le 20 novembre 2012, Jean Fresnel

Sur le produit tensoriel de corps

Lemme *Soient* $K \subset L$ *deux corps commutatifs,* L *séparable, fini sur* K , L^{alg} *une clôture algébrique de* L , Σ *l'ensemble des* K*-homomorphismes de* L *dans* K^{alg} .

1. *Soient* $\sigma \in \Sigma$, $\mathfrak{M}_\sigma := \{ \sum_i x_i \otimes y_i \in L \underset{K}{\otimes} L \mid \sum_i \sigma(x_i)\, y_i = 0 \}$, $\rho_\sigma : L \underset{K}{\otimes} L \to \sigma(L)L$ *défini par* $\rho_\sigma(\sum_i x_i \otimes y_i) := \sum_i \sigma(x_i)\, y_i$. *Alors* ρ_σ *est un homomorphisme surjectif de noyau* $\mathfrak{M}_\sigma$ *; il suit de cela que* $\mathfrak{M}_\sigma$ *est un idéal maximal de* $L \underset{K}{\otimes} L$ *et que* $\dfrac{L \underset{K}{\otimes} L}{\mathfrak{M}_\sigma}$ *est isomorphe à* $\sigma(L)L$.

2. *Soient* $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ *, alors on a* $\mathfrak{M}_\sigma = \mathfrak{M}_{\sigma'}$ *, si et seulement si il existe un* L*-isomorphisme* u *de* $\sigma(L)L$ *sur* $\sigma'(L)L$ *, tel que* $u(\sigma(x)) = \sigma'(x)$ *pour tout* $x \in L$.

3. *On a* $\bigcap_{\sigma \in \Sigma} \mathfrak{M}_\sigma = \{ 0 \}$. *Soit* Σ' *une partie de* Σ *telle que* $\{ \mathfrak{M}_\sigma \mid \sigma \in \Sigma \} = \{ \mathfrak{M}_{\sigma'} \mid \sigma' \in \Sigma' \}$ *et que* $\operatorname{card} \Sigma' = \operatorname{card} \{ \mathfrak{M}_\sigma \mid \sigma \in \Sigma \}$. *Alors les homomorphismes* ρ_σ *pour* $\sigma \in \Sigma'$ *induisent un isomorphisme* $\rho : L \underset{K}{\otimes} L \to \prod_{\sigma \in \Sigma'} \sigma(L)L$ *défini par* $\rho(z) = (\rho_\sigma(z))_{\sigma \in \Sigma'}$. *Il suit de cela que si* $\sigma \in \Sigma'$ *, il existe un idempotent* e_σ *de* $L \underset{K}{\otimes} L$ *avec* $e_\sigma - 1 \in \mathfrak{M}_\sigma$ *et* $e_\sigma \in \mathfrak{M}_{\sigma'}$ *pour tout* $\sigma' \in \Sigma' - \{ \sigma \}$, *et que* $\{ \mathfrak{M}_\sigma \mid \sigma \in \Sigma' \}$ *est exactement l'ensemble des idéaux maximaux de* $L \underset{K}{\otimes} L$.

4. *Soient* $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ *une base du* K*-espace vectoriel* L , $((e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ *la base duale relativement à la forme bilinéaire sur* $L \times L$ *définie par* $(x, y) \mapsto Tr_{L/K}(xy)$.

4.1. *Si on désigne par* Id *l'élément de* Σ *défini par* $Id(x) = x$ *pour tout* $x \in L$, *alors on a* $e_{Id} = e_1^* \otimes e_1 + e_2^* \otimes e_2 + \dots + e_n^* \otimes e_n$.

4.2. *Si on suppose que* L/K *est galoisien de groupe de Galois* G *, alors on a une bijection entre* G *et* Σ *et de plus* $\Sigma = \Sigma'$. *Il suit alors que*
$e_\sigma = \sigma^{-1}(e_1^*) \otimes e_1 + \sigma^{-1}(e_2^*) \otimes e_2 + \dots + \sigma^{-1}(e_n^*) \otimes e_n$.

Il suit de cela que $\operatorname{card} \{ \sigma' \in \Sigma \mid \mathfrak{M}_{\sigma'} = \mathfrak{M}_\sigma \} = [\, \sigma(L)L : L \,]$.

Démonstration

1) La partie 1. est immédiate.

2) Montrons 2. . S'il existe $u : \sigma(L)L \to \sigma'(L)L$ tel que $u(x) = x$ pour tout $x \in L$ et $u(\sigma(x)) = \sigma'(x)$ pour tout $x \in L$, il suit $\sum_i \sigma(x_i)\, y_i = 0$ est équivalent par application de u à $\sum_i \sigma'(x_i)\, y_i = 0$; i.e. $\mathfrak{M}_\sigma = \mathfrak{M}_{\sigma'}$.

