\mathrm{Sim}^+(L)$, i.e. une similitude directe de (A,N) ; de plus $t\mapsto u_t$ définit un isomorphisme du groupe $A^\times$ sur $\mathrm{Sim}^+(L)$. Par ailleurs $w_t:L\to L$ défini par $t\to v_t\sigma$ est un élément de $\mathrm{Sim}^-(L)$, i.e. une similitude indirecte de (L,N) ; de plus $t\mapsto w_t$ définit une bijection de $A^\times$ sur $\mathrm{Sim}^-(L)$.

8. Coniques attachées à un espace quadratique affine

8.1. Définition Soit $E=o+T$ un espace affine attaché à un espace quadratique (T,q) non dégénéré. On appelle conique associée à la structure quadratique toute conique $C_{a,\mu}$ telle que $C_{a,\mu}(k)=\{\, m\in E \mid q(m-a)=\mu \,\}$; c'est une conique à centre, de centre a. Si $m\in C_{a,\mu}(k)$, alors la tangente en m à $C_{a,\mu}$ est la droite D passant par m et orthogonale à $V(a,m)$; on a alors $\{a\}=C_{a,\mu}(k)\cap D$. Réciproquement si une droite coupe $C_{a,\mu}(k)$ en un unique point m, cette droite est alors tangente à $C_{a,\mu}(k)$.

Remarque Compte tenu de 7. les coniques $C_{a,\mu}$ et $C_{a',\mu'}$ sont semblables si et seulement si il existe $t\in A^{\times}$ tel que $N(t)=\frac{\mu'}{\mu}$.

8.2. Interprétation projective des coniques attachées à un espace quadratique affine

8.2.0. Le complété projectif d'une conique Soient $T=k\,e_1+k\,e_2$ un plan vectoriel, $E=o+T$ un espace affine de direction T, $V:=k\,e_0\oplus T$, $P(V)$ l'espace projectif associé à V, $\pi : V-\{0\}\rightarrow P(V)$ la surjection canonique, $D_\infty:=\pi(T-\{0\})$, alors $o+t\mapsto\pi(e_0+t)$ est une bijection affine ρ de $E=o+T$ sur l'espace affine $P(V)-D_\infty$. Soit C une conique de E définie par un polynôme F de degré 2 ; i.e.
$F(o+x_1\,e_1+x_2\,e_2)=P(x_1,x_2)=P_2(x_1,x_2)+P_1(x_1,x_2)+P_0(x_1,x_2)$ où $P_i(X_1,X_2)\in k[X_1,X_2]$ est un polynôme homogène de degré i ou $-\infty$, pour $i=0,1$ et $P_2(X_1,X_2)\in k[X_1,X_2]$ est un polynôme homogène de degré 2. Soit C' la conique de $P(V)$ associée à la forme quadratique Q sur V définie par $Q(z\,e_0+x_1\,e_1+x_2\,e_2):=P_2(x_1,x_2)+zP_1(x_1,x_2)+z^2P_0(x_1,x_2)$; on dit que C' est le *complété projectif de* C. En particulier on a
$\rho(C(k))=C'(k)\cap\{P(V)-D_\infty\}$.

Remarque En termes de géométrie algébrique C' n'est autre chose que l'adhérence de Zariski de C dans $P(V)$.

8.2.1. La conique complété projectif de $C_{a,\mu}$ Soit $C'_{a,\mu}$ la conique de $P(V)$ complété projectif de $C_{a,\mu}$. Soient $\theta=a-o$, alors $C'_{a,\mu}$ est donc la conique associée à la forme quadratique $Q_{a,\mu}$ définie par
$Q_{a,\mu}(z\,e_0+t):=q(t-z\,\theta)-z^2\mu$, qui est non dégénérée.

