ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

MARC ARNAUDON

# Caractéristiques locales des semi-martingales et changements de probabilités

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 29, n° 2 (1993), p. 251-267

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1993__29_2_251_0>

*Ann. Inst. Henri Poincaré,*

Vol. 29, n° 2, 1993, p. 251-267. *Probabilités et Statistiques*

# Caractéristiques locales des semi-martingales et changements de probabilités

par

**Marc ARNAUDON**

Institut de Recherche Mathématique Avancée,
Université Louis Pasteur et CNRS,
7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France

RÉSUMÉ. — On étudie les modifications des caractéristiques locales des semi-martingales à valeurs dans les variétés par changement de probabilité, et on donne un théorème de Girsanov. On calcule les caractéristiques locales du produit de deux semi-martingales X et X′ dans un groupe de Lie et de la projection de X dans un espace homogène. On donne ensuite des conditions pour qu'à partir d'une diffusion X, P-martingale dans un espace symétrique de type non-compact G/K, et d'un chemin $g$ dans le groupe de Lie G, on puisse trouver une probabilité Q équivalente à P telle que $g.X$ soit une Q-martingale.

ABSTRACT. — Manifold-valued semi-martingales and the transformation of their local characteristics by change of probabilities are studied. A general Girsanov theorem is given. Local characteristics of the product of two Lie group-valued semi-martingales X and X′, and local characteristics of the projection of X in an homogeneous space are computed. Conditions are given on a diffusion X, P-martingale in a symmetric space of non-compact type G/K, and a path $g$ in the Lie group G, for $g.X$ to be a Q-martingale for some probability Q equivalent to P.

*Classification A.M.S. :* 60 G 44, 60 G, 60-, 53 C XX.

*Annales de l'Institut Henri Poincaré* - Probabilités et Statistiques - 0246-0203
Vol. 29/93/02/251/17/$ 3,70/© Gauthier-Villars

## INTRODUCTION

Les résultats établis dans cet article ont été annoncés dans la Note [A2] aux *Comptes Rendus* de l'Académie des Sciences.

Dans la première partie, nous faisons des rappels de géométrie différentielle d'ordre 2, et sur les caractéristiques locales des semi-martingales dans les variétés. Nous plaçant ensuite sur une variété munie d'une connexion, nous interprétons les caractéristiques locales en termes de dérive et de carré du champ et nous donnons les caractéristiques locales du relèvement dans un espace tangent d'une semi-martingale à valeurs dans la variété.

Dans la deuxième partie, nous étudions la modification des caractéristiques locales par changement de probabilité, et nous donnons un théorème de Girsanov.

La troisième partie est consacrée au calcul des caractéristiques locales du produit de deux semi-martingales dans un groupe de Lie et de la projection dans un espace homogène d'une semi-martingale à valeurs dans un groupe de Lie.

La quatrième partie donne une application aux calculs qui précèdent. Nous nous plaçons dans un espace symétrique et nous donnons une condition pour qu'il existe un changement de probabilité tel que le processus $g.X$ soit une martingale, où $g$ est un processus déterministe à valeurs dans le groupe et X une diffusion et une martingale à valeurs dans l'espace symétrique. Ce problème a été résolu par Shigekawa dans le cas où X est un mouvement brownien.

## 1. GÉOMÉTRIE D'ORDRE 2 ET SEMI-MARTINGALES

Soit V une variété $C^\infty$ de dimension $n$. Le fibré vectoriel des vecteurs tangents d'ordre 2 sera désigné par $\tau V$ et son dual par $\tau^* V$ ([S], [M], [E]).

Si $S_1$ et $S_2$ sont deux semi-martingales réelles continues, on pourra appeler covariation leur crochet et noter $d\langle S_1, S_2\rangle$, $\delta S_1 \delta S_2$ ou $dS_1\, dS_2$ sa différentielle.

Si X est une semi-martingale continue à valeurs dans V, on notera $\mathscr{D}X$ sa différentielle d'ordre 2. Celle-ci admet la décomposition $\mathscr{D}X = \overset{m}{d}X + \mathscr{D}\tilde{X}$ où $\mathscr{D}\tilde{X}$ est un vecteur formel d'ordre 2 défini par Schwartz qui désigne les caractéristiques locales de la martingale ([S], [M]), et $\overset{m}{d}X$ est un vecteur formel d'ordre 1. En coordonnées locales, si on note $X^i = M^i + A^i$ la décomposition de $X^i$ en somme d'une martingale locale et d'un processus à variation finie, on a

$$\mathscr{D}X = dX^i D_i + \frac{1}{2} d\langle X^i, X^j \rangle D_{ij},$$

$$\mathscr{D}\tilde{X} = dA^i D_i + \frac{1}{2} d\langle M^i, M^j \rangle D_{ij},$$

$$\overset{m}{dX} = dM^i D_i.$$

Le vecteur $\mathscr{D}\tilde{X}$ peut être considéré comme une classe d'équivalence de couples de processus (L, C) où L est prévisible localement borné à valeurs dans $\tau V$ au-dessus de X et C est un processus réel croissant continu, vérifiant $\mathscr{D}\tilde{X} = L\, dC$.

Si $f \in C^\infty(V)$, on notera $d^2 f(x)$ l'élément de $\tau_x^* V$ qui vérifie $\forall \lambda \in \tau_x V$, $\langle d^2 f(x), \lambda \rangle = \lambda(f)$.

On a la propriété suivante:

$$f(X) - f(X_0) = \int_0 \langle d^2 f(X), \mathscr{D}X \rangle = \underbrace{\int_0 \langle df(X), \overset{m}{dX} \rangle}_{\text{mart. loc.}} + \underbrace{\int_0 \langle d^2 f(X), \mathscr{D}\tilde{X} \rangle}_{\text{var. finie}}.$$

Soit $T_x V \odot T_x V$ le produit tensoriel symétrique de $T_x V$. Il existe une application linéaire (projection canonique)

$$\varphi: \quad \tau_x V \to T_x V \odot T_x V, \qquad \lambda \mapsto \left( df \otimes dg \mapsto \frac{1}{2}(\lambda(fg) - f\lambda(g) - g\lambda(f)) \right)$$

qui s'écrit en coordonnées locales $\varphi(\lambda^i D_i + \lambda^{ij} D_{ij}) = \lambda^{ij} D_i \otimes D_j$ si $\lambda^{ij} = \lambda^{ji}$.

Un élément $l$ de $T_x V \odot T_x V$ peut être considéré comme une application linéaire de $T_x^* V$ dans $T_x V$. Si cette application linéaire est inversible, nous noterons $l^{-1}$ son inverse.

On a la propriété: $2\varphi(\mathscr{D}\tilde{X}) = \overset{m}{dX} \otimes \overset{m}{dX}$ (le facteur 2 a été oublié dans [A2], ce qui a conduit à des erreurs, corrigées ici dans les propositions 5 et 7). Cet élément symbolique de $T_X V \odot T_X V$ sera encore noté $\mathscr{B}(X)$; en coordonnées locales, $\mathscr{B}(X) = (dM^i dM^j) D_i \otimes D_j$. On dira que X est non dégénérée si $\mathscr{B}(X)$ est inversible, c'est-à-dire s'il existe un couple de processus $(b, C)$ avec $b$ à valeurs dans $(TV \odot TV)$ au-dessus de X, prévisible localement borné et C réel strictement croissant continu, tel que $\mathscr{B}(X) = b\, dC$ et $b_t(\omega)$ soit inversible.

On dira que X est une diffusion si $\mathscr{D}\tilde{X}$ peut s'écrire sous la forme $L\, dt$ avec L processus prévisible à valeurs dans $\tau V$ au-dessus de X.

