Connexions et martingales dans les groupes de Lie

Marc Arnaudon

Dans la première partie, nous faisons quelques rappels sur les martingales dans les variétés munies de connexions qui peuvent avoir une torsion non nulle, puis nous étudions le cas des groupes de Lie. Lorsque ceux-ci sont munis de leur connexion gauche, Hakim-Dowek et Lépingle ont montré que les martingales du groupe issues de l'élément neutre sont exactement les exponentielles stochastiques des martingales locales de l' algèbre de Lie ([HD.L]).

Dans la deuxième partie figurent les décompositions des semi-martingales en produits de martingales et processus à variation finie obtenues par Hakim-Dowek et Lépingle, et nous y ajoutons des relations entre exponentielle stochastique droite et exponentielle stochastique gauche, et des relations entre une semi-martingale et son inverse.

On détermine ensuite les équations du développement des semi-martingales relativement à une connexion invariante à gauche, et on donne une solution explicite lorsque l'application bilinéaire associée à la connexion est un crochet de Lie sur l'algèbre de Lie du groupe.

1 Connexions et martingales

Notations et définitions

Si b est une forme bilinéaire sur un espace vectoriel E, on note $\overline{b}$ la forme bilinéaire qui à A, B dans E associe $b(B,A)$ et b^S la symétrisée de b ($b^S = \frac{1}{2}(b+\overline{b})$).

On désignera par V, W deux variétés C^∞ munies de connexions ∇ et ∇'. Rappelons la relation entre la dérivation covariante ∇ et l'application Hess associée : si A et B sont deux champs de vecteurs et f est une fonction C^∞ sur V, $\text{Hess}\, f(A,B) = \nabla df(A,B) = ABf - \nabla_A Bf$. La correspondance bijective entre les connexions ∇ et les applications Hess nous conduira à dénommer connexion l'application Hess. Un chemin γ de classe C^∞ sur V est une géodésique si $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$ ou encore si pour toute f de classe C^∞ sur V, $(f\circ\gamma)'' = \text{Hess}\, f(\dot\gamma,\dot\gamma)$.

On dit qu'une application φ de V dans W est affine lorsque pour toute f appartenant à $C^\infty(V)$, $\text{Hess}(f\circ\varphi) = \varphi^*(\text{Hess}' f)$.

On dit qu'une semi-martingale X à valeurs dans V est une martingale lorsque pour toute f appartenant à $C^\infty(V)$, $f(X) - f(X_0) - \frac{1}{2}\int \text{Hess}\, f(dX, dX)$ est une martingale locale réelle ([E1 4.2]).

Remarques

1. Si X est une semi-martingale à valeurs dans V et si b est une section C^∞ de $T^*V \otimes T^*V$, on a $\displaystyle\int b(dX,dX) = \int b^S(dX,dX)$. Par conséquent, les martingales pour Hess sont exactement les martingales pour Hess^S.

2. Les géodésiques pour Hess sont égales aux géodésiques pour Hess^S.

Nous pouvons énoncer la proposition suivante

Proposition 1 *Soit φ une application C^∞ de V dans W. Il y a équivalence entre*

(i)- pour toute géodésique γ de V, $\varphi\circ\gamma$ est une géodésique de W ;

(ii)- pour toute martingale X à valeurs dans V, $\varphi\circ X$ est une martingale à valeurs dans W ;

(iii)- l'application φ de (V, Hess^S) dans (W, Hess'^S) est affine.

Cette proposition est énoncée et montrée dans [E2 Prop 10]. On obtient aussi une démonstration en utilisant le résultat dans le cas des connexions sans torsion ([E1 4.32]) et la remarque qui précède.

Soit maintenant G un groupe de Lie muni des connexions Hess^L et Hess^R définies par $\mathrm{Hess}^L f(A,B) = ABf$ (resp.$\mathrm{Hess}^R f(A,B) = ABf$) si A et B sont des champs de vecteurs invariants à gauche (resp. à droite) et f une fonction C^∞ sur G. La dérivation covariante ∇^L (resp. ∇^R) associée vérifie $\nabla^L_A B = 0$ (resp.$\nabla^R_A B = 0$) si A et B sont des champs de vecteurs invariants à gauche (resp. à droite).

Avec les dérivations covariantes, nous montrons que les sous-groupes à 1 paramètre sont des géodésiques pour les deux connexions. De plus, les applications L_g (resp. R_g) sont affines pour Hess^L (resp. Hess^R). Par conséquent, les géodésiques pour Hess^L (resp. Hess^R) s'écrivent $t \mapsto g \exp tA_e$ (resp. $t \mapsto (\exp tA'_e)g$) avec g dans G et A_e, A'_e dans T_eG. Mais si nous choisissons $A'_e = \mathrm{Ad}(g)(A_e)$, nous obtenons $(\exp tA'_e)g = \mathrm{Int}(g)(\exp tA_e)g = g \exp tA_e$. Nous avons les propriétés suivantes :

Propriétés

1- L'ensemble des géodésiques pour Hess^R est égal à l'ensemble des géodésiques pour Hess^L.

2-L'ensemble des martingales pour Hess^R est égal à l'ensemble des martingales pour Hess^L.