8.2.2. Les points cycliques des coniques $C_{a,\mu}$ Comme (T_K, q_K) est un plan hyperbolique, il admet exactement 2 droites isotropes D_1 et D_2 , il suit que $C'_{a,\mu}(K) \cap D_\infty(K) = \{ \pi(D_1 - \{0\}), \pi(D_2 - \{0\}) \}$. Les points $c_i := \pi(D_i - \{0\})$ pour $i=1,2$ de $P(V_K)$ sont communs à toutes les coniques $C'_{a,\mu}(K)$; on les appellera *les points cycliques* de l'espace affine quadratique par analogie à la situation euclidienne. Si $T = k e_1 \oplus k e_2$ et si (T, q) est hyperbolique, alors il existe $a_i, b_i \in k$ avec $c_i = \pi(a_i e_1 + b_i e_2)$, en d'autres termes les points cycliques sont rationnels sur k ; si (T, q) est défini, il existe une extension quadratique L de k avec $a_i, b_i \in L$ et $c_i = \pi(a_i e_1 + b_i e_2)$.

8.2.3. Coniques associées à un espace quadratique et points cycliques
Soient $E = o + T$ un espace quadratique affine, q la forme quadratique sur T, $P(V)$ le complété projectif de E selon 8.2.1. *, $D_i = K d_i$ pour $i=1,2$ les droites isotropes de (T_K, q_K) , ainsi donc $c_i := \pi(d_i)$ pour $i=1,2$ sont les points cycliques de E selon* 8.2.2. *, C' une conique de $P(V)$, associée à une forme quadratique Q sur V , non dégénérée, telle que $c_i \in C'(K)$ pour $i=1,2$. Alors il existe une conique C de E associée à la structure quadratique et telle que $\rho(C(k)) = C'(k) \cap \{P(V) - D_\infty\}$.*

Démonstration On a donc $Q_K(d_i) = 0$, comme $K d_1 \neq K d_2$, alors la restriction de Q_K à T_K est nulle ou non dégénérée. Si elle était nulle, cela impliquerait que Q_K est dégénéré, donc aussi Q , c'est donc impossible. On a donc $Q_K(d_1) = Q_K(d_2) = 0$ et $\hat{Q}_K(d_1, d_2) \neq 0$; sachant que $q_K(d_1) = q_K(d_2) = 0$ et $\hat{q}_K(d_1, d_2) \neq 0$. Il suit qu'il existe $\lambda \in K^\times$ tel que $\lambda Q_{K \mid T_K} = q_K$; mais en regardant cette relation sur T il suit que $\lambda \in k^\times$ et donc que $\lambda Q_{\mid T} = q$. On remplace désormais Q par λQ , on a donc $Q_{\mid T} = q$. On a $T^\perp = k(e_0 + \theta)$ avec $\theta \in T$ et $V = k(e_0 + \theta) \overset{\perp}{\oplus} T$. Ainsi donc
$C'(k) = \{ \pi(z(e_0 + \theta) + t) \in P(V) \mid z^2 Q(e_0 + \theta) + q(t) = 0 \}$. Il suit que
$C'(k) \cap \{P(V) - D_\infty\} = \{ \pi(e_0 + \theta + t') \mid q(t') = -Q(e_0 + \theta) \}$. Soient $a := o + \theta$, $\mu := -Q(e_0 + \theta)$, alors on a $\rho(Ca, \mu(k)) = C'(k) \cap \{P(V) - D_\infty\}$.

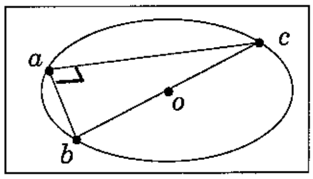
8.4. Lemme *Soient (a, b, c) un repère affine de E de façon que $a - b$, $b - c$ et $c - a$ ne soient pas isotropes. Alors il existe une et une seule conique C associée à la structure quadratique telle $a, b, c \in C(k)$.*

Démonstration C'est une conséquence du lemme 6.3. sur les médiatrices.