Si V est munie d'une connexion $\nabla$, on notera F l'opérateur qui à un vecteur d'ordre 2 associe sa partie d'ordre 1: $F(AB) = \nabla_A B$ si A et B sont deux champs de vecteurs d'ordre 1. On a alors un isomorphisme $\lambda \mapsto (F(\lambda), \varphi(\lambda))$ entre $\tau_x V$ et $T_x V \times (T_x V \odot T_x V)$.

On dira que X est une martingale lorsque $F(\mathscr{D}\tilde{X}) \equiv 0$.

Soit X une semi-martingale dans V telle que $X_0 \equiv p$. Soit $Gl(V)$ le fibré des repères de V. Un élément U appartenant à $Gl_x(V)$ est un isomorphisme de $R^n$ dans $T_x V$.

Soient $U_0$ un élément de $Gl_p(V)$ et $U_t(\omega)$ son transport parallèle au-dessus de X. Notons $W_t(\omega) = U_0 U_t(\omega)^{-1}$.

LEMME 1. — *Soit* Z *le relèvement de* X *dans* $T_p V$. *Notons* $Z = Y + A$ *avec* Y *martingale locale et* A *processus à variation finie. Alors*

$$dA = W(F(\mathscr{D}\tilde{X})) \qquad \textit{et} \qquad \mathscr{B}(Y) = W \otimes W(\mathscr{B}(X)).$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} Z &= \int \langle W, F(\mathscr{D}X) \rangle \qquad \text{(intégrale d'Ito)} \\ &= \int \langle W, \overset{m}{dX} + F(\mathscr{D}\tilde{X}) \rangle \\ &= \int \langle W, \overset{m}{dX} \rangle + \int \langle W, F(\mathscr{D}\tilde{X})) \rangle. \end{aligned}$$

Le lemme s'obtient en identifiant le premier terme du membre de droite à Y et le second à A.

## 2. TRANSFORMATIONS DE GIRSANOV

Le théorème suivant est une généralisation aux variétés des conditions pour qu'une semi-martingale devienne une martingale locale par changement de probabilité.

THÉORÈME 2. — *On suppose que* $F(\mathscr{D}\tilde{X}) = \mathscr{B}(X)\alpha$ *où* $\alpha$ *est un processus prévisible localement borné à valeurs dans* $T^* V$ *au-dessus de* X.

*Soient* $N_t = -\int_0^t \langle \alpha, \overset{m}{dX} \rangle$ *et* $Z = \mathscr{E}(N)$ *l'exponentielle stochastique de* N.

*Alors* N *est une martingale locale et si* Z *est une martingale uniformément intégrable,* X *est une* Q*-martingale avec* $Q = Z.P$, Q *équivalente à* P.

*Démonstration.* — Supposons que Z soit une martingale uniformément intégrable. Alors Q est une probabilité équivalente à P. Notons $\mathscr{D}_P \tilde{X}$ (resp. $\mathscr{D}_Q \tilde{X}$) lorsque nous nous référons à la probabilité P (resp. Q). Nous commençons par calculer les nouvelles caractéristiques locales lorsqu'on change de probabilité.

LEMME 3.

$$\mathscr{D}_{\mathrm{Q}}\tilde{\mathrm{X}}=\mathscr{D}_{\mathrm{P}}\tilde{\mathrm{X}}-\frac{d\mathrm{Z}\,\overset{m}{d\mathrm{X}}}{\mathrm{Z}}.$$

Ce résultat est dû à Norris [N], qui le formule et l'établit à l'aide du relèvement de X dans un espace tangent.

*Démonstration du lemme.* – Il suffit de montrer que

$$f(\mathrm{X})-f(\mathrm{X}_0)-\int_0 \left\langle d^2 f, \mathscr{D}_{\mathrm{P}}\tilde{\mathrm{X}}-\frac{d\mathrm{Z}\,\overset{m}{d\mathrm{X}}}{\mathrm{Z}}\right\rangle$$

est une Q-martingale locale réelle lorsque $f$ est dans $\mathrm{C}^{\infty}(\mathrm{V})$. Or le théorème de Girsanov dans le cas réel nous dit que

$$f(\mathrm{X})-f(\mathrm{X}_0)-\int_0 \langle d^2 f, \mathscr{D}_{\mathrm{P}}\tilde{\mathrm{X}}\rangle-\int_0 \frac{1}{\mathrm{Z}}d\langle f(\mathrm{X}), \mathrm{Z}\rangle$$

est une martingale locale. Mais $\displaystyle\int_0 \left\langle d^2 f, \frac{d\mathrm{Z}\,\overset{m}{d\mathrm{X}}}{\mathrm{Z}}\right\rangle=\int_0 \frac{1}{\mathrm{Z}}d\langle f(\mathrm{X}), \mathrm{Z}\rangle$, donc le lemme est montré.

Pour établir le théorème, il suffit mainenant de vérifier que $\mathrm{F}(\mathscr{D}_{\mathrm{Q}}\tilde{\mathrm{X}})=0$, c'est-à-dire encore $\mathrm{F}(\mathscr{D}_{\mathrm{P}}\tilde{\mathrm{X}})=\dfrac{d\mathrm{Z}\,\overset{m}{d\mathrm{X}}}{\mathrm{Z}}$. Écrivant $\dfrac{d\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}}=d\mathrm{N}=-\langle \alpha, \overset{m}{d\mathrm{X}}\rangle$, on obtient

$$\frac{d\mathrm{Z}\,\overset{m}{d\mathrm{X}}}{\mathrm{Z}}=(\overset{m}{d\mathrm{X}}\otimes \overset{m}{d\mathrm{X}})\,\alpha=\mathscr{B}(\mathrm{X})\,\alpha=\mathrm{F}(\mathscr{D}_{\mathrm{P}}\tilde{\mathrm{X}}).$$

Le théorème est montré.

*Cas particuliers.* – 1. Lorsque X est non dégénérée, N s'écrit

$$\mathrm{N}=-\int\langle \mathscr{B}(\mathrm{X})^{-1}\,\mathrm{F}(\mathscr{D}\tilde{\mathrm{X}}), \overset{m}{d\mathrm{X}}\rangle.$$

2. Si de plus $\mathrm{V}=\mathrm{R}^n$ muni de la connexion plate, et X est une diffusion de générateur $\mathrm{L}=b^i\mathrm{D}_i+\frac{1}{2}a^{ij}\mathrm{D}_{ij}$, $b^i$ et $a^{ij}$ étant des processus réels prévisibles, $\mathscr{D}\tilde{\mathrm{X}}$ s'écrit $\mathrm{L}\,dt$ et on retrouve la formule

$$\mathrm{N}_t=-\int a_{ij}b^j(d\mathrm{X}^i-b^i\,dt)\qquad \text{avec}\quad (a_{ij})=(a^{ij})^{-1}.$$

Cela nous redonne le théorème de Cameron-Martin Girsanov figurant dans [S], [V].

3. Si V est une variété riemannienne, si X est une diffusion non dégénérée de générateur L, si $\varphi(L)^{-1}$ est bornée et si $\int_0^\infty \|F(L)\|^2 dt < K < \infty$, alors Z est une martingale uniformément intégrable. La démonstration est une conséquence de la remarque suivante :

*Remarque.* — Pour que Z soit une martingale uniformément intégrable, il suffit d'après le critère de Novikov que $\langle N, N\rangle_t = \int_0^t \langle \alpha, F(\mathscr{D}\tilde{X})\rangle$ soit p. s. borné. Si X est non-dégénérée, $\langle N, N\rangle$ s'écrit

$$\langle N, N\rangle = \int \langle \mathscr{B}(X)^{-1} F(\mathscr{D}\tilde{X}), F(\mathscr{D}\tilde{X})\rangle.$$

## 3. CARACTÉRISTIQUES LOCALES DANS LES GROUPES DE LIE ET LES ESPACES HOMOGÈNES

Soit G un groupe de Lie d'élément neutre $e$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, muni de sa connexion $\nabla^L$ ($\nabla^L_X Y = 0$ si Y est un champ de vecteurs invariant à gauche et X un vecteur).