3-$(\mathrm{Hess}^R)^S = (\mathrm{Hess}^L)^S$. Nous noterons Hess^S cette connexion et ∇^S la dérivation covariante associée.

4-L'application de (G, Hess^S) dans lui-même qui à g associe g^{-1} est affine.

Démonstration

1- est déjà montré. Pour les propriétés 2 et 3, on utilise la proposition avec $id\ :\ (G, \mathrm{Hess}^L) \to (G, \mathrm{Hess}^R)$ et son inverse. Pour la propriété 4, on utilise la proposition avec l'application φ de (G, Hess^L) dans (G, Hess^L) qui à g associe g^{-1}, en remarquant qu'elle conserve les géodésiques.

Nous pouvons montrer directement un résultat plus fort que la propriété 3 :

Proposition 2

$$\mathrm{Hess}^R = \overline{\mathrm{Hess}^L}.$$

Démonstration

Soit $g \in G$, et soient $C, D \in T_gG$. On note A et B (resp. A' et B') les champs invariants à gauche (resp. à droite) tels que $A_g = C$, $B_g = D$ (resp. $A'_g = C$, $B'_g = D$). Alors $A'_e = \mathrm{Ad}(g)(A_e)$ et $B'_e = \mathrm{Ad}(g)(B_e)$. Soit $f \in C^\infty(G)$. Nous avons

$$\mathrm{Hess}^L f(C,D) = A_g(Bf) = \frac{d}{ds}(Bf)(g\exp(sA_e))\ |_{s=0} = \frac{d}{ds}\frac{d}{dt} f\left(g\exp(sA_e)\exp(tB_e)\right)\ |_{s=t=0}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \mathrm{Hess}^R f(D,C) &= B'_g(A'f) = \frac{d}{dt}(A'f)((\exp(tB'_e))g)\ |_{t=0} \\ &= \frac{d}{ds}\frac{d}{dt} f\left((\exp(sA'_e)\exp(tB'_e))g\right)\ |_{s=t=0} \\ &= \frac{d}{ds}\frac{d}{dt} f\left(g\exp(sA_e)\exp(tB_e)\right)\ |_{s=t=0} = \mathrm{Hess}^L f(C,D). \end{aligned}$$

La proposition est montrée.

Nous allons maintenant déterminer les martingales pour Hess^L (que nous noterons aussi Hess), en utilisant l'exponentielle stochastique de Hakim-Dowek et Lépingle [HD.L]. Si M est une semi-martingale à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G, l'exponentielle stochastique $\varepsilon(M)$ est la solution issue de e de l'équation différentielle stochastique de Stratonovitch $\delta X = (L_X)_* \delta M$. Si f est une fonction C^∞ sur G et (H_i) une base de $\mathfrak{g}$, nous avons l'égalité

$$f(X) - f(X_0) = \int_0 (H_i f)(X)\, \delta M^i \qquad \text{[HD.L]}.$$

En utilisant la correspondance entre l' exponentielle stochastique et son inverse, le logarithme stochastique ([HD.L (Théorème 4)]), nous obtiendrons la proposition suivante :

Proposition 3 *Les martingales pour* Hess *sont exactement les processus* $X_0\mathcal{E}(M)$ *où* M *est une martingale locale à valeurs dans* $\mathfrak{g}$.

Hakim-Dowek et Lépingle obtiennent un résultat plus fort en montrant que l'exponentielle stochastique est le développement des semi-martingales pour la connexion gauche.

Avant de démontrer la proposition, nous allons montrer le lemme suivant :

Lemme 4 *Soit* (H_i) *une base de* $\mathfrak{g}$. *Si* $M = M^i H_i$ *est une semi-martingale de* $\mathfrak{g}$, $X = \mathcal{E}(M)$ *et* b *est une section de* $T^*G \otimes T^*G$, *alors*

$$\int b(dX, dX) = \int b(X)(H_i, H_j) d < M^i, M^j > .$$

Démonstration du lemme

Il suffit de le montrer pour $b = df \otimes dh$ et ensuite de remarquer d'une part que b est somme d'éléments de la forme $l\, df \otimes dh$, et d'autre part que $\int (l\, df \otimes dh)(dX, dX) = \int l(X)\, d(\int (df \otimes dh)(dX, dX)$ ([E1 (2.23 et 3.8)]). Si $b = df \otimes dh$, on a

$$\begin{aligned} \int b(dX, dX) &= < f(X), h(X) >=< \int H_i f(X)\, \delta M^i, \int H_j f(X)\, \delta M^j > \\ &= \int H_i f(X) H_j h(X)\, d < M^i, M^j >= \int b(X)(H_i, H_j) d < M^i, M^j > . \end{aligned}$$

Le lemme est montré.