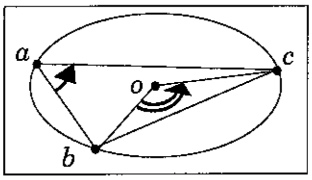
8.5. Angles dans une conique associée Soient C une conique de centre o associée à l'espace affine quadratique $o+T$ où q est la forme quadratique sur T non dégénérée, i.e. $C(k)=\{m\in E \mid q(m-o)=\mu\}$.

8.5.1. *Soient* $a,b\in C(k)$ *avec* $a\neq b$, *alors* $a-b$ *est non isotrope.*

8.5.2. *Soient* $b,c\in C(k)$ *avec* $o=\frac{b+c}{2}$, $a\in C(k)-\{b,c\}$, *alors* $\hat{q}(b-a,c-a)=0$.
Réciproquement, soient $a,b,c\in C(k)$, *distincts, avec* $\hat{q}(b-a,c-a)=0$, *alors* o *est milieu de* b *et* c.

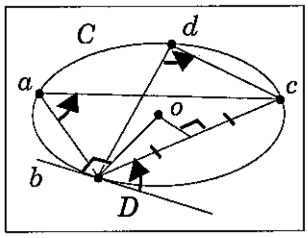


8.5.3. (*le théorème de l'angle au centre*) *Soient* $a,b,c\in C(k)$, *distincts. Alors on a*
$2\ \widehat{V(a,b),V(a,c)}=\widehat{V(o,b),V(o,c)}$.



8.5.4. (*le théorème de cocyclicité*) *Soient* E *un espace affine quadratique.*

8.5.4.1. *Soient* C *une conique de centre* o *associée à* E, $a,b,c\in C(k)$, *distincts*, D *la tangente en* b *à* C. *Alors on a* $\widehat{D,V(b,c)}=\widehat{V(a,b),V(a,c)}$.



8.5.4.2. *Soient* $a,b,c,d\in E$, *quatre points distincts de façon que* (a,b,c) (resp. (d,b,c)) *soit repère affine de* E *et que* $a-b,b-c,c-a,d-b,d-c$ *ne soient pas isotropes. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

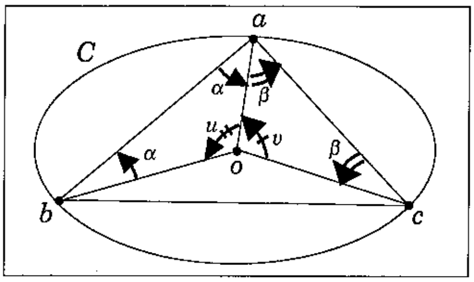
i) Il existe une conique C *associée à* E *avec* $a,b,c,d\in C(k)$,

ii) on a $\widehat{V(a,b),V(a,c)}=\widehat{V(d,b),V(d,c)}$.

Démonstration

1. Il s'agit de montrer 8.5.1. . Soient $e:=a-o$, $f:=b-o$, il suit que $q(e)=q(f)\neq 0$, et donc $\hat{q}(e+f,e-f)=0$, ainsi $k(e-f)^{\perp}=k(e+f)$, ce qui implique $q(e-f)\neq 0$.

2. Il s'agit de montrer 8.5.2. . On a donc $b=o+t$, $c=o-t$; il suit que $\hat{q}(o+t-a,o-t-a)=q(o-a)-q(t)=0$. Réciproquement, soient



$a,b,c\in C(k)$ avec $\hat{q}(b-a,c-a)=0$, c' est le point de $C(k)$ tel que o soit milieu de b et c' , il résulte de ce qui précède que $V(a,c')$ est orthogonal à $V(a,b)$, ainsi $V(a,c)=V(a,c')$, comme la conique est propre la droite $V(a,c)$ coupe la conique au plus 2 points, ainsi $c=c'$.