*Notations.*

- $(H_i)_{1 \leq i \leq n}$ désignera une base de $\mathfrak{g}$;
- si $g, g' \in G$, $Y \in T_{g'}G$, $L_g$ (resp. $R_g$) est l'application qui à $x \in G$ associe $gx$ (resp. $xg$), on notera $g.Y$ (resp. $Y.g$) au lieu de $T_{g'}L_g Y$ (resp. $T_{g'}R_g Y$). Si $l \in T_{g'}G \otimes T_{g'}G$, on notera $g.l$ (resp. $l.g$) au lieu de $(L_g)_*(l)$ [resp. $(R_g)_*(l)$];
- si A et A′ sont deux vecteurs de $T_gG$, [A, A′] désignera la valeur en $g$ du crochet de Lie des champs de vecteurs invariants à gauche W et W′ tels que $W_g = A$ et $W'_g = A'$;
- si M est une semi-martingale à valeurs dans $\mathfrak{g}$ nulle en 0, $\varepsilon(M)$ désignera l'exponentielle stochastique de M, c'est-à-dire la solution issue de $e$ de l'équation différentielle de Stratonovitch $\delta X = X.\delta M$, [HD, L].

Nous allons déterminer les caractéristiques locales du produit de deux semi-martingales.

PROPOSITION 4. — *Soient* X *et* X′ *deux semi-martingales à valeurs dans* G *telles que* $X_0 = X'_0 = e$. *Les caractéristiques locales de* $Z = XX'$ *vérifient*

$$F(\mathscr{D}\tilde{Z}) = F(\mathscr{D}\tilde{X}).X' + X.F(\mathscr{D}\tilde{X}') + \frac{1}{2}[\overset{m}{dX}.X', X.\overset{m}{dX'}]$$

*et*

$$\mathscr{B}(Z) = \mathscr{B}(X).X' + X.\mathscr{B}(X') + \overset{m}{dX}.X' \otimes X.\overset{m}{dX'} + X.\overset{m}{dX'} \otimes \overset{m}{dX}.X'.$$

*Si l'on écrit* $X=\varepsilon(M)$ *et* $X'=\varepsilon(M')$ *avec* $M=M^i H_i$ *et* $M'=M'^i H_i$, *ceci devient*

$$F(\mathscr{D}\tilde{\tilde{Z}})=F(\mathscr{D}\tilde{\tilde{X}}).X'+X.F(\mathscr{D}\tilde{\tilde{X}}')$$
$$+\frac{1}{2}XX'.[\mathrm{Ad}(X'^{-1})(H_i), H_j]\,d\langle M^i, M'^j\rangle$$

*et*

$$\mathscr{B}(Z)=\mathscr{B}(X).X'+X.\mathscr{B}(X')$$
$$+XX'.(\mathrm{Ad}(X'^{-1})(H_i)\otimes H_j+H_j\otimes \mathrm{Ad}(X'^{-1})(H_i))\,d\langle M^i, M'^j\rangle.$$

*Cas particulier.* — Si X et X′ ont une covariation nulle, par exemple si X ou X′ est à variation finie ou si X et X′ sont indépendantes, alors

$$F(\mathscr{D}\tilde{\tilde{Z}})=F(\mathscr{D}\tilde{\tilde{X}}).X'+X.F(\mathscr{D}\tilde{\tilde{X}}')$$

et

$$\mathscr{B}(Z)=\mathscr{B}(X).X'+X.\mathscr{B}(X').$$

*Démonstration.* — Notons que M (resp. M′) est le relèvement de X (resp. X′) dans $\mathfrak{g}$ pour la connexion $\nabla^L$. D'après [HD, L], prop. 5,

$$XX'=\varepsilon(M)\,\varepsilon(M')=\varepsilon\left(\int \mathrm{Ad}(X'^{-1})\,\delta M+M'\right).$$

La décomposition $M=N+A$ (resp. $M'=N'+A'$) en somme d'une martingale locale et d'un processus à variation finie donne

$$XX'=\varepsilon\left(\int \mathrm{Ad}(X'^{-1})\,dN+N'+\int \mathrm{Ad}(X'^{-1})\,dA+A'+1/2\langle \mathrm{Ad}(X'^{-1}), N\rangle\right)$$

avec $\int \mathrm{Ad}(X'^{-1})\,dN+N'$ martingale locale et

$$\int \mathrm{Ad}(X'^{-1})\,dA+A'+1/2\langle \mathrm{Ad}(X'^{-1}), N\rangle$$

processus à variation finie.

D'après le lemme 1 et [A1],

$$dA=X^{-1}.F(\mathscr{D}\tilde{\tilde{X}}) \qquad \text{et} \qquad dA'=X'^{-1}.F(\mathscr{D}\tilde{\tilde{X}}'),$$

donc

$$\mathrm{Ad}(X'^{-1})\,dA+dA'=X'^{-1}X^{-1}.F(\mathscr{D}\tilde{\tilde{X}}).X'+X'^{-1}.F(\mathscr{D}\tilde{\tilde{X}}').$$

Si $H\in\mathfrak{g}$, $\mathrm{Ad}(X'^{-1})(H)=\int[\mathrm{Ad}(X'^{-1})(H), \delta N']$ d'après [HD, L], lemme 3, ce qui donne

$$d\langle \mathrm{Ad}(X'^{-1}), N\rangle=[\mathrm{Ad}(X'^{-1})\,\delta N, \delta N']=[\mathrm{Ad}(X'^{-1})\,\delta M, \delta M'].$$

En utilisant le lemme 1 et [A1], on peut écrire

$$\mathrm{F}(\mathscr{D}\tilde{\mathrm{Z}})=\mathrm{XX}'.\left(\mathrm{Ad}(\mathrm{X}'^{-1})\,d\mathrm{A}+d\mathrm{A}'+\frac{1}{2}d\langle\mathrm{Ad}(\mathrm{X}'^{-1}),\,\mathrm{N}\rangle\right)$$

et à l'aide du calcul précédent,

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(\mathscr{D}\tilde{\mathrm{Z}})=\mathrm{XX}'.(\mathrm{X}'^{-1}\mathrm{X}^{-1}.\mathrm{F}(\mathscr{D}\tilde{\mathrm{X}}).\mathrm{X}'&\\ +\mathrm{X}'^{-1}.\mathrm{F}(\mathscr{D}\tilde{\mathrm{X}}')+\frac{1}{2}[\mathrm{Ad}(\mathrm{X}'^{-1})\,\delta\mathrm{M},\,\delta\mathrm{M}'])&\\ =\mathrm{F}(\mathscr{D}\tilde{\mathrm{X}}).\mathrm{X}'+\mathrm{X}.\mathrm{F}(\mathscr{D}\tilde{\mathrm{X}}')+\frac{1}{2}[\mathrm{X}.\delta\mathrm{M}.\mathrm{X}',\,\mathrm{XX}'.\delta\mathrm{M}']&\\ =\mathrm{F}(\mathscr{D}\tilde{\mathrm{X}}).\mathrm{X}'+\mathrm{X}.\mathrm{F}(\mathscr{D}\tilde{\mathrm{X}}')+\frac{1}{2}[\delta\mathrm{X}.\mathrm{X}',\,\mathrm{X}.\delta\mathrm{X}']&\end{aligned}$$

car $\delta\mathrm{X}=\mathrm{X}.\delta\mathrm{M}$ et $\delta\mathrm{X}'=\mathrm{X}'.\delta\mathrm{M}'$. La première égalité de la proposition est établie.

