Bordeaux, le 21/02/2006, Jean Fresnel

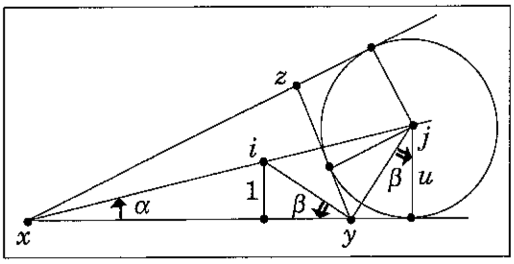
Le théorème des 6 cercles (Evelyn C.J.A. , Money-Goutts G.B. , Tyrrell J.A. (1974))

Soient (x,y,z) *les sommets d'un triangle*, i *le centre du cercle inscrit à* (x,y,z), $\mathcal{T}$ *l'intérieur de l'enveloppe convexe de* (x,y,z), $\mathcal{C}_x$ (resp. $\mathcal{C}_y$, $\mathcal{C}_z$) *la famille des cercles tangents à* $V(x,y)$ *et* $V(x,z)$ (resp. $V(y,z)$ et $V(y,x)$, resp. $V(z,x)$ et $V(z,y)$) *centrés sur* $\mathbb{R}_+(i-x)$ (resp. $\mathbb{R}_+(i-y)$, $\mathbb{R}_+(i-z)$) *et qui rencontrent* $\mathcal{T}$. *Soient* C_u *un cercle de rayon* u *avec* $C_u \in \mathcal{C}_x$, C_v *un cercle de rayon* v *avec* $C_v \in \mathcal{C}_y$ *et* C_v *tangent extérieurement à* C_u, C_w *un cercle de rayon* w *avec* $C_w \in \mathcal{C}_z$ *tangent extérieurement à* C_v, $C_{u'}$ *un cercle de rayon* u' *avec* $C_{u'} \in \mathcal{C}_x$ *et* $C_{u'}$ *tangent à* C_w . *Alors il existe* $C_{v'}$ *un cercle de rayon* v' *avec* $C_{v'} \in \mathcal{C}_y$ *et* $C_{v'}$ *tangent extérieurement à* $C_{u'}$, *il existe* $C_{w'}$, *un cercle de rayon* w' *avec* $C_{w'} \in \mathcal{C}_z$ $C_{w'}$ *tangent extérieurement à* $C_{v'}$ *et* C_u .

Démonstration

On peut supposer que le cercle inscrit est de rayon 1 . Soient 2α (resp. 2β, 2γ) une mesure de l'angle en x (resp. y,z) du triangle avec $0<2\alpha<\pi$ (resp. $0<2\beta<\pi$, $0<2\gamma<\pi$).

1) *Il s'agit d'abord de remarquer que le cercle* $C_u \in \mathcal{C}_x$ (resp. $C_v \in \mathcal{C}_y$, $\mathcal{C}_w \in \mathcal{C}_z$) *rencontre* $\mathcal{T}$ *si et seulement si* $u<\frac{1}{\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}$ (resp. $v<\frac{1}{\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha}$, $w<\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$).



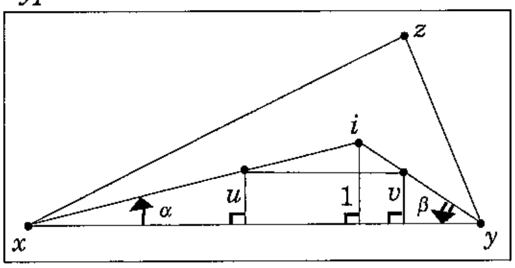
Soient j le centre du cercle exinscrit en x, alors le cercle C_u rencontre $\mathcal{T}$ si et seulement si le centre appartient à $[x,j[$. Lorsque le cercle est centré en j on a facilement la relation $\frac{u}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}+\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}+u\operatorname{tg}\beta$. De $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha=1$, on déduit $u=\frac{1}{\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}$.

2) *Si les cercles* $C_u,C_v,C_w,C_{u'}$ *satisfont l'hypothèse du théorème, on a les relations*

$\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}(1-u)+\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}(1-v)\right)^2=4uv$,

$\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}(1-v)+\frac{1}{\operatorname{tg}\gamma}(1-w)\right)^2=4vw$,

$\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\gamma}(1-w)+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}(1-u')\right)^2=4wu'$.



Montrons cela. En effet on a $\| s-b \|^2=(u+v)^2$ et $\| s-t \|^2=(u-v)^2+\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}+\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}-\frac{u}{\operatorname{tg}\alpha}-\frac{v}{\operatorname{tg}\beta}\right)^2$, qui donne la formule.