3. Il s'agit de montrer 8.5.3.. On a

(1) $\widehat{V(o,b),V(o,c)}+\widehat{V(o,c),V(o,a)}+\widehat{V(o,a),V(o,b)}=0$

(2) $2\ \widehat{V(c,a),V(c,o)}+\widehat{V(o,c),V(o,a)}=0$ (6.4.)

(3) $2\ \widehat{V(c,o),V(c,b)}+\widehat{V(o,c),V(o,c)}=0$

Il suit de (1) , (2) , (3) que

$2(\widehat{V(c,a),V(c,o)}+\widehat{V(c,o),V(c,b)})=\widehat{V(o,a),V(o,b)}$,

i.e. $2\ \widehat{V(c,a),V(c,b)}=\widehat{V(o,a),V(o,b)}$.

4) Il s'agit de montrer 8.5.4..

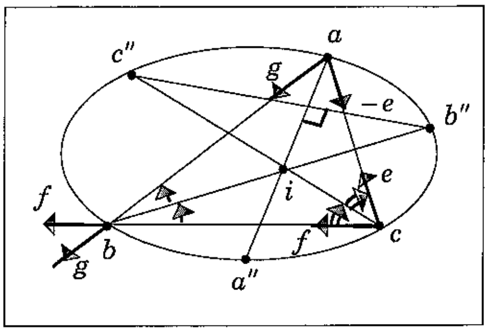
4.1) Montrons 8.5.4.1.. On a $E=o+T$ et donc $E_K=o+T_K$; soit (e_1,e_2) une base hyperbolique de T_K . Quitte à faire une similitude, on peut supposer que $C(K)=\{\, m\in T_K \mid q(m-o)=1\,\}$. on a donc $a-o=\alpha e_1+\frac{1}{\alpha}e_2$, $b-o=\beta e_1+\frac{1}{\beta}e_2$, $c-o=\gamma e_1+\frac{1}{\gamma}e_2$. Soit $\theta\in K$ tel que $\theta^2=-1$, alors $\theta\beta e_1+\frac{1}{\theta\beta}e_2$ définit la direction de D . Soient $e:=x_1e_1+x_2e_2$, $f:=y_1e_1+y_2e_2$, $u\in SO(T_K)$ tel que $Kf=u(Ke)$, alors il est facile de montrer que Mat $(u;e_1,e_2)=\begin{bmatrix}\mu & 0\\ 0 & \frac{1}{\mu}\end{bmatrix}$ avec $\mu^2=\frac{y_1x_2}{y_2x_1}$. Si donc $u(K(b-a))=K(c-a)$, on a $\mu^2=\frac{\gamma}{\beta}$; si $u'(K(\theta\beta e_1+\frac{1}{\theta\beta}e_2))=K(c-b)$, on a aussi $\mu'^2=\frac{\gamma}{\beta}$ .. Ce qui montre bien 8.5.4.1.

.

4.2) Montrons 8.5.4.2.. Si *i)* est satisfait, soit D la tangente en b à C . Il suit de 8.5.4.1. que $\widehat{D,V(b,c)}=\widehat{V(a,b),V(a,c)}$, et aussi que $\widehat{D,V(b,c)}=\widehat{V(d,b),V(d,c)}$; ce qui implique *ii)*. Supposons *ii)* satisfait. Soit D la droite passant par b telle que

$\widehat{D,V(b,c)}=\widehat{V(a,b),V(a,c)}=\widehat{V(d,b),V(d,c)}$. Soit C la conique associée à E telle que $a,b,c\in C(k)$ (8.4.) , il suit alors de 8.5.4.1. que le centre o de C est sur la droite passant par b et orthogonale à D ; mais o est aussi sur la médiatrice de b et c . En considérant la conique C' associée à E et passant par d,b,c , on déduit que C et C' ont le même centre et passent par b , il suit de cela que $C=C'$, ce qui est *i)*.