La deuxième égalité s'établit en partant de $\delta\mathrm{Z}=\mathrm{X}.\delta\mathrm{X}'+\delta\mathrm{X}.\mathrm{X}'$, ce qui implique

$$\overset{m}{d}\mathrm{Z}=\mathrm{X}.\overset{m}{d}\mathrm{X}'+\overset{m}{d}\mathrm{X}.\mathrm{X}'.$$

On a alors immédiatement

$$\begin{aligned}\overset{m}{d}\mathrm{Z}\otimes\overset{m}{d}\mathrm{Z}=\mathrm{X}.(\overset{m}{d}\mathrm{X}'\otimes\overset{m}{d}\mathrm{X}')+(\overset{m}{d}\mathrm{X}\otimes\overset{m}{d}\mathrm{X}).\mathrm{X}'&\\ +\overset{m}{d}\mathrm{X}.\mathrm{X}'\otimes\mathrm{X}.\overset{m}{d}\mathrm{X}'+\mathrm{X}.\overset{m}{d}\mathrm{X}'\otimes\overset{m}{d}\mathrm{X}.\mathrm{X}',&\end{aligned}$$

et cela donne le résultat.

Intéressons-nous maintenant aux caractéristiques locales dans les espaces homogènes. On suppose que K est un sous-groupe de Lie de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$, que $\mathfrak{g}$ admet la décomposition $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ et que $\mathrm{Ad}(\mathrm{K})(\mathfrak{p})\subset\mathfrak{p}$. Soit $\pi:\mathrm{G}\to\mathrm{G}/\mathrm{K}$ la projection canonique.

L'espace homogène G/K est muni de la connexion pour laquelle le transport parallèle d'un vecteur $\mathrm{T}_g\pi(g.\mathrm{Y})$ (avec $g\in\mathrm{G}$, $\mathrm{Y}\in\mathfrak{p}$) le long de $t\mapsto\pi(g\exp t\mathrm{X})$ ($\mathrm{X}\in\mathfrak{p}$) est

$$t\mapsto\mathrm{T}_{g\exp t\mathrm{X}}\pi((g\exp t\mathrm{X}).\mathrm{Y})\quad[\mathrm{N}].$$

Si L est un vecteur d'ordre 2 appartenant à $\tau(\mathrm{G}/\mathrm{K})$, on notera $\mathrm{F}(\mathrm{L})$ sa partie d'ordre 1.

La proposition suivante donne les caractéristiques locales de la projection d'une semi-martingale à valeurs dans le groupe en fonction de celles de la semi-martingale elle-même.

PROPOSITION 5. — *Soit* X *une semi-martingale à valeurs dans* G, *telle que* $\mathrm{X}_0=e$. *Posons* $\mathrm{Y}=\pi(\mathrm{X})$, *d'où* $\mathscr{D}\tilde{\mathrm{Y}}=\tau_{\mathrm{X}}\pi(\mathscr{D}\tilde{\mathrm{X}})$.

*Alors*

$$\mathrm{F}(\mathscr{D}\tilde{\mathrm{Y}})=\mathrm{T}_{\mathrm{X}}\pi\left(\mathrm{F}(\mathscr{D}\tilde{\mathrm{X}})+\frac{1}{2}[\overset{m}{d\mathrm{X}}_{\mathrm{X}\cdot\mathfrak{k}},\overset{m}{d\mathrm{X}}_{\mathrm{X}\cdot\mathfrak{p}}]\right)\qquad \textit{(avec } \overset{m}{d\mathrm{X}}=\overset{m}{d\mathrm{X}}_{\mathrm{X}\cdot\mathfrak{k}}+\overset{m}{d\mathrm{X}}_{\mathrm{X}.\mathfrak{p}})$$

*et* $\mathscr{B}(\mathrm{Y})=\pi_*(\overset{m}{d\mathrm{X}}_{\mathrm{X}\,\mathfrak{p}}\otimes\overset{m}{d\mathrm{X}}_{\mathrm{X}\,\mathfrak{p}})$.

*Démonstration.* — Pour calculer $\mathrm{F}(\mathscr{D}\tilde{\mathrm{Y}})$, écrivons $\mathrm{X}=\varepsilon(\mathrm{M})$ avec $\mathrm{M}=\mathrm{M}_{\mathfrak{p}}+\mathrm{M}_{\mathfrak{k}}$, $\mathrm{M}_{\mathfrak{p}}\in\mathfrak{p}$, $\mathrm{M}_{\mathfrak{k}}\in\mathfrak{k}$.

Supposons que la base $(\mathrm{H}_i)_{1\leq i\leq n}$ se décompose en $(\mathrm{H}_i=\mathrm{K}_i)_{1\leq i\leq d}$ base de $\mathfrak{k}$ et $(\mathrm{H}_i=\mathrm{P}_i)_{d+1\leq i\leq n}$ base de $\mathfrak{p}$. On note $\mathrm{H}_i.\mathrm{H}_j=1/2(\mathrm{H}_i\mathrm{H}_j+\mathrm{H}_j\mathrm{H}_i)$. Un lemme de géométrie nous permettra de calculer $\mathrm{F}(\tau_{\mathrm{X}}\pi(\mathscr{D}\tilde{\mathrm{X}}))$.

LEMME 6. — *On a les égalités suivantes*:

1. *les vecteurs* $(\mathrm{H}_i.\mathrm{H}_j)_g$ *sont purement d'ordre* 2,

$$\text{i.e. } \mathrm{F}((\mathrm{H}_i.\mathrm{H}_j)_g)=0 \qquad \textit{dans} \quad \mathrm{T}_g\mathrm{G};$$

2. *les vecteurs* $\tau_g\pi((\mathrm{K}_i.\mathrm{K}_j)_g$ *sont purement d'ordre* 2,

$$\text{i.e. } \mathrm{F}(\tau_g\pi((\mathrm{K}_i.\mathrm{K}_j)_g))=0 \qquad \textit{dans} \quad \mathrm{T}_{\pi(g)}(\mathrm{G}/\mathrm{K});$$

3. *les vecteurs* $\tau_g\pi((\mathrm{P}_i.\mathrm{P}_j)_g$ *sont purement d'ordre* 2,

$$\text{i.e. } \mathrm{F}(\tau_g\pi((\mathrm{P}_i.\mathrm{P}_j)_g))=0 \qquad \textit{dans} \quad \mathrm{T}_{\pi(g)}(\mathrm{G}/\mathrm{K});$$

4. $\mathrm{F}(\tau_g\pi((\mathrm{P}_i.\mathrm{K}_j)_g))=\dfrac{1}{2}\mathrm{T}\pi([\mathrm{K}_j,\mathrm{P}_i])$ *dans* $\mathrm{T}_{\pi(g)}(\mathrm{G}/\mathrm{K})$.

*Démonstration du lemme.* — 1. Soient H un élément de $\mathfrak{g}$ et $g$ un élément de G. L'application $f: t\mapsto g\exp t\mathrm{H}_e$ est une géodésique de G telle que $f''(0)=(\mathrm{H}^2)_g$, donc $\mathrm{F}((\mathrm{H}^2)_g)=0$, [M].

Nous écrivons ensuite $\mathrm{H}_i.\mathrm{H}_j=1/2((\mathrm{H}_i+\mathrm{H}_j)^2-\mathrm{H}_i^2-\mathrm{H}_j^2)$ et nous appliquons le résultat précédent aux vecteurs du membre de droite. Cela donne $\mathrm{F}(\mathrm{H}_i.\mathrm{H}_j)\equiv 0$.