3) *Changement de notation.* Posons $a := \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}$, $b := \frac{1}{\mathrm{tg}\beta}$, $c := \frac{1}{\mathrm{tg}\gamma}$, on a donc $a+b+c=abc$ et $a>0$, $b>0$, $c>0$. De plus les relations de 2) s'écrivent

(1) $\quad (a(1-u)+b(1-v))^2-4uv=0$,

(2) $\quad (b(1-v)+c(1-w))^2-4vw=0$,

(3) $\quad (c(1-w)+a(1-u'))^2-4wu'=0$.

Par ailleurs les conditions en 1) s'écrivent $0 \leq u < bc$, $0 \leq v < ca$, $0 \leq w < ab$.

4) *Si $u<bc$, alors les éléments v définis par l'équation* (1) *sont réels positifs ou nuls et satisfont $v<ca$. Si $v<ca$, alors les éléments w définis par l'équation* (2) *sont réels positifs ou nuls et satisfont $w<ab$. Si $w<ab$, alors les éléments u' définis par l'équation* (3) *sont réels positifs ou nuls et satisfont $u'<bc$.*

Montrons cela. L'équation (1) comme polynôme en v s'écrit

(1') $\quad b^2v^2-2(b^2+ab(1-u)+2u)v+(a(1-u)+b)^2$.

Alors le discriminant du polynôme (1') est $\Delta=4(ab-1)(bc-u)u$. Il suit facilement des relations sur a,b,c définies en 3) que $ab-1>0$, $bc-1>0$ et donc $bc-u>0$, ce qui montre que $\Delta \geq 0$, ainsi les 2 racines en v sont réelles. Sachant que le terme constant $(a(1-u)+b)^2$ est positif ou nul et que $-\frac{1}{2}$coefficient $v=b^2+ab(1-u)+2u \geq 0$; il suit que les racines en v sont positives ou nulles. Il reste à montrer que $v=\frac{(b^2+ab(1-u)+2u)+\sqrt{\Delta}}{b^2}<ca$, i.e.

$b^2+ab-abu+2u+\sqrt{\Delta}<b(abc)=b(a+b)+bc$, i.e. $-abu+2u+\sqrt{\Delta}<bc$, soit $\sqrt{\Delta}<(bc-u)+(ab-1)u$, et en élevant au carré que

$4(ab-1)(bc-u)u<((bc-u)+(ab-1)u)^2$, soit $0<((bc-u)-(ab-1)u)^2$.

Ce qui montre 4).

5) *La technique du résultant pour l'élimination.*

Soient les polynômes de $\mathbb{Z}[U,V,W,U',A,B,C]$ définis par

$P(U,V,A,B,C) := (A(1-U)+B(1-V))^2-4UV$,

$Q(V,W,A,B,C) := (B(1-V)+C(1-W))^2-4VW$,

$R(W,U',A,B,C) := (C(1-W)^2+A(1-U'))^2-4WU'$.

Soient les résultants suivants (Fr , F. 7.7.1.1. , F.7.7.1.7.)

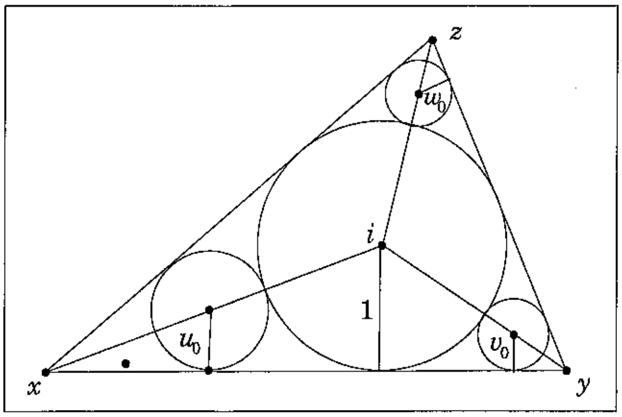
$S(V,U',A,B,C) := \mathrm{Res}_W(Q(V,W,A,B,C),R(W,U',A,B,C))$,

$T(U,U',A,B,C) := \mathrm{Res}_V(S(V,U',A,B,C),P(U,V,A,B,C))$.