9. Une configuration sur les bissectrices d'un triangle inscrit dans une conique associée à l'espace affine quadratique

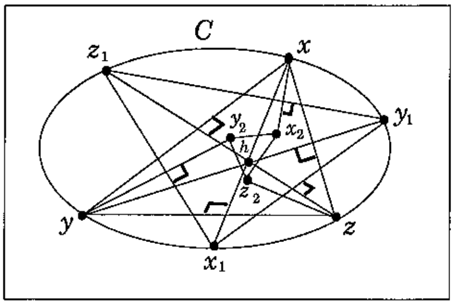


Soient E un espace affine quadratique, C une conique associée à la structure quadratique, a , b , $c\in C(k)$ distincts, $b'',c''\in C(k)$ de façon que $V(b,b'')$ (resp. $V(c,c'')$) *soit bissectrice les droites $V(b,c)$ et $V(b,a)$* (resp. $V(c,b)$ *et* $V(c,a)$) *(si $b=b''$, alors $V(b,b'')$ désigne la tangente en b à C ; idem pour c'') . Alors les droites $V(b,b'')$ et $V(c,c'')$ se coupent en un point i . Soit a'' tel que $\{a,a''\}=C(k)\cap V(a,i)$, alors i est l'orthocentre du triangle (a'',b'',c'') .*

Démonstration On sait par 6.5. que $V(a,a'')$ est une bissectrice de l'angle en a du triangle (a,b,c) . Soit $e\in T$ tel que $ke=k(c-a)$, il suit de 5.3. qu'on peut choisir $f,g\in T$ tels que $kf=k(c-b)$, $kg=k(b-a))$,
$q(e)=q(f)=q(g)$ et $V(c,i)=c+k(e+f)$, $V(b,i)=b+k(f+g)$ et on sait alors que $V(a,i)=a+k(g+e)$ ou $V(a,i)=a+k(g-e)$. Soient $\sigma_{V(c,i)}$ (resp. $\sigma_{V(b,i)}$, $\sigma_{V(a,i)}$) la symétrie orthogonale de droite $V(c,i)$ (resp. $V(b,i),V(a,i)$) s_c (resp. s_b , s_a) l'application linéaire associée, on a donc par 5.3. , $s_c(e)=f$, $s_b(f)=g$ et $s_a(g)=e$ ou $s_a(g)=-e$. Si on avait $s_a(g)=e$, cela veut dire $\sigma_{V(a,i)}\sigma_{V(b,i)}\sigma_{V(c,i)}$ serait la symétrie orthogonale relativement à la droite $i+ke$; dans ces conditions les seules droites stables par $\sigma_{V(a,i)}\sigma_{V(b,i)}\sigma_{V(c,i)}$ sont $i+ke$ et les droites orthogonales à $i+ke$. Sachant que $\sigma_{V(a,i)}\sigma_{V(b,i)}\sigma_{V(c,i)}(V(a,c))=V(a,c)$, on aurait donc $V(a,c)=i+ke$; ce qui est impossible. On a donc $s_a(g)=-e$, ce qui veut dire que

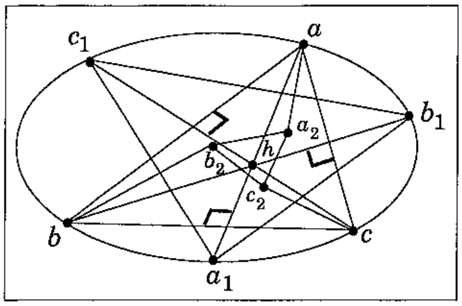
$V(a,i)=a+k(g-e)$. Soient $w\in H$ (resp. $v,u\in H$) tel que $w(e)\in k(e+f)$ (resp. $v(f)\in k(f+g)$, $u(g)\in k(g-e)$). On a donc $w^2(e)=f$, $v^2(f)=g$, $u^2(g)=-e$. Ainsi $(u\,v\,w)^2(e)=-e$, i.e. $(u\,v\,w)^2=-\mathbb{1}_T$. Soient r_a (resp. $r_c, r_{c''}$) la rotation de centre a (resp. c, c'') associée à u (resp. w, v) de l'espace quadratique affine $E_K:=o+T_K$. Compte tenu de 8.5.4.2. , on a $r_{c''}r_c r_a(V(a,a''))=V(c'',b'')$, sachant que $(v\,w\,u)^2=-\mathbb{1}_T$, il suit de 4. que $V(a,a'')$ est orthogonal à $V(c'',b'')$. De même on a $V(b,b'')$ (resp. $V(c,c'')$) orthogonal à $V(a'',c'')$ (resp. $V(b'',a'')$; ce qui montre que i est orthocentre de (a'',b'',c'').