Démonstration de la proposition

Soient (H_i) une base de $\mathfrak{g}$, $M = M^i H_i$ une martingale locale à valeurs dans $\mathfrak{g}$, et f une fonction sur G. Alors

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t H_j f(X_s)\, \delta M_s^j = \int_0^t H_j f(X_s)\, dM_s^j \ + \ \frac{1}{2} \int_0^t d< H_j f(X), M^j >_s.$$

Mais $H_j f(X_t) - H_j f(X_0) = \int_0^t H_i H_j f(X_s)\, \delta M_s^i$ par définition de l'exponentielle stochastique, donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^t d< H_j f(X), M^j >_s &= \frac{1}{2} \int_0^t H_i H_j f(X_s)\, d< M^i, M^j >_s \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \text{Hess}\, f(X_s)(H_i, H_j) d< M^i, M^j >_s = \frac{1}{2} \int_0^t \text{Hess}\, f(dX, dX). \end{aligned}$$

La dernière égalité a lieu d'après le lemme 4 et nous en déduisons que X est une martingale ([E1 (4.2)]).

Réciproquement, supposons que X soit une martingale. Soit $M = \mathcal{L}(X)$ le logarithme stochastique de X. Alors ([HD.L (Théorème 4)]) $X = X_0\mathcal{E}(M)$. Montrons que M est une martingale locale. Soit θ une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$. Il suffit de montrer que $\int \langle \theta, dM \rangle$ est une martingale locale réelle. Nous pouvons considérer θ comme une forme différentielle invariante à gauche sur TG. Ainsi,

$$\int \langle \theta(e), dM \rangle = \int \langle \theta(e), (H_j)_e \rangle dM^j = \int \langle \theta(X), (H_j)_X \rangle dM^j.$$

La forme θ peut s'écrire $\sum g^i\, df^i$ avec g^i et f^i fonctions de classe C^∞ sur G ([E1 2.17]), et l'égalité devient

$$\int \langle \theta(e), dM \rangle = \int g^i(X)\, d\left(\int \langle df^i(X), (H_j)_X \rangle dM^j \right).$$

Il suffit maintenant de montrer que pour tout i, $\int \langle df^i(X), (H_j)_X \rangle dM^j$ est une martingale locale. Dans la première partie de la démonstration, nous avons mis ce terme sous la forme $f^i(X) - f^i(X_0) - \frac{1}{2} \int_0 \text{Hess}\, f^i(dX, dX)$; c'est une martingale locale car X est une martingale. La démonstration est achevée.

2 Décomposition des semi-martingales dans un groupe de Lie

Nous noterons toujours dans la suite ε l'exponentielle stochastique à gauche et $\mathcal{L}$ son logarithme stochastique ([HD.L]). Nous noterons ε' l'exponentielle stochastique à droite et $\mathcal{L}'$ son logarithme stochastique. Si M est une semi-martingale à valeurs dans T_eG, $\varepsilon'(M)$ est la solution issue de e de l'équation différentielle stochastique de Stratonovitch $\delta X = (R_X)_*(\delta M)$.

Rappelons deux résultats de Hakim-Dowek et Lépingle reliant la somme dans l'algèbre de Lie et le produit dans le groupe ([HD.L (Proposition 5)]. Soient M et N deux semi-martingales à valeurs dans $\mathfrak{g}$, X et Y deux semi-martingales à valeurs dans G. Alors

$$\varepsilon(M+N) = \varepsilon\left(\int \mathrm{Ad}\,(\varepsilon(N))\, \delta M\right) \varepsilon(N) \tag{1}$$

$$\mathcal{L}(XY) = \int \mathrm{Ad}(Y^{-1})\, \delta\mathcal{L}(X) + \mathcal{L}(Y). \tag{2}$$

Applications

a- Décomposition en produit de martingale et processus à variation finie

Ces décompositions figurent dans l'article de Hakim-Dowek et Lépingle, bien que la notion de martingale dans une variété ne soit pas utilisée.

Soient M une martingale locale et A un processus à variation finie à valeurs dans T_eG. Les quatre égalités ci-dessous nous donnent des décompositions en produit d'une martingale et d'un processus à variation finie.

$$\varepsilon(M+A) = \varepsilon\left(\int \mathrm{Ad}\,(\varepsilon(M))\, dA\right) \varepsilon(M) \tag{3}$$

$$\varepsilon(M+A) = \varepsilon\left(\int \mathrm{Ad}\,(\varepsilon(A))\, dM\right) \varepsilon(A) \tag{4}$$

$$\varepsilon'(M+A) = \varepsilon'(M)\varepsilon'\left(\int \mathrm{Ad}\left(\varepsilon'(M)^{-1}\right) dA\right) \tag{5}$$

$$\varepsilon'(M+A) = \varepsilon'(A)\varepsilon'\left(\int \mathrm{Ad}\left(\varepsilon'(A)^{-1}\right) dM\right). \tag{6}$$

Notons que les intégrales de Stratonovitch dans T_eG deviennent des intégrales d'Itô car l'un des deux processus est toujours à variation finie.

b- Décomposition du logarithme stochastique d'un produit

Soient Y une martingale et B un processus à variation finie, à valeurs dans G. Alors

$$\mathcal{L}(BY) = \int \mathrm{Ad}(Y^{-1})\, d\mathcal{L}(B) + \mathcal{L}(Y) \tag{7}$$

$$\mathcal{L}(YB) = \int \mathrm{Ad}(B^{-1})\, d\mathcal{L}(Y) + \mathcal{L}(B) \tag{8}$$

$$\mathcal{L}'(YB) = \mathcal{L}'(Y) + \int \mathrm{Ad}(Y)\, d\mathcal{L}'(B) \tag{9}$$

$$\mathcal{L}'(BY) = \mathcal{L}'(B) + \int \mathrm{Ad}(B)\, d\mathcal{L}'(Y). \tag{10}$$

c- Relations entre l'exponentielle à gauche, l'exponentielle à droite ; inverse d'une semi-martingale

Soit M une semi-martingale à valeurs dans T_eG.