2. Soit $\mathrm{K}_0$ un élément de $\mathfrak{k}$. L'application $f: t\mapsto\pi(g\exp t(\mathrm{K}_0)_e)$ est constante, donc $f''(0)=\tau_g\pi((\mathrm{K}_0^2)_g)=0$.

De ce résultat et de l'égalité $\mathrm{K}_i.\mathrm{K}_j=1/2((\mathrm{K}_i+\mathrm{K}_j)^2-\mathrm{K}_i^2-\mathrm{K}_j^2)$ nous déduisons $\mathrm{F}(\tau_g\pi((\mathrm{K}_i.\mathrm{K}_j)_g))\equiv 0$.

3. Soit P un élément de $\mathfrak{p}$. L'application $f: t\mapsto\pi(g\exp t(\mathrm{P}_i)_e)$ est une géodésique telle que $f''(0)=\tau_g\pi((\mathrm{P}_i^2)_g)$, [A1], donc $\mathrm{F}(\tau_g\pi\mathrm{P}_i^2)=0$.

De ce résultat et de l'égalité $\mathrm{P}_i.\mathrm{P}_j=1/2((\mathrm{P}_i+\mathrm{P}_j)^2-\mathrm{P}_i^2-\mathrm{P}_j^2)$ nous déduisons $\mathrm{F}(\tau_g\pi(\mathrm{P}_i.\mathrm{P}_j))\equiv 0$.

4. Soit $f\in\mathrm{C}^\infty(\mathrm{G}/\mathrm{K})$. Alors $\mathrm{K}_j(f\circ\pi)=0$, donc $\mathrm{P}_i\mathrm{K}_j(f\circ\pi)=0$, et

$$(\mathrm{P}_i\mathrm{K}_j+\mathrm{K}_j\mathrm{P}_i)(f\circ\pi)=(-\mathrm{P}_i\mathrm{K}_j+\mathrm{K}_j\mathrm{P}_i)(f\circ\pi)=[\mathrm{K}_j,\mathrm{P}_i](f\circ\pi).$$

Nous en déduisons que $\mathrm{F}(\tau_g\pi(\mathrm{P}_i.\mathrm{K}_j)_g)=1/2\,\mathrm{T}_g\pi([\mathrm{K}_j,\mathrm{P}_i]_g)$.

Ceci achève la démonstration du lemme.

Soit L un élément de $\tau G$ tel que sa partie bilinéaire $\varphi(L)$ soit égale à $l^{ij}(H_i \otimes H_j)$ avec $l^{ij} = l^{ji}$. A l'aide du lemme, on écrit

$$F(\tau\pi(L)) = T\pi\, F(L) + l^{ij}\, T\pi([K_i, P_j]).$$

Comme X est le développement de M, le lemme 1 nous permet d'écrire

$$\varphi(\mathscr{D}\tilde{X}) = \frac{1}{2}(\delta M^i\, \delta M^j)(H_i)_X \otimes (H_j)_X.$$

Il suffit maintenant de remplacer L par $\mathscr{D}\tilde{X}$ dans l'égalité d'avant pour obtenir

$$\begin{aligned} F(\tau_X \pi(\mathscr{D}\tilde{X})) &= T_X \pi(F(\mathscr{D}\tilde{X})) + \frac{1}{2}(\delta M^i\, \delta M^j)\, T_X \pi([K_i, P_j]) \\ &= T_X \pi(F(\mathscr{D}\tilde{X})) + \frac{1}{2} T_X \pi([X.\delta M_{\mathfrak{k}}, X.\delta M_{\mathfrak{p}}]) \\ &= T_X \pi(F(\mathscr{D}\tilde{X})) + \frac{1}{2} T_X \pi([\delta X_{X.\mathfrak{k}}, \delta X_{X.\mathfrak{p}}]) \end{aligned}$$

ce qui est le résultat escompté.

La détermination de $\mathscr{B}(Y)$ s'obtient simplement en écrivant

$$\begin{aligned} \mathscr{B}(Y) &= \overset{m}{d}Y \otimes \overset{m}{d}Y = \delta Y \otimes \delta Y \\ &= T_X \pi(\delta X) \otimes T_X \pi(\delta X) = \pi_*(\delta X \otimes \delta X) \\ &= \pi_*(\overset{m}{d}X \otimes \overset{m}{d}X) = \pi_*(\overset{m}{d}X_{X\mathfrak{p}} \otimes \overset{m}{d}X_{X\mathfrak{p}}). \end{aligned}$$

## 4. APPLICATION : UN THÉORÈME DE GIRSANOV DANS LES ESPACES SYMÉTRIQUES DE TYPE NON-COMPACT

L'ensemble G/K est maintenant un espace symétrique de type non-compact et $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ est une décomposition de Cartan qui permet de définir une métrique sur G et une métrique induite sur G/K, [A1]. On notera $(A \mid B)$ le produit scalaire de deux vecteurs A et B de $\mathfrak{g}$.

Soit $(X_t)_{0 \leq t \leq 1}$ une P-martingale de G/K telle que $X_0 \equiv \pi(e)$. On suppose que X est une diffusion et on notera $\mathscr{D}\tilde{X} = L\, dt$. On suppose que X est non dégénérée et que $\varphi(L)$ et $\varphi(L)^{-1}$ sont bornés. Soit $h$ le relèvement horizontal de X dans G tel que $h_0 = e$. Il existe alors une martingale M de $\mathfrak{p}$ nulle en 0, telle que $h$ s'écrive $\varepsilon(M)$ et X soit égale à $\pi\varepsilon(M)$, [A1].

Soit $g : [0, 1] \to G$ un chemin continu à variation finie tel que $g_0 = e$. Il existe un chemin continu D à valeurs dans $\mathfrak{g}$, à variation finie, nul en 0, tel que $g$ s'écrive $\varepsilon(D)$.

La proposition suivante est le résultat principal de cette partie.

PROPOSITION 7. — *On suppose que* D *est absolument continu sur tout intervalle fermé inclus dans* ]0, 1].

*On note* $d\mathrm{D}=\beta\,dt$ *sur* ]0, 1] *avec* $\beta=\beta_{\mathfrak{k}}+\beta_{\mathfrak{p}}$ $(\beta_{\mathfrak{k}}\in\mathfrak{k},\ \beta_{\mathfrak{p}}\in\mathfrak{p})$.

*On suppose de plus que* $\int_0^1 \|\beta_{\mathfrak{p}_t}\|^2\,dt<\infty$ *et* $\int_0^1 t\,\|\beta_{\mathfrak{k}_t}\|^2\,dt<\infty$.

*Il existe sous ces conditions une probabilité* Q *équivalente à* P *telle que* $\mathrm{Y}=g\mathrm{X}$ *soit une* Q*-martingale. De plus,* $\mathrm{Q}=\mathrm{Z}.\mathrm{P}$ *contient, avec*

$$\mathrm{Z}=\mathscr{E}(\mathrm{N}),\qquad \mathrm{N}=-\frac{1}{2}\int\langle\varphi(\mathrm{L})^{-1}\mathrm{T}\pi(\beta.h),\ d\overset{m}{\mathrm{X}}\rangle.$$

Dans le cas où X est un mouvement brownien, ce résultat est dû à Shigekawa, [Sh].

*Démonstration.* — Un premier lemme établit que si $g$ vérifie les conditions de la proposition, alors $g^{-1}$ vérifie des conditions identiques.

LEMME 8. — *Soit* $g^{-1}=\varepsilon(\mathrm{D}')$. *Sous les conditions de la proposition, on a les propriétés*:

($a'$) D′ *est absolument continu sur tout intervalle fermé inclus dans* ]0, 1].