10. Une autre configuration sur un triangle inscrit dans une conique associée à l'espace affine quadratique



Proposition *Soient* (T,q) *un plan quadratique non dégénéré,* E *un espace affine de direction* T , (x,y,z) *un repère affine de façon que* $x-y$, $y-z$, $z-x$ *ne soient pas isotropes. Soit* C *la conique associée à* q *telle que* $x,y,z\in C(k)$ (8.4.) *La droite passant par* y (resp. z) *et orthogonale à* $V(x,z)$ (resp. $V(x,y)$) *recoupe* $V(x,y)$) *recoupe* $C(k)$ *en* y_1 (resp. z_1) , *de plus* $V(y,y_1)$ *et* $V(z,z_1)$ *se coupent en un point* h (*si* $y=y_1$, $V(y,y_1)$ *désigne la tangente en* y *à* C) *; ainsi* $V(a,h)$ *est orthogonale à* $V(y,z)$ *et recoupe* $C(k)$ *en* x_1 *; en d'autres termes* h *est l'horthocentre de* (x,y,z) . *Soient* x_2 (resp. y_2, z_2) *le symétrique orthogonal de* x (resp. y,z) *relati-vement à* $V(y_1,z_1)$ (resp. $V(z_1,x_1)$, $V(x_1,y_1)$). *Alors* h *est aussi orthocentre de* (x_2,y_2,z_2)).

Démonstration (nous reprenons ici la démonstration par les complexes qui nous a été transmise par P. H. Terracher) Soient o le centre de C , on a donc $E=o+T$. Soient A la k-algèbre associée à (T,q) selon 7. , ainsi par l'application $o+t\mapsto\rho(t)$ la configuration se traduit dans A comme il suit.



α) Soient $a,b,c \in A$ avec $N(a)=N(b)=N(c):=\mu$. La droite passant par b recoupe $C(k)$ identifié $\{ mA^\times \mid N(m)=\mu \}$ en un point b_1 et idem pour c . Comme (a,b,c) est un repère affine, les droites $V(b,b_1)$ et $V(c,c_1)$ se coupent un point que l'on note toujours h . On a donc
$0=\hat{N}(h-c,a-b)=\hat{N}(h-a,a-b)+\hat{N}(a-c,a-b)$,
$0=\hat{N}(h-b,a-c)=\hat{N}(h-a,a-c)+\hat{N}(a-b,a-c)$ et par soustraction on a bien $\hat{N}(h-a,c-b)=0$. Ce qui montre que h est l'orthocentre de (a,b,c) . Plus précisément, on a $h=a+b+c$, en effet $\hat{N}(b+c\,,b-c)=0$, de même $\hat{N}(c+a,c-a)=0$, $\hat{N}(a+b,a-b)=0$. Si donc $h':=a+b+c$, on a $h'\in V(a,a_1)\cap V(b,b_1)\cap V(c,c_1)$, ce qui montre que $h'=h$.

β) Soient $p,q\in A$ avec $N(p)=N(q)=\mu$, $S_{p,q}$ la symétrie affine orthogonale relativement à la droite $V(p,q)$, alors on a $S_{p,q}(m)=-\frac{pq}{\mu}\sigma(m)+p+q$ selon les notations de 7. . En effet, on sait que $m\longmapsto \frac{pq}{\mu}\sigma(m)+p+q$ est bien un antidéplacement ; facilement $-\frac{pq}{\mu}\sigma(p)+p+q=p$, idem pour q , ce qui montre que $m\to \frac{pq}{\mu}\sigma(m)+p+q$ est la symétrie orthogonale de droite $V(p,q)$.