Proposition 5 *Nous avons les relations suivantes entre l'exponentielle à gauche, l'exponentielle à droite et l'inverse :*

$$
\begin{aligned}
\varepsilon'(M) &= \varepsilon\left(\int \mathrm{Ad}(\varepsilon(-M))(\delta M)\right) && (11)\\
\varepsilon(M) &= \varepsilon'\left(\int \mathrm{Ad}\left(\varepsilon'(-M)^{-1}\right)(\delta M)\right) && (12)\\
\varepsilon(M)^{-1} &= \varepsilon'(-M) && (13)\\
\varepsilon'(M)^{-1} &= \varepsilon(-M). && (14)
\end{aligned}
$$

Si maintenant $X \doteq X_0\varepsilon(M)$, alors

$$
\begin{aligned}
X &= \varepsilon\left(\mathrm{Ad}(X_0)(M)\right) X_0 && (15)\\
X &= \varepsilon'\left(\int \mathrm{Ad}(X)\,\delta M\right) X_0. && (16)
\end{aligned}
$$

Nous utiliserons un lemme pour montrer cette proposition.

Lemme 6 *Les notations sont les mêmes que dans la dernière partie de la proposition. Alors*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Int}(X_0)(\varepsilon(M)) &= \varepsilon\left(\mathrm{Ad}(X_0)(M)\right) && (17)\\
\mathrm{Int}(X_0)(\varepsilon'(M)) &= \varepsilon'\left(\mathrm{Ad}(X_0)(M)\right). && (18)
\end{aligned}
$$

Démonstration du lemme

Soient $Y = \mathrm{Int}(X_0)(\varepsilon(M))$, $Z = \varepsilon(M)$ et $f \in C^\infty(G)$.

$$
\begin{aligned}
f(Y) &= \int \langle d(f \circ \mathrm{Int}(X_0)), \delta\varepsilon(M)\rangle = \int \langle d(f \circ \mathrm{Int}(X_0) \circ L_Z), \delta M\rangle\\
&= \int \langle d(f \circ L_{\mathrm{Int}(X_0)(Z)} \circ \mathrm{Int}(X_0)), \delta M\rangle = \int \langle (\mathrm{Ad}(X_0))^* d(f \circ L_{\mathrm{Int}(X_0)(Z)}), \delta M\rangle\\
&= \int \langle d(f \circ L_Y), \delta\left(\mathrm{Ad}(X_0)(M)\right)\rangle.
\end{aligned}
$$

Cette dernière égalité veut dire que $Y = \varepsilon\left(\mathrm{Ad}(X_0)(M)\right)$.

Démonstration de la proposition

Montrons (13) : Posons $X = \varepsilon(M)$ et $X' = \varepsilon'(-M)$. Alors $\delta(XX') = (L_X)_*(\delta X') + (R_{X'})_*(\delta X) = (L_X \circ R_{X'})_*(\delta(-M)) + (L_X \circ R_{X'})_*(\delta M) = 0$ donc $XX' \equiv e$.
Montrons (11) : On calcule $\varepsilon(M - M)$ avec la formule (1) et on obtient

$$
e = \varepsilon(M - M) = \varepsilon\left(\int \mathrm{Ad}\left(\varepsilon(M)\right)\, \delta(-M)\right) \varepsilon(M)
$$

donc $\varepsilon(M)^{-1} = \varepsilon\left(\int \mathrm{Ad}\left(\varepsilon(M)\right)\, \delta(-M)\right)$, et avec l'égalité (13), nous obtenons

$$
\varepsilon'(-M) = \varepsilon\left(\int \mathrm{Ad}\left(\varepsilon(M)\right)\, \delta(-M)\right)
$$

et en remplaçant M par $-M$,

$$
\varepsilon'(M) = \varepsilon\left(\int \mathrm{Ad}\left(\varepsilon(-M)\right)\, \delta(M)\right).
$$

Les égalités (14) et (12) se montrent comme (13) et (11).
L'égalité (15) est une conséquence directe du lemme.
Il nous reste maintenant à montrer (16).

Posons $Y = \varepsilon(M)$. D'après (12) et (13), $Y = \varepsilon'\left(\int \mathrm{Ad}(Y)(\delta M)\right)$, et

$$
X_0 Y = X_0\varepsilon'\left(\int \mathrm{Ad}(Y)(\delta M)\right) = \varepsilon'\left(\mathrm{Ad}(X_0)\left(\int \mathrm{Ad}(Y)(\delta M)\right)\right) X_0 = \varepsilon'\left(\int \mathrm{Ad}(X)(\delta M)\right) X_0
$$

(la dernière égalité est un calcul d'intégrales de Stratonovitch dans les espaces vectoriels et la précédente résulte du lemme (6)).Ceci achève la démonstration de la proposition.