5.1) Soient u,v,w,u',a,b,c satisfaisant les relation (1), (2) et (3) de 3). Ainsi $Q(v,w,a,b,c)=0$ et $R(w,u',a,b,c)=0$ impliquent avec la théorie du résultant (Fr , F.7.7.1.7.) que $S(v,u',a,b,c)=0$. Sachant par la relation (1) de

3) que $P(u,v,a,b,c)=0$, on déduit toujours par (Fr, F.7.7.1.7.) que $T(u,u',a,b,c)=0$.
5.2) Par Maple on a
$T(U,U',A,B,C)-T(U',U,A,B,C)=(A+B+C-ABC)\Theta$, où
$\Theta\in\mathbb{Z}[U,V,W,U',A,B,C]$; cela implique compte tenu des relations sur a,b,c définies en 3) que $T(u,u',a,b,c)=T(u',u,a,b,c)$. Il suit donc de 5.1) que $T(u',u,a,b,c)=0$.
5.3) De $T(u',u,a,b,c)=0$, il résulte toujours de Fr, F.7.7.1.7. qu'il existe $v'\in\mathbb{C}$ tel que $P(u',v',a,b,c)=0$ et $S(v',u,a,b,c)=0$. Sachant par 4) que $0\leq u'<bc$, il suit toujours de 4) que v' est réel avec $0\leq v'<ca$. Toujours par Fr , F.7.7.1.7. , sachant que $S(v',u,a,b,c)=0$, il existe $w'\in\mathbb{C}$ tel que $Q(v',w',a,b,c)=0$ et $R(w',u,a,b,c)=0$. Sachant que $0\leq v'<ca$, on sait par 4) que w' est réel avec $0\leq w'<ab$.
En résumé, il suit des relations $P(u',v',a,b,c)=0$, $Q(v',w',a,b,c)=0$, $R(w',u,a,b,c)=0$, u',v',w' réels avec $0\leq u'<bc$, $0\leq v'<ca$, $0\leq w'<ab$ que les cercles $C_{v'}$ et $C_{w'}$ conviennent.

5) La démonstration de E.M-C.T (Evelyn, Money-Coutts, Tyrrell)
5.1) On reprend les notations de 3) i.e. $a=\frac{1}{\text{tg}\alpha}$, $b=\frac{1}{\text{tg}\beta}$, $c=\frac{1}{\text{tg}\gamma}$ et donc $a>0$, $b>0$, $c>0$, $a+b+c=abc$, $P(U,V):=(a(1-U)+b(1-V))^2-4UV$, $Q(V,W):=(b(1-V)+c(1-W))-4VW$, $R(W,U')=(c(1-W)+a(1-U'))^2-4WU'$.



Soient C_{u_0} le cercle centré sur $\mathbb{R}_+(i-x)$ de rayon $u_0<1$, tangent au cercle inscrit et aux droites $V(x,y)$ et $V(x,z)$ (resp. C_{v_0} le cercle centré sur $\mathbb{R}_+(i-y)$ de rayon $v_0<1$, tangent au cercle inscrit et aux droites $V(y,z)$ et $V(y,x)$, resp. C_{w_0} le cercle centré sur $\mathbb{R}_+(i-z)$ de rayon $w_0<1$ tangent au cercle inscrit et aux droites $V(z,x)$ et $V(z,y)$).
Facilement on a $u_0=\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$, $v_0=\frac{1-\sin\beta}{1+\sin\beta}$, $w_0=\frac{1-\sin\gamma}{1+\sin\gamma}$. De plus

$(a(1-u_0))^2=4u_0$, $(b(1-v_0))^2=4v_0$, $(c(1-w_0))^2=4w_0$; ce qui s'écrit aussi $P(u_0,1)=R(1,u_0)=0$, $Q(v_0,1)=P(1,v_0)=0$, $R(w_0,1)=Q(1,w_0)=0$.

5.2) *Soit* $u\in[u_0,1]$ *alors il existe un unique* $v\in[v_0,1]$ *tel que* $P(u,v)=0$ (resp. *soit* $v_0\in[v_0,1]$ *, alors il existe un unique* $w\in[w_0,1]$ *tel que* $Q(v,w)=0$, resp. *soit* $w\in[w_0,1]$ *, alors il existe un unique* $u'\in[u_0,1]$ *tel que* $R(w,u')=0$).

Il s'agit d'abord de montrer que $P(v_0,u)\geq 0$ et $P(1,u)\leq 0$. En effet $P(v_0,u)=(a(1-u)+b(1-v_0))^2-4uv_0$, donc $P(v_0,u)=a^2(1-u)^2+2ab(1-u)(1-v_0)-4((b(1-v_0))^2-4v_0)$, ainsi par 5.1), i.e. par $P(v_0,1)=0$, on a $P(v_0,u)=a^2(1-u)^2+2ab(1-u)(1-v_0)+4(1-u)v_0\geq 0$.