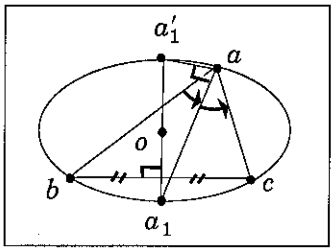
γ) Il suit de α) et β) que $S_{b,c}(h)=-\frac{1}{\mu}\sigma(a)\,bc$, et facilement $N(S_{b,c}(h))=\mu$, ainsi donc $a_1=-\frac{1}{\mu}\sigma(a)\,bc$; de même $b_1=-\frac{1}{\mu}\sigma(b)\,ca$, $c_1=-\frac{1}{\mu}\sigma(c)\,ab$.

δ) En tenant compte de β) et γ) un calcul facile montre que
$a_2:=S_{b_1,c_1}(a)=-a+b_1+c_1$, $b_2:=S_{c_1,a_1}(b)=-b+c_1+a_1$,
$c_2:=S_{a_1,b_1}(c)=-c+a_1+b_1$. Il suit que $c_2-b_2=(b-c)(1+\frac{a}{\mu}(\sigma(b)+\sigma(c)))$ et que $h-a_2=(b+c)(1+\frac{a}{\mu}(\sigma(b)+\sigma(c)))$. Soit donc $c_2-b_2=(b-c)z$, $h-a_2=(b+c)z$, ainsi en désignant par $\mathbf{1}$, l'élément neutre de A et en utilisant 7.1.1. et 7.2.1., on a.
$\hat{N}(c_2-b_2,h-a_2)\,\mathbf{1}=\frac{1}{2}z\,\sigma(z)((b-c)\,\sigma(b+c)+\sigma(b-c)(b+c))=0$. Ce qui montre que $\hat{N}(c_2-b_2,h-a_2)=0$, de même $\hat{N}(a_2-c_2,h-b_2)=0$, $\hat{N}(b_2-a_2,h-c_2)=0$. Cela montre que h est orthocentre de (a_2,b_2,c_2) .

11. Appendice

Sur les bissectrices d'un angle inscrit dans une conique associée et birapport

Soient $E=o+T$ *un espace affine quadratique,* q *la forme quadratique sur* T, C *une conique de centre* o *associée à la structure quadratique,* $a,b,c\in C(k)$ *distincts,* a_1 *et* a'_1 *des points de* $C(k)$ *. Alors les propriétés sont équivalentes.*



i) Les droites $V(a,a_1)$ *et* $V(a,a'_1)$ *sont les bissectrices de l'angle constitué par les directions des droites* $V(a,b)$ et $V(a,c)$ *(si* $a_1=a$ *,* $V(a,a_1)$ *désigne la tangente en* a *à* C *),*

ii) on a birapport $(V(a,b),V(a,c),V(a,a_1),V(a,a'_1))=-1$ *et* o *est milieu de* a_1 *et* a'_1,

iii) on a birapport $(V(a,b),V(a,c),V(a,a'_1),V(a,a'_1))=-1$ *et* $\hat{q}(a_1-a,a'_1-a)=0$,

iv) on a o *est le milieu de* a_1 *et* a'_1 *et* $\hat{q}(a_1-a'_1,b-c)=0$.

v) on a o *est le milieu de* a_1 *et* a'_1 *et* $V(a_1,a'_1)$ *coupe* $V(b,c)$ *en le milieu* i *de* b *et* c .