Proposition 7 *Les formules (11), (12) et (16) sont encore vraies si on remplace les intégrales de Stratonovitch vectorielles par des intégrales d'Itô, i.e. nous avons les égalités*

$$\begin{aligned} \varepsilon'(M) &= \varepsilon\left(\int \mathrm{Ad}(\varepsilon(-M))(dM)\right) & (19)\\ \varepsilon(M) &= \varepsilon'\left(\int \mathrm{Ad}\left(\varepsilon'(-M)^{-1}\right)(dM)\right) & (20)\\ X &= \varepsilon'\left(\int \mathrm{Ad}(X)\,dM\right) X_0 & (21)\end{aligned}$$

si on pose $X = X_0\varepsilon(M)$.

Démonstration

On est ramené dans tous les cas à montrer une égalité de la forme $< \mathrm{Ad}(\varepsilon(M)), M >= 0$. Ce crochet s'écrit encore $< \mathrm{Ad}(\varepsilon(M))(H_i), M^i >$. Si on pose maintenant $h_i(g) = \mathrm{Ad}(g)(H_i)$, on peut écrire

$$\begin{aligned} h_i(\varepsilon(M)) &= H_i + \int_0 T_e(h_i \circ L_{\varepsilon(M)})\,\delta M \\ &= H_i + \int_0 \mathrm{Ad}(\varepsilon(M))([H_j, H_i])\,\delta M^j, \end{aligned}$$

ce qui nous donne pour le crochet,

$$< \mathrm{Ad}(\varepsilon(M), M >= \int_0 \mathrm{Ad}(\varepsilon(M))([H_i, H_j])\, d < M^i, M^j > .$$

Le crochet de Lie $[H_i, H_j]$ est antisymétrique et le crochet de martingales $d < M^i, M^j >$ est symétrique, donc la somme précédente est nulle. Ceci achève la démonstration.

3 Développement des semi-martingales dans un groupe de Lie

Hakim-Dowek et Lépingle ont montré que l'exponentielle stochastique gauche était le développement des semi-martingales pour la connexion ∇^L. De la même façon, nous pouvons montrer que l'exponentielle stochastique droite est le développement des semi-martingales à valeurs dans l'algèbre de Lie, pour la connexion ∇^R. Plus généralement, nous allons montrer le résultat suivant :

Proposition 8 *Soient M une semi-martingale à valeurs dans T_eG, telle que $M_0 = 0$, et λ un nombre réel. Alors la semi-martingale $\varepsilon(\lambda M)\,\varepsilon'((1-\lambda)M)$ est le développement de M pour la connexion $\nabla^\lambda = \lambda\nabla^L + (1-\lambda)\nabla^R$.*

Avant de démontrer ceci, nous allons énoncer et montrer quelques lemmes que nous utiliserons par la suite.

Si g est un élément de G et A appartient à TG, L_g (resp. R_g) désignera la translation à gauche (resp. à droite) et $g.A$ (resp. $A.g$) désignera le vecteur $(L_g)_*(A)$ (resp. $(R_g)_*(A)$).

Lemme 9 *Notons $X' = \varepsilon(\lambda M)$, $X'' = \varepsilon'((1-\lambda)M)$ et $X = X'X''$. Alors $\delta X = X'.\delta M.X''$.*

Démonstration

$\delta X = \delta X'.X'' + X'.\delta X'' = X'.\lambda\delta M.X'' + X'.(1-\lambda)\delta M.X'' = X'.\delta M.X''$.

Lemme 10 *Pour tout g appartenant à G, les applications L_g et R_g sont affines pour les connexions ∇^λ, i.e. pour toute fonction f de classe C^∞ sur G, $\mathrm{Hess}^\lambda(f\circ L_g) = (L_g)^*(\mathrm{Hess}^\lambda f)$ et $\mathrm{Hess}^\lambda(f\circ R_g) = (R_g)^*(\mathrm{Hess}^\lambda f)$.*

Démonstration
Remarquons qu'il suffit de montrer ceci pour les connexions ∇^R et ∇^L qui engendrent l'espace affine des connexions ∇^λ. Il suffit en fait de le montrer pour ∇^L, et nous le déduirons pour ∇^R par symétrie. Remarquons aussi que $(L_g)_*$ et $(R_g)_*$ associent des éléments de $\mathfrak{g}$ aux éléments de $\mathfrak{g}$. Soient donc H_1 et H_2 deux champs invariants à gauche. Alors $\mathrm{Hess}^L(f \circ R_g)(H_1, H_2) = H_1 H_2 (f \circ R_g) = (((R_g)_* H_1)((R_g)_* H_2) f) \circ R_g = (\mathrm{Hess}^L f(((R_g)_* H_1), ((R_g)_* H_2)) \circ R_g$ car $((R_g)_* H_1)$ et $((R_g)_* H_2)$ sont invariants à gauche, et le dernier terme est égal à $(R_g)^*(\mathrm{Hess}^L f)(H_1, H_2)$. La démonstration est identique avec L_g.