($b'$) *On note* $d\mathrm{D}'=\beta'\,dt$ *sur* ]0, 1] *avec* $\beta'=\beta'_{\mathfrak{k}}+\beta'_{\mathfrak{p}}$ $(\beta'_{\mathfrak{k}}\in\mathfrak{k},\ \beta'_{\mathfrak{p}}\in\mathfrak{p})$.

*Alors*

$$\int_0^1 \|\beta'_{\mathfrak{p}_t}\|^2\,dt<\infty \qquad et \qquad \int_0^1 t\,\|\beta'_{\mathfrak{k}_t}\|^2\,dt<\infty.$$

Le lemme suivant majore la solution d'une équation différentielle stochastique dans $\mathbb{R}^m$.

LEMME 9. — *Soit* $(\mathrm{S}_t)_{0\leqq t\leqq 1}$ *une semi-martingale de* $\mathbb{R}^m$ *vérifiant*

$$d\mathrm{S}=\sigma(\mathrm{S})\,d\mathrm{B}+b(\mathrm{S})\,dt,\qquad \|\mathrm{S}_0\|=1$$

*avec* $\sigma$ *processus prévisible à valeurs dans* $\mathscr{L}(\mathbb{R}^m,\mathscr{M}(r,m))$, $b$ *processus prévisible à valeurs dans* $\mathscr{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m)$, B *brownien de* $\mathbb{R}^r$.

*On suppose qu'il existe* $\mathrm{C}>0$ *tel que* $\|\sigma\|^2\leqq\mathrm{C}$ *et* $\|b\|^2\leqq\mathrm{C}$.

*Alors*

$$\mathbb{E}[\sup_{t\leqq 1}\|\mathrm{S}_t\|^2]\leqq 3\,e^{15\,\mathrm{C}}.$$

*De plus, si* $\sigma$ *et* $b$ *sont continues et* H *est un vecteur de* $\mathbb{R}^m$ *de norme* 1, *alors l'application* $t\mapsto\mathbb{E}[(\mathrm{S}_t\,|\,\mathrm{H})^2]$ *est de classe* $\mathrm{C}^1$ *et sa dérivée est bornée par* $3\,m\,(\mathrm{C}r+2\sqrt{\mathrm{C}})\,e^{15\,\mathrm{C}}$.

*Démonstration du lemme* 8. — Si $g=\varepsilon(\mathrm{D})$, alors

$$g^{-1}=\varepsilon\left(\int-\mathrm{Ad}(g)\,d\mathrm{D}\right)$$

(conséquence de [HD, L], prop. 5), et comme $g$ est borné, la condition ($a'$) est réalisée.

Pour établir $(b')$, nous écrivons $\beta' = -\mathrm{Ad}(g)(\beta)$ à l'aide de l'égalité $\mathrm{D}' = -\int \mathrm{Ad}(g)\, d\mathrm{D}$. Ensuite, nous décomposons $g$ en un produit $lk$ avec $k$ processus à valeurs dans K et $l$ processus horizontal à valeurs dans G. Cela s'écrit à l'aide de [HD, L], prop. 5,

$$k = \varepsilon\left(\int \beta_{\mathfrak{k}}\, dt\right) \quad \text{et} \quad l = \varepsilon\left(\int \mathrm{Ad}(k)(\beta_{\mathfrak{p}})\, dt\right).$$

Posons $\beta'' = \mathrm{Ad}(k)(\beta)$. Puisque l'application $\mathrm{Ad}(k)$ laisse stables $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{p}$, et induit une isométrie dans chacun des ces espaces, le chemin $\beta''$ vérifie la condition $(b'')$ [$(b'')$ étant l'analogue de $(b')$ pour $\beta''$]. En écrivant $\beta' = -\mathrm{Ad}(l)(\beta'')$, nous allons établir $(b')$.

La base $(\mathrm{H}_i)_{1 \leqq i \leqq n}$ est maintenant choisie orthonormale, les $d$ premiers vecteurs appartenant à $\mathfrak{k}$ et les $n-d$ derniers appartenant à $\mathfrak{p}$.

Nous avons à montrer que

$$\forall i \in \{1, \ldots, d\}, \qquad \int_0^1 t(\beta'^i)^2\, dt < \infty$$

et

$$\forall i \in \{d+1, \ldots, n\}, \qquad \int_0^1 (\beta'^i)^2\, dt < \infty$$

avec

$$\beta'^i = (-\mathrm{Ad}(l)(\beta'') \mid \mathrm{H}_i) = -\beta''^j(\mathrm{Ad}(l)(\mathrm{H}_j) \mid \mathrm{H}_i).$$

Mais d'après [A1], nous avons

$$\mathrm{Ad}(l)(\mathrm{H}_j) = \mathrm{H}_j + \int \mathrm{Ad}(l)([\mathrm{P}_m, \mathrm{H}_j])\, \beta''^m\, dt$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}\beta'^i &= -\beta''^i\left((\mathrm{H}_i \mid \mathrm{H}_j) + \int_0 (\mathrm{Ad}(l)([\mathrm{P}_m, \mathrm{H}_j]) \mid \mathrm{H}_i)\, \beta''^m\, dt\right)\\ &= -\left(\beta''^i + \beta''^j \int_0 (\mathrm{Ad}(l)([\mathrm{P}_m, \mathrm{H}_j]) \mid \mathrm{H}_i)\, \beta''^m\, dt\right);\end{aligned}$$

par un simple calcul nous obtenons

$$\beta'^{i2} \leqq (n+1)\left(\beta''^{i2} + \beta''^{j2}\left(\int_0 (\mathrm{Ad}(l)([\mathrm{P}_m, \mathrm{H}_j]) \mid \mathrm{H}_i)\, \beta''^m\, dt\right)^2\right)$$

et d'après l'inégalité de Jensen,

$$\begin{aligned}\left(\int_0^t (\mathrm{Ad}(l)([\mathrm{P}_m, \mathrm{H}_j]) \mid \mathrm{H}_i)\, \beta''^m\, ds\right)^2 &\leqq t \int_0^t ((\mathrm{Ad}(l)([\mathrm{P}_m, \mathrm{H}_j]) \mid \mathrm{H}_i)\, \beta''^m)^2\, ds\\ &\leqq nt \int_0^t (\mathrm{Ad}(l)([\mathrm{P}_m, \mathrm{H}_j]) \mid \mathrm{H}_i)^2 (\beta''^m)^2\, ds.\end{aligned}$$

Mais $(\mathrm{Ad}(l)([P_m, H_j]) \mid H_i)^2$ est borné par une constante C, donc le dernier terme est inférieur ou égal à

$$C n t \int_0^t \sum_{m=d+1}^{n} (\beta''^m)^2 \, ds = C n t \int_0^1 \| \beta_p'' \|^2 \, ds = C' t.$$

Si $i \in \{d+1, \ldots, n\}$, $\displaystyle\int_0^1 (\beta'^i)^2 \, dt \leqq (n+1) \left( \int_0^1 (\beta''^i)^2 \, dt + C' \int_0^1 t (\beta''^j)^2 \, dt \right)$.

Le premier terme du membre de droite est fini car $i$ est inférieur ou égal à $d$, et le deuxième est fini quel que soit $j$, donc

$$\int_0^1 (\beta'^i)^2 \, dt < \infty.$$

Si $i \in \{1, \ldots, d\}$, $\displaystyle\int_0^1 t (\beta'^i)^2 \, dt \leqq (n+1) \left( \int_0^1 t (\beta''^i)^2 \, dt + C' \int_0^1 t (\beta''^j)^2 \, dt \right)$

et le membre de droite est fini, donc

$$\int_0^1 t (\beta'^i)^2 \, dt < \infty.$$

Le lemme 8 est montré.