Ensuite $P(1,u)=(a(1-u))^2-4u\leq(a(1-u_0))^2-4u_0=0$ par 5.1) i.e. par $P(u_0,1)=0$.

Il suit donc de cela que le polynôme en V, $P(u,V)$ admet une racine $v\in[v_0,1]$; par ailleurs selon (1') de 4) on a $P(u,V)=b^2V^2-2(b^2+ab(1-u)+2u)V+(a(1-u)+b)^2$, ainsi le produit des racines est $(\frac{a(1-u)+b}{b})^2\geq 1$, cela montre facilement que v est unique.

La traduction géométrique de 5.3 est que si le premier cercle C_u est de rayon $u\in[u_0,1]$, alors il existe une suite unique de cercles intérieurs au triangle $C_v,C_w,C_{u'},C_{v'},C_{w'},C_{u''}$ construites selon le processus du théorème.

5.3) Soient $u,u',u''\in[u_0,1]$, $v,v'\in[v_0,1]$, $w,w'\in[w_0,1]$ avec $P(u,v)=0$, $Q(v,w)=0$, $R(w,u')=0$, $P(u',v')=0$, $Q(v',w')=0$, $R(w',u'')=0$. Soient $\ell>0$ (resp. $m>0$, $n>0$) tels que $a+b=\ell^2$ (resp. $b+c=m^2$, $c+a=n^2$) , $r>0$ (resp. $s>0$, $t>0$, $r'>0$, $s'>0$, $t'>0$, $r''>0$) tels que $r^2=au$ (resp. $s^2=bv$, $t^2=cw$, $r'^2=au'$, $s'^2=bv'$, $t'^2=cw'$, $r''^2=au''$). Sachant que $\frac{1}{\sqrt{ab}}<1$, (resp. $\frac{1}{\sqrt{bc}}<1,\frac{1}{\sqrt{ca}}$) , il existe ψ (resp. θ,φ) avec $\cos\psi=-\frac{1}{\sqrt{ab}}$ (resp. $\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{bc}}$, $\cos\varphi=-\frac{1}{\sqrt{ca}}$). Ainsi les 6 égalités ci-dessus s'évrivent

(1) $\ell^2=r^2+s^2-2(\cos\psi)rs$,

(2) $m^2=s^2+t^2-2(\cos\theta)st$,

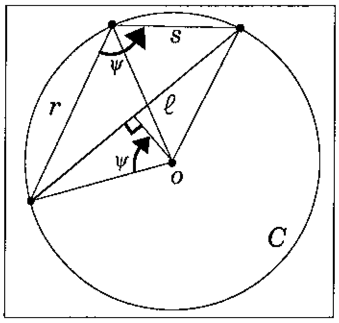
(3) $n^2=t^2+r'^2-2(\cos\varphi)tr'$,

(4) $\ell^2=r'^2+s'^2-2(\cos\psi)r's'$,

(5) $m^2=s'^2+t'^2-2(\cos\theta)s't'$,

(6) $n^2=t'^2+r''^2-2(\cos\varphi)t'r''$.

L'égalité (1) veut dire que r, s, ℓ sont les longueurs des côtés d'un triangle selon la figure ci-contre dont le rayon ρ du cercle circonscrit satisfait $2\rho\sin(\pi-\psi)=\ell$, compte tenu de $a+b+c=abc$, on a facilement $\rho=\frac{1}{2}\sqrt{abc}$. Ainsi il existe une suite $(x_1, x_2, \ldots, x_7)$ du cercle C de centre o , de rayon ρ , de façon que $\| x_0-x_1 \|=u$, $\| x_1-x_2 \|=v$,

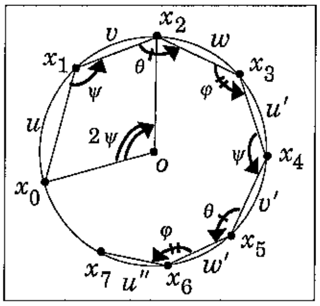


$\| x_2-x_3 \|=w$, $\| x_3-x_4 \|=u'$, $\| x_4-x_5 \|=v'$, $\| x_5-x_6 \|=w'$, $\| x_6-x_7 \|=u''$,