Lemme 11 *Soient H_1 et H_2 deux champs de vecteurs invariants à gauche, H_1' et H_2' deux champs de vecteurs invariants à droite, tels que $(H_1)_e = (H_1')_e$, et $(H_2)_e = (H_2')_e$. Alors $(H_1')_e H_2' = (H_2)_e H_1$.*

Démonstration
Elle est identique à celle de la proposition 2.

Lemme 12 *Soient H un champ de vecteurs invariant à gauche et (H_j) une base de champs de vecteurs invariants à gauche, H' un champ de vecteurs invariant à droite et (H_j') une base de champs de vecteurs invariants à droite, tels que $H_e = H_e'$ et $(H_j)_e = (H_j')_e$, f une fonction de classe C^∞ sur G, et h la fonction de $G \times G$ dans $\mathbb{R}$ qui à (g, g') associe $(g.H_e.g')f$. Alors en reprenant les notations du lemme (9), nous avons*

$$\delta h(X', X'') = (H_j)_{X'} H (f \circ R_{X''}) \lambda\, \delta M^j \ + \ (H_j')_{X''} H (f \circ L_{X'})(1-\lambda)\, \delta M^j.$$

Démonstration
Notons $h(g, g') = h_g(g') = h^{g'}(g)$. Nous avons $h_g(g') = H_{g'}'(f \circ L_g)$ et $h^{g'}(g) = H_g(f \circ R_{g'})$, donc

$$dh_g(g')(H_j')_{g'} = (H_j')_{g'} H'(f \circ L_g) \quad \text{et} \quad dh^{g'}(g)(H_j)_g = (H_j)_g H(f \circ R_{g'}).$$

De plus, $\delta h(X', X'') = dh^{X''}(X')\,\delta X' \ + \ dh_{X'}(X'')\,\delta X''$, et $\delta X' = (H_j)_{X'} \lambda \delta M^j$,
$\delta X'' = (H_j')_{X''}(1-\lambda)\delta M^j$. En rassemblant tout cela, nous obtenons

$$\delta h(X', X'') = (H_j)_{X'} H (f \circ R_{X''}) \lambda\, \delta M^j \ + \ (H_j')_{X''} H' (f \circ L_{X'})(1-\lambda)\, \delta M^j.$$

Démonstration de la proposition
Utilisons les notations du dernier lemme. Nous allons d'abord montrer que $U_t = X'.H_e.X''$ est le transport parallèle de H_e au dessus de $X = X'X''$. D'après [E1 8.11], il suffit de montrer pour cela que pour toute fonction f de classe C^∞ sur G,

$$U_t f - U_0 f = \int_0^t \mathrm{Hess}^\lambda f(\delta X_s, U_s).$$

Calculons le terme de droite :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}^\lambda f(\delta X, U) &= \mathrm{Hess}^\lambda f(X'.(H_j)_e.X'', X'.H_e.X'')\delta M^j \\
&= \mathrm{Hess}^\lambda (f \circ L_{X'} \circ R_{X''})((H_j)_e, H_e)\delta M^j \\
&= (\lambda (H_j)_e H + (1-\lambda) H_e H_j)(f \circ L_{X'} \circ R_{X''})\delta M^j.
\end{aligned}$$

(on utilise successivement les lemmes (9), (10) et (11)).

Calculons maintenant le terme de gauche. En utilisant le lemme (12), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\delta U f &= H_{j X'} H (f \circ R_{X''}) \lambda \delta M^j + H_{j X''}' H' (f \circ L_{X'})(1-\lambda)\delta M^j \\
&= H_{j_e} H (f \circ L_{X'} \circ R_{X''}) \lambda \delta M^j + H_{j_e}' H' (f \circ L_{X'} \circ R_{X''})(1-\lambda)\delta M^j \\
&= (\lambda H_j H + (1-\lambda) H H_j)(f \circ L_{X'} \circ R_{X''})\delta M^j.
\end{aligned}$$

Nous avons montré que U est un transport parallèle au dessus de X. Pour montrer que X est le développement de M, il suffit d'établir que si $(U_i = X'.H_i.X'')_{1\leq i\leq n}$ est un repère qui se transporte parallèlement au dessus de X, alors $\delta X = U_i\delta M^i$. Or $\delta X = X'.\delta M.X'' = X'.H_i.X''\delta M^i = U_i\delta M^i$ d'après le lemme (9). La démonstration est achevée.

La donnée d'une connexion ∇ sur le groupe de Lie G invariante à gauche (i.e. telle que les applications L_g, g appartenant à G soient affines) est équivalente à la donnée d'une application bilinéaire α de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$ et la relation entre l'application α et la connexion ∇ est $\nabla_A B = \alpha(A,B)$ si A et B sont des éléments de $\mathfrak{g}$ ([He]).

Soit M une semi-martingale continue à valeurs dans $\mathfrak{g}$ telle que $M_0 = 0$. La question que l'on se pose maintenant pour généraliser la proposition 8, est de savoir quel est le développement de M dans G pour la connexion ∇. Ce développement est l'exponentielle stochastique d'une semi-martingale à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, qui va être donnée dans la proposition suivante.