*Démonstration du lemme* 9. – Notons $A_t = \sup_{s \leqq t} \| S_s \|^2$; l'égalité

$$S_t = S_0 + \int_0^t \sigma(S_s) \, dB_s + \int_0^t b(S_s) \, ds$$

donne

$$A_t \leqq 3 \left( 1 + \sup_{s \leqq t} \left\| \int_0^t \sigma(S_s) \, dB_s \right\|^2 + \int_0^t \| b(S_s) \|^2 \, ds \right).$$

En utilisant l'inégalité de Doob pour le deuxième terme du membre de droite, nous obtenons

$$\mathbb{E}[A_t] \leqq 3 \left( 1 + 4 \int_0^t \mathbb{E}[\mathrm{tr}(\sigma\sigma^*(S_s))] \, ds + \mathbb{E} \int_0^t \| b(S_s) \|^2 \, ds \right)$$

ce qui donne avec les hypothèses du lemme

$$\mathbb{E}[A_t] \leqq 3 \left( 1 + 4C \int_0^t \mathbb{E}[A_s] \, ds + C \int_0^t \mathbb{E}[A_s] \, ds \right).$$

Notons $\varphi(t) = \mathbb{E}[A_t]$. Alors $\varphi(t) \leqq 3 \left( 1 + 5C \displaystyle\int_0^t \varphi(s) \, ds \right)$ et d'après le lemme de Gronwall, $\varphi(t) \leqq 3 e^{15Ct}$ et en particulier $\varphi(1) \leqq 3 e^{15C}$. La première partie du lemme est montrée.

Supposons maintenant que $\sigma$ et $b$ sont continues, et notons $a = \sigma\sigma^*$, $\mathscr{L} = 1/2 \, a^{ij} D_{ij} + b^i D_i$. Alors si $f(x) = (x \mid H)^2$, on applique la formule d'Ito pour obtenir

$$f(S_t)=f(S_0)+2\int_0^t (S_s\,|\,H)(\sigma\,dB_s\,|\,H)+\int_0^t \mathscr{L}f(S_s)\,ds.$$

La première intégrale est une martingale dans $\mathscr{S}_1$ car c'est l'intégrale stochastique d'une semi-martingale de $\mathscr{S}_2$ par rapport à une semi-martingale de $\mathscr{S}_2$, donc

$$\mathbb{E}[f(S_t)]=(S_0\,|\,H)^2+\mathbb{E}\left[\int_0^t \mathscr{L}f(S_s)\,ds\right],$$

et comme les dérivées secondes de $f$ sont constantes et les dérivées premières proportionnelles à $x$, $\mathscr{L}f(S_s)$ est dans $\mathscr{S}_1$,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \mathscr{L}f(S_s)\,ds\right]=\int_0^t \mathbb{E}[\mathscr{L}f(S_s)]\,ds$$

et un simple calcul permet de vérifier que $|\mathbb{E}[\mathscr{L}f(S_s)]|$ est majoré par $m(Cr+2\sqrt{C})\,\varphi(1)$, donc la deuxième partie du lemme est montrée.

*Démonstration de la proposition.* — Nous allons d'abord montrer que la martingale locale N figurant dans la proposition est égale à la martingale locale N du théorème 2. Ensuite nous montrerons que $\mathscr{E}(N)$ est une martingale uniformément intégrable.

Pour calculer les caractéristiques locales de X, nous allons introduire les notations $\mathscr{D}\tilde{X}=L\,dt$, $\mathscr{D}\tilde{Y}=L'\,dt$, $\mathscr{D}\tilde{h}=l\,dt$, $h'=gh$, $\mathscr{D}\tilde{h}'=l'\,dt$. Comme $g$ est à variation finie, $\mathscr{D}\tilde{g}=g.\beta\,dt$, et puisque $h$ et X sont des martingales, $F(L)\equiv 0$ et $F(l)\equiv 0$.

D'après la proposition 4, $\varphi(l')=g.\varphi(l)$ et $F(l')=g.\beta.h$ et d'après la proposition 5, $\varphi(L')=g.\varphi(L)$ et

$$F(L')\,dt=T\pi(g.\beta.h\,dt+1/2\,[\delta h'_{h'.\mathfrak{k}},\,\delta h'_{h'.\mathfrak{p}}]).$$

Mais puisque $\delta h'=gh.\delta M+g.\beta.h\,dt$ et $gh.\delta M\in h'.\mathfrak{p}$, le crochet de Lie de l'expression de $F(L')$ s'annule et nous avons $F(L')=T\pi(g.\beta.h)$.

D'après le théorème 2, on a

$$N=\int -\frac{1}{2}\langle \varphi(L')^{-1}F(L'),\,\overset{m}{dY}\rangle.$$

Or $\overset{m}{dY}=g.\overset{m}{dX}$, donc

$$N=\int -\frac{1}{2}\langle (g.\varphi(L))^{-1}(g.T\pi(\beta.h)),\,g.\overset{m}{dX}\rangle$$
$$=\int -\frac{1}{2}\langle \varphi(L)^{-1}T\pi(\beta.h),\,\overset{m}{dX}\rangle.$$

Il reste à montrer que Z est une martingale uniformément intégrable.

Soient $T_u = \inf\{t, \langle N, N\rangle_t = u\} \wedge 1$ et $Z^{(u)} = Z^{T_u}$. Alors $Z^{(u)}$ est une martingale uniformément intégrable et d'après le théorème 2, le processus $Y^{T_u}$ est une martingale sous $Q^{(u)} = Z^{(u)}.P$.

Le processus $\langle N, N\rangle_1$ est p. s. fini, donc $T_u$ converge vers 1 lorsque $u$ tend vers l'infini, et $Z_1^{(u)}$ converge vers $Z_1$.

Le processus Z est une surmartingale positive car c'est une martingale locale positive. C'est une martingale uniformément intégrable si et seulement si $(Z_1^{(u)})_{u \in \mathbb{N}}$ est uniformément intégrable. Nous allons donc montrer ce dernier point : Soit $p \in \mathbb{N}^*$;

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_P[Z_1^{(u)} 1_{Z_1^{(u)} > p}] &= Q^{(u)}[Z_1^{(u)} > p] = Q^{(u)}[\mathscr{E}(N_{T_u}) > p] \\
&= Q^{(u)}[\exp(N_{T_u} - 1/2\langle N, N\rangle_{T_u}) > p] \\
&= Q^{(u)}[\exp(-N'_{T_u} + 1/2 < N', N'\rangle_{T_u}) > p] \\
&\text{si on pose } N'_t = -N_t + \langle N, N\rangle_t, \\
&\leqq Q^{(u)}[-N'_{T_u} > 1/2 \operatorname{Log} p] + Q^{(u)}[\langle N', N'\rangle_{T_u} > \operatorname{Log} p].
\end{aligned}
$$

Une majoration uniforme de l'espérance de $\langle N', N'\rangle_{T_u}$ nous permettra de conclure.