Si $\mathfrak{M}_\sigma = \mathfrak{M}_{\sigma'}$, le lemme de factorisation des homomorphismes montre qu'il existe un isomorphisme $u : \sigma(L)L \to \sigma'(L)L$ tel que $\rho_{\sigma'} = u\,\rho_\sigma$ et donc $u(x)=x$ pour tout $x \in L$ et $u(\sigma(x)) = \sigma'(x)$ pour tout $x \in L$.
Comme $\sigma(L)L$ est séparable sur L , il suit que le nombre de L-homomorphisme de $\sigma(L)L$ dans L^{alg} est égale à $[\,\sigma(L)L : L\,]$. Cela montre bien que $\mathrm{card}\{\,\sigma' \in \Sigma \mid \mathfrak{M}_{\sigma'} = \mathfrak{M}_\sigma\,\} = [\,\sigma(L)L\,]$.

3) Montrons 3. . Soient $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de L sur K et $\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes y_i \in \prod_{\sigma\in\Sigma} \mathfrak{M}_\sigma$. On a donc $\sum_{i=1}^{n} \sigma(e_i)\, y_i = 0$ pour tout $\sigma \in \Sigma$. Sachant que la matrice $[\,\sigma(e_i)\,]_{\sigma, i}$ est inversible, il suit que $y_i = 0$ pour $1 \le i \le n$; ce qui montre que $\bigcap_{\sigma\in\Sigma} \mathfrak{M}_\sigma = \{\,0\,\}$.
Il suit de cela que l'application ρ est injective. Par ailleurs, il suit de 2. que $\mathrm{card}\,\Sigma = \sum_{\sigma\in\Sigma'} [\,\sigma(L)L\,]$ et comme $\mathrm{card}\,\Sigma = [\,L:K\,]$, il suit que

$\dim_L \prod_{\sigma\in\Sigma'}^{\infty} \sigma(L)L = [\,L:K\,]$. Par ailleurs $\dim_L L \otimes_K L = [\,L:K\,]$; ainsi pour des raisons de dimension l'application ρ est surjective. On a donc $L \otimes_K L \simeq K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_m$ où K_i est un corps avec $1 \le i \le m$. On sait que les maximaux de $K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_m$ sont $\{\,0\,\} \times K_2 \times \ldots \times K_m$, $K_1 \times \{\,0\,\} \times \ldots \times K_m$, $K_1 \times K_2 \times \ldots \times \{\,0\,\}$, donc $\{\,\mathfrak{M}_\sigma \mid \sigma \in \Sigma'\}$ est exactement l'ensemble des idéaux maximaux de $L \otimes_K L$.

4) Montrons 4. . Sachant que $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de L sur K , on a $e_{Id} = x_1 \otimes e_1 + x_2 \otimes e_2 + \ldots + x_n \otimes e_n$. Il suit de 3. que
$1 = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$ et que $0 = \sigma(x_1)\, e_1 + \sigma(x_2)\, e_2 + \ldots + \sigma(x_n)\, e_n$ pour $\sigma \ne Id$.
Soit $y \in L$, on a donc $y = y\,x_1 e_1 + y\,x_2 e_2 + \ldots + y\,x_n e_n$ et
$0 = \sigma(y\,x_1)\, e_1 + \sigma(y\,x_2)\, e_2 + \ldots + \sigma(y\,x_n)\, e_n$ et en additionnant, on a
$y = Tr_{L/K}(y\,x_1)\, e_1 + Tr_{L/K}(y\,x_2)\, e_2 + \ldots + Tr_{L/K}(y\,x_n)\, e_n$.
Facilement, on a $y = Tr_{L/K}(y\,e_1^*)\, e_1 + Tr_{L/K}(y\,e_2^*)\, e_2 + \ldots + Tr_{L/K}(y\,e_n^*)\, e_n$. En conclusion $Tr_{L/K}(y(x_i - e_i^*)\,) = 0$ pour tout y , ce qui implique $x_i = e_i^*$ pour $1 \le i \le n$. On peut montrer 4.2. de façon analogue.

Un exemple
$K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{Q}[\,w\,]$, $w^3 = 2$, $w \in \mathbb{R}$.
$e_{Id} = \frac{1}{3} \otimes 1 + \frac{1}{6} w^2 \otimes w + \frac{1}{6} w \otimes w^2$
$e_\sigma = \frac{2}{3} \otimes 1 + (-\frac{1}{6} w^2) \otimes w + (-\frac{1}{6} w) \otimes w^2$, pour $\sigma \ne Id$.