Proposition 13 *Soient ∇ une connexion invariante à gauche sur le groupe de Lie G, α l'application bilinéaire de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$ associée, et M une semi-martingale continue à valeurs dans $\mathfrak{g}$ telle que $M_0 = 0$. Alors le développement de M pour la connexion ∇ est la semi-martingale*

$$X = \varepsilon\left(\int Y(\delta M)\right),$$

Y étant une semi-martingale à valeurs dans $Gl(\mathfrak{g})$, solution de l'équation différentielle de Stratonovitch

$$\delta Y = -\alpha(Y(\delta M), Y(\cdot))$$

avec pour condition initiale $Y_0 = \mathrm{Id}$.

Remarque

La semi-martingale $N = \int Y(\delta M)$ est le développement de M dans le groupe de Lie $(\mathfrak{g},+)$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (considérée avec le crochet nul), muni de la connexion invariante à gauche donnée par α. Cette semi-martingale n'est définie que pour $t < T$, avec T temps d'explosion de la solution de l'équation différentielle vérifiée par Y.

Démonstration de la proposition 13

Reprenons les notations de l'énoncé, et admettons pour l'instant le lemme suivant.

Lemme 14 *Soit H un élément de T_eG. Alors la semi-martingale $U = X.Y(H)_e = Y(H)_X$ à valeurs dans TG au dessus de X est le transport parallèle stochastique de H le long des trajectoires de X.*

Soient (H_i) une base de $\mathfrak{g}$ et (U_i) son transport parallèle stochastique au dessus de X. Notons $M = M^iH_i$. Alors l'expression $X = \varepsilon(\int\langle Y,\delta M\rangle) = \varepsilon(N)$ donne

$$\begin{aligned}\delta X &= X.\delta N = X.Y(\delta M) = X.Y(H_i)\,\delta M^i\\ &= U_i\,\delta M^i,\end{aligned}$$

et de cette dernière égalité nous déduisons que X est le développement de M pour la connexion ∇.

Démonstration du lemme 14

Il suffit de montrer d'après [El 8.11] que pour toute fonction f de classe C^∞ sur G,

$$U_tf - U_0f = \int_0^t \langle \operatorname{Hess} f(\cdot, U_s), \delta X\rangle,$$

l'application Hess étant associée à la connexion ∇. Le membre de gauche s'écrit

$$\delta(Uf) = \delta(Y(H)_Xf) = (\delta X)(Y(H)f) + (\delta Y(H)_e)\,(f\circ L_X).$$

Or $X = \varepsilon(\int\langle Y, \delta M\rangle)$ implique $\delta X = Y(H_i)_X \delta M^i$ et l'équation différentielle vérifiée par Y s'écrit

$$\delta Y(H) = -\alpha(Y(\delta M), Y(H)) = -\alpha(Y(H_i), Y(H))\,\delta M^i\ ;$$

en remplaçant dans l'expression de $\delta(Uf)$, on obtient

$$\begin{aligned}\delta(Uf) &= \left(Y(H_i)_X Y(H) - \alpha(Y(H_i), Y(H))\right) f\,\delta M^i \\ &= \left(Y(H_i)_X Y(H) - \nabla_{Y(H_i)} Y(H)\right) f\,\delta M^i \\ &= \operatorname{Hess} f\,(\delta X, Y(H)_X) = \operatorname{Hess} f\,(\delta X, U)\end{aligned}$$

ce qui est le résultat recherché. La démonstration est achevée.

On aimerait faire le lien entre le résultat de la proposition 13 qui concerne le développement avec une connexion invariante à gauche associée à une application bilinéaire quelconque α et le résultat de la proposition 8 sur le développement avec une connexion ∇^λ associée à α définie par $\alpha(A, B) = (1-\lambda)[A, B]$. Ce sera fait en utilisant la proposition suivante.

Proposition 15 *Soient ∇ une connexion invariante à gauche sur G, α l'application bilinéaire de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ associée. Si l'application α est un crochet de Lie sur $\mathfrak{g}$ (i.e. α vérifie l'identité de Jacobi et est antisymétrique) alors pour toute semi-martingale M à valeurs dans $\mathfrak{g}$ telle que $M_0 = 0$, la solution dans $Gl(\mathfrak{g})$ de l'équation différentielle de Stratonovitch $\delta Y = \alpha(Y(-\delta M), Y(\cdot))$ avec pour conditions initiales $Y_0 = \mathrm{Id}$ est $Y = \varepsilon(\alpha(-M, \cdot))$.*

Remarques

Si la condition de la proposition est réalisée, la semi-martingale Y est définie sur $[0, \infty[$. D'autre part, la propriété $\alpha(A, A) = 0$ quel que soit A dans $\mathfrak{g}$ entraîne que les géodésiques pour la connexion ∇ sont les mêmes que celles définies au moyen de la connexion $\nabla^L = \nabla^1$. Par conséquent, la symétrisée de ∇ est $\nabla^{\frac{1}{2}}$.

Démonstration de la proposition 15

Supposons que α est un crochet de Lie. Notons $\mathrm{ad}'(A)(B) = \alpha(A, B)$. Soient G' un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ munie du crochet ad$'$, et Ad$'$ l'application de G' dans $Gl(\mathfrak{g})$ qui à g associe l'application $A \mapsto g.A.g^{-1}$. La fonction Ad$'$ est un homomorphisme de groupes de Lie et son application tangente à l'origine est ad$'$.