que mes $\widehat{(x_0\, x_1\, x_2)}$ = mes $\widehat{(x_3\, x_4\, x_5)}=\psi$,

mes $\widehat{(x_1\, x_2\, x_3)}$ = mes $\widehat{(x_4\, x_5\, x_6)}=\theta$,

mes $\widehat{(x_2\, x_3\, x_4)}$ = mes $\widehat{(x_5\, x_6\, x_7)}=\varphi$,

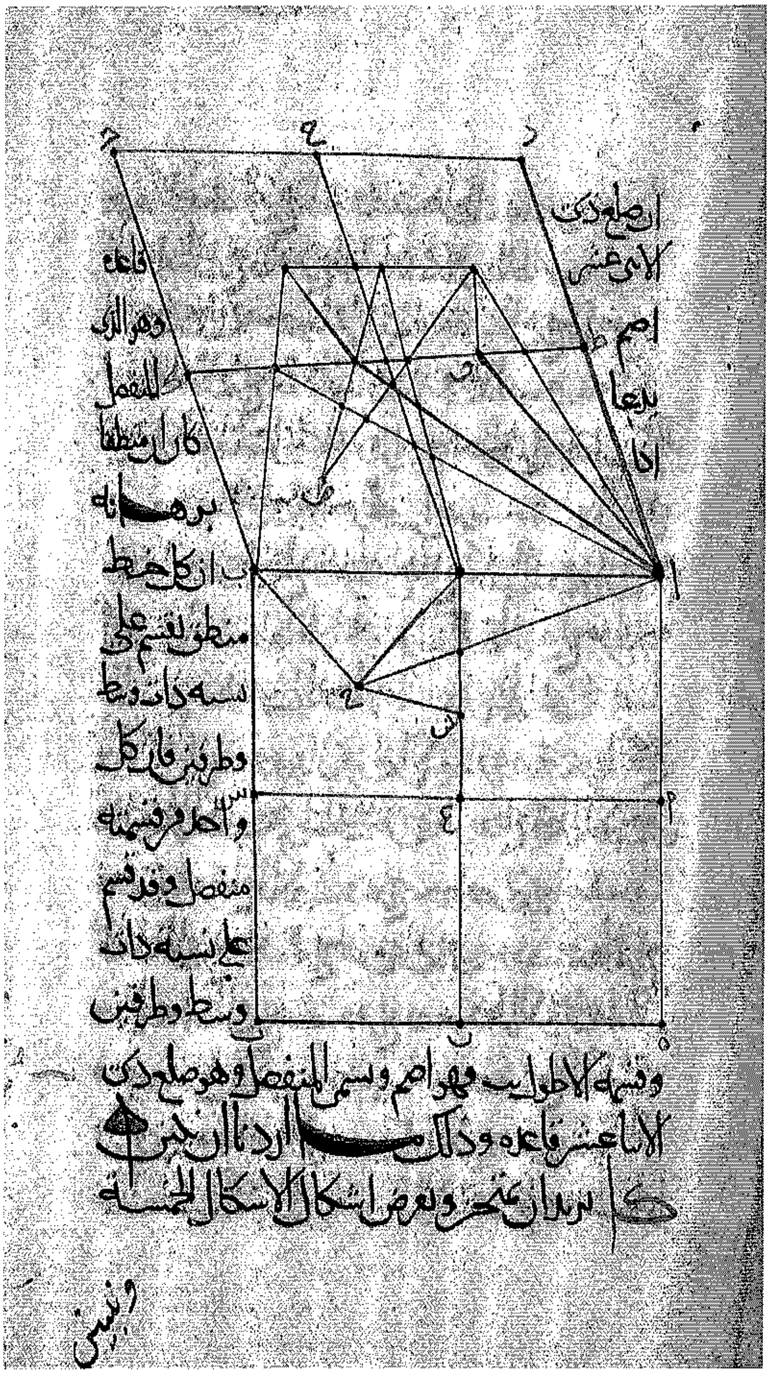


Soient f (resp. g, h) la rotation de centre o et de mesure d'angle 2ψ (resp. 2θ , 2φ), alors on a $f(x_0)=x_2$, $g(x_1)=x_3$, $h(x_2)=x_4$, $f(x_3)=x_5$, $g(x_4)=x_6$, $h(x_5)=x_7$. Il suit de cela que $ghf(x_0)=x_6$, $hfg(x_1)=x_7$, sachant que le groupe des rotations de centre o est commutatif, on a $ghf=hfg$, ainsi $ghf(x_0-x_1)=x_6-x_7$ et donc $u=\| x_0-x_1 \|=\| x_6-x_7\|=u''$.

Ce qui montre le théorème dans cette situation.

Evelyn C.J.A. , Money-Coutts G.B. , Tyrrell J.A.
Le théorème des sept cercles, CEDIC 1975

[Fr] Fresnel Jean Anneaux, Hermann



Les éléments d'Euclide, copie arabe du 12 ième siècle