LEMME 10. — *Le processus* $N'^{T_u}$ *est une martingale pour* $Q^{(u)}$, *et il existe une constante* C *strictement positive indépendante de u telle que*

$$\mathbb{E}_{Q^{(u)}}[\langle N', N'\rangle_{T_u}] < C.$$

Admettons pour l'instant ce lemme. Nous avons

$$Q^{(u)}[-N'_{T_u} > 1/2 \operatorname{Log} p] \leqq \frac{2}{\operatorname{Log} p} \mathbb{E}_{Q^{(u)}}[|N'_{T_u}|] \leqq \frac{2}{\operatorname{Log} p} \sqrt{\mathbb{E}_{Q^{(u)}}[(N'_{T_u})^2]},$$

d'après l'inégalité de Jensen. En utilisant successivement le fait que $N'^{T_u}$ est une martingale et la majoration du lemme précédent, nous obtenons

$$\frac{2}{\operatorname{Log} p} \sqrt{\mathbb{E}_{Q^{(u)}}[(N'_{T_u})^2]} = \frac{2}{\operatorname{Log} p} \sqrt{\mathbb{E}_{Q^{(u)}}[\langle N', N'\rangle_{T_u}]} < \frac{2\sqrt{C}}{\operatorname{Log} p}.$$

Il reste à écrire $Q^{(u)}[\langle N', N'\rangle_{T_u} > \operatorname{Log} p] \leqq \dfrac{C}{\operatorname{Log} p}$ pour établir que

$$\mathbb{E}_P[Z_1^{(u)} 1_{Z_1^{(u)} > p}] \leqq \frac{2\sqrt{C}}{\operatorname{Log} p} + \frac{C}{\operatorname{Log} p}$$

et que $Z_1^{(u)})_{u \in \mathbb{N}}$ est uniformément intégrable. Ceci achève la démonstration de la proposition.

*Démonstration du dernier lemme.* — Une application directe du théorème de Girsanov dans le cas réel nous dit que $N'^{T_u}$ est une martingale. Si nous remarquons ensuite que $\frac{1}{Z^{(u)}} = \mathscr{E}(N'^{T_u})$, si nous appliquons le théorème 2 et utilisons les calculs faits pour N, nous pouvons écrire

$$N'^{T_u} = \int_0^{T_u} -\frac{1}{2}\langle \varphi(L')^{-1} T\pi(\beta'.h'), d_{Q^{(u)}} \overset{m}{Y} \rangle,$$

donc

$$\langle N', N' \rangle_{T_u} = \int_0^{T_u} \frac{1}{2}\langle \varphi(L')^{-1} T\pi(\beta'.h'), T\pi(\beta'.h') \rangle \, dt.$$

Notons C′ une constante qui majore la norme de $\frac{1}{2}\varphi(L')^{-1}$. Alors

$$\langle N', N' \rangle_{T_u} \leqq C' \int_0^{T_u} \| \pi(\mathrm{Ad}(h'^{-1})(\beta') \|^2 \, dt,$$

et

$$\begin{aligned} \| \pi(\mathrm{Ad}(h'^{-1})(\beta')) \|^2 &= (\mathrm{Ad}(h'^{-1})(\beta') \mid P_i)^2 \\ &= \sum_{i=d+1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} \beta'^j (\mathrm{Ad}(h'^{-1})(H_j) \mid P_i) \right)^2 \\ &\leqq n(\beta'^j)^2 (\mathrm{Ad}(h'^{-1})(H_j) \mid P_i)^2. \end{aligned}$$

Soit M′ le processus à valeurs dans $\mathfrak{g}$, nul en 0, tel que $h' = \varepsilon(M')$.

Soit $(S_j)_t = \mathrm{Ad}(h_t'^{-1})(H_j) = \mathrm{Ad}(\varepsilon(M')_t^{-1})(H_j)$. Alors d'après [HD, L], lemme 3,

$$\delta S_j = \mathrm{ad}(S_j)(\delta M') = \mathrm{ad}(S_j)(H_k)(\delta M'^k),$$

donc

$$\begin{aligned} dS_j &= \mathrm{ad}(S_j)(dM') + 1/2\, d\langle \mathrm{ad}(S_j)(H_k), M'^k \rangle \\ &= \mathrm{ad}(S_j)(dM') + 1/2\, \mathrm{ad}(\mathrm{ad}(S_j)(H_l))(H_k)\, d\langle M'^k, M'^l \rangle. \end{aligned}$$

Choisissons $u$ un entier naturel et arrêtons tous les processus en $T_u$. Comme M′ est une $Q^{(u)}$-martingale et une diffusion qui admet les mêmes bornes que $h'$, il existe une constante $C_j$, des processus $\sigma_j$ et $b_j$ et un brownien B sur $\mathfrak{g}$ vérifiant les hypothèses du lemme 9. Nous en déduisons que $S_j$ est de carré intégrable sous $Q^{(u)}$ et que l'application

$$f_{ji} : t \mapsto \mathbb{E}_{Q^{(u)}}[((S_j)_t \mid P_i)^2]$$

est de classe $C^1$ et bornée par une constante C″ indépendante de $u$. Si $j \in \{1, \ldots, d\}$, $f_{ji}(0) = 0$ donc $f_{ji}$ est $O(t)$ et $\frac{f_{ij}}{t}$ est borné par une constante

A indépendante de $u$. Donc

$$\mathbb{E}_{Q^{(u)}}[\langle N', N' \rangle_{T_u}] \leqq C' n \int_0^1 (\beta'^j)^2 f_{ji}(t)\, dt$$
$$\leqq C' An \sum_{j=1}^{d} \int_0^1 t(\beta'^j)^2\, dt + C' C'' n \sum_{j=d+1}^{n} \int_0^1 (\beta'^j)^2\, dt$$

et ceci est fini et indépendant de $u$. Le lemme est montré.

*Remarque.* — La martingale N qui sert à déterminer le changement de probabilité dans la proposition 7 s'écrit

$$N = -\frac{1}{2}\int \langle \varphi(L)^{-1} T \pi(\beta . h), \overset{m}{dX} \rangle.$$

Elle ne dépend que de la projection orthogonale de $\mathrm{Ad}(h^{-1})(\beta)$ sur $\mathfrak{p}$. Si on ne suppose plus que D est déterministe, on peut donc choisir la composante sur $\mathfrak{k}$ de $\mathrm{Ad}(h^{-1})(dD)$ aussi grande que l'on veut.

## RÉFÉRENCES


[A1] M. ARNAUDON, *Semi-martingales dans les espaces homogènes*, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. **29**, n° 2, 1993.

[A2] M. ARNAUDON, Caractéristiques locales des semi-martingales et changements de probabilités, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 313, série I, 1991, p. 175-178.

[E] M. EMERY, *Stochastic Calculus in Manifolds*, Springer Verlag, 1989.

[HD, L] M. HAKIM-DOWEK et D. LÉPINGLE, L'exponentielle stochastique des groupes de Lie, Séminaire de Probabilités, 20, *Lecture Notes in Mathematics* 1204, 1986, p. 352-374.

[H] S. HELGASON, *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Academic Press, 1978.

[M] P. A. MEYER, Géométrie stochastique sans larmes, Séminaire de Probabilités 15, *Lecture Notes in Mathematics* 850, Springer 1981.

[N] K. NOMIZU, Invariant affine connections on homogeneous spaces, *Amer. J. Math.*, vol. **76**, 1954, p. 33-65 (MR 15, 468).

[Ns] J. R. NORRIS, *Covariant stochastic calculus and applications to heat kernels*, Preprint de l'université de Cambridge.

[S] L. SCHWARTZ, Géométrie différentielle du deuxième ordre, semi-martingales et Équations Différentielle Stochastiques sur une variété différentielle, Séminaire de Probabilités 16, *LN* 921, Springer, 1982.

[Sh] I. SHIGEKAWA, *Transformations of the Brownian motion on a Lie group*, Tanigushi Symp. SA. Katata, 1982.

[S, V] D. W. STROOCK et S. R. S. VARADHAN, *Multidimensional Diffusion Processes*, Springer Verlag, 1979.


(*Manuscrit reçu le* 22 *novembre* 1991;
*révisé le* 4 *juillet* 1992.)