Démonstration

α) *i) implique ii)* Soient $e\in T$ tel que $V(a,b)=a+ke$, donc il existe $u\in SO(T)$ tel que $V(a,a_1)=a+ku(e)$, $V(a,c)=a+ku^2(e)$ et $V(a,a'_1)$ est orthogonal à $V(a,a_1)$. Facilement la droite $V(a+e,a+u^2(e))$ est orthogonale à $V(a,u(e))$ et ces 2 droites se coupent en un point m qui est milieu de $a+e$ et $a+u^2(e)$. Il suit que les droites $V(a,b)$, $V(a,c)$, $V(a,a_1)$ et $V(a,a'_1)$ coupent la droite (projective) $V(a+e,a+u^2(e))$ en $(a+e\ ,\ a+u^2(e),m,\ \infty)$; il suit de cela que le birapport des 4 droites est -1. Sachant que $\hat{q}(a_1-a,a'_1-a)=0$ il suit de 8.5.2. que o est milieu de a_1 et a'_1 .

β) *ii) implique iii)* C'est aussi 8.5.2..

γ) *iii) implique iv)* . Il suit toujours de 8.5.2. que o est milieu de a_1 et a'_1 . Ensuite on a birapport$(a_1,a'_1,b,c)=-1$ cela veut dire que birapport$(V(a_1,a_1),V(a_1,a'_1),V(a_1,b),V(a_1,c))=-1$ où $V(a_1,a_1)$ désigne la tangente à $C(k)$ en a_1 . Soient i l'intersection de $V(a_1,a'_1)$ et $V(b,c)$ et j l'intersection de $V(a_1,a_1)$ et $V(b,c)$; on a alors

birapport$(i,j,\ b,c)=-1$. Par le même procédé centré en a_1', en appelant j' l'intersection de $V(b,c)$ et $V(a_1', a_1')$, on a birapport$(i,j',\ b,c)=-1$, donc $j=j'$. Comme $V(a_1,a_1)$ et $V(a_1', a_1')$ sont orthogonales à $V(a_1,a_1')$ (non isotrope) , on a $V(a_1,a_1)$ parallèle à $V(a_1', a_1')$, il suit de ce qui précède que $j=j'=\infty$ sur la droite projective $V(b,c)$, sachant que birapport$(i,\infty,b,c)=-1$, on a bien i qui est milieu de b et c .
δ) *iv) implique v)* . Soit i le milieu de b et c , un calcul facile montre que $\hat{q}(o-i,b-c)=0$, ainsi $V(o,i)=V(a_1,a_1')$.
ε) *v) implique i)* . On a donc $\hat{q}(a_1'-i,b-c)=0$. Soient $e=b-a_1'$, il existe $u\in SO(T)$ tel que $u(e)\in k(i-a_1')$. Facilement $\hat{q}(u^2(e)-e,u(e))=0$, ainsi $b+u^2(e)-e\in V(b,c)$. Par ailleurs $\hat{q}(\frac{u^2(e)+e}{2},u^2(e)-e)=0$; soit $m:=a_1'+\frac{e+u^2(e)}{2}$, on a donc $\hat{q}(a_1'-m,u^2(e)-e)=0$, i.e. $\hat{q}(a_1'-m,b-c)=0$, ce qui montre que $i=a_1'+\frac{e+u^2(e)}{2}-b+\frac{u^2(e)-e}{2}$ et comme $i=\frac{b+c}{2}$, on a bien $c=a_1'+u^2(e)$. Cela montre que $V(a_1,a_1')$ est bissectrice $V(a_1',b)$ et $V(a_1',c)$. Alors le théorème de l'arc capable 8.5.4. dit que $V(a,a_1)$ est bissectrice des droites $V(a,b)$ et $V(a,c)$. Sachant par 8.5.2. que $V(a,a_1')$ est orthogonale à $V(a,a_1)$ il suit que $V(a,a_1')$ est l'autre bissectrice.

Bibliographie

[Fr 1] Fresnel J. Méthodes modernes en géométrie *Hermann 1996*

[Fr 2] Fresnel J. Espaces quadratiques euclidiens, hermitiens *Hermann 1999*