Soient maintenant M un semi-martingale de $\mathfrak{g}$ issue de 0 et $Z = \varepsilon(\mathrm{ad}'(-M))$, semi-martingale à valeurs dans $Gl(\mathfrak{g})$. Il nous suffit de montrer que Z vérifie l'équation différentielle de Stratonovitch $\delta Z = -\alpha(Z(\delta M), Z(\cdot))$. Comme Ad$'$ est un homomorphisme d'application tangente ad$'$ à l'origine, on a d'après [HD.L Prop 2] l'égalité $Z = \mathrm{Ad}'\varepsilon^{G'}(-M)$, où $\varepsilon^{G'}$ est l'exponentielle stochastique de $(\mathfrak{g}, \mathrm{ad}')$ dans G'. Or quels que soient g dans G', A et B dans $\mathfrak{g}$, on a $\mathrm{Ad}' g(\mathrm{ad}'(A)(B)) = \mathrm{ad}'(\mathrm{Ad}' g(A))(\mathrm{Ad}' g(B))$, et en particulier $Z(\mathrm{ad}'(A)(B)) = \mathrm{ad}'(Z(A))(Z(B))$. Puisque Z est l'exponentie stochastique de $\mathrm{ad}'(-M)$, elle vérifie l'équation différentielle de Stratonovitch $\delta Z = Z(\mathrm{ad}'(-\delta M))$, et aussi l'équation $\delta Z = -\mathrm{ad}'(Z(\delta M) \circ Z = -\alpha(Z(\delta M), Z(\cdot))$ d'après l'égalité plus haut. Ceci achève la démonstration.

En utilisant la proposition 15 avec $\alpha(A, B) = (1-\lambda)[A, B]$, on obtient $Y = \varepsilon((1-\lambda)\,\mathrm{ad}(-M)) = \mathrm{Ad}\,\varepsilon(-(1-\lambda)M)$, il est facile de vérifier ensuite que le développement X de M qui s'écrit $X = \int \mathrm{Ad}\,\varepsilon(-(1-\lambda)M)\,\delta M$ est aussi égal à $\varepsilon(\lambda M)\varepsilon'((1-\lambda)M)$ et on retrouve le résultat de la proposition 8.

Références :

[E1] : M. Emery : Stochastic Calculus in Manifolds, Springer Verlag 1989.

[E2] : M. Emery : On two transfer principles in stochastic differential geometry, Séminaire de Probabilités 24, Lecture Notes in Mathematics 1426, p.407-441 (1989).

[He] : S. Helgason : Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces, Academic Press 1978.

[HD,L] : M. Hakim-Dowek, D. Lépingle : L'exponentielle stochastique des groupes de Lie, Séminaire de Probabilités 20, Lecture Notes in Mathematics 1204, p.352-374 (1986).

Appendice : Décomposition en produit de deux browniens d'une martingale à valeurs dans un groupe muni d'une métrique bi-invariante

Marc Arnaudon et Pierre Mathieu

On suppose maintenant que le groupe de Lie G est muni d'une métrique riemannienne m telle que les translations à droite et les translations à gauche soient des isométries. Nous allons montrer que si X est une martingale, alors X s'écrit comme produit de deux browniens après un changement de temps, et dans une filtration éventuellement différente. Cependant, ceci ne veut pas dire que le produit de deux browniens est toujours une martingale.

Il vient immédiatement que $\nabla^L m = 0$ et $\nabla^R m = 0$, et par conséquent $\nabla^{\frac{1}{2}} m = 0$. Mais la connexion $\nabla^{\frac{1}{2}}$ est symétrique, donc c'est la connexion de Levi-Civita associée à la métrique. Pour cette connexion, le développement d'une semi-martingale M de l'algèbre de Lie nulle en 0 est $X = e(M) = \varepsilon(\frac{1}{2}M)\varepsilon'(\frac{1}{2}M)$, d'après la proposition 8. En particulier, X est une martingale si et seulement si M est une martingale locale, et X est un mouvement brownien si et seulement si M est un mouvement brownien ([E1 8.26]).

Si M est une semi-martingale à valeurs dans un espace vectoriel euclidien, sa variation quadratique sera le processus croissant $\sum_i < M^i, M^i >$, les M^i désignant les coordonnées de M dans une base orthonormale.

Proposition 1 *Soit $X = e(M)$ une martingale telle que la variation quadratique de M soit un processus croissant A de la forme $\int a\,dt$ avec a processus prévisible strictement inférieur à 4. On suppose qu'il existe un brownien à valeurs dans $\mathfrak{g}$ indépendant de M. Alors il existe deux browniens Y et Y' issus de e, tels que $X = YY'$.*

Remarques

Lorsque l'hypothèse sur la variation quadratique de M n'est pas satisfaite, on peut s'y ramener par changement de temps. Il n'y a pas unicité dans le choix de ce dernier.

Lorsque l'hypothèse d'existence d'un brownien à valeurs dans $\mathfrak{g}$ indépendant de M n'est pas satisfaite, on peut s'y ramener en grossissant Ω et la filtration au moyen d'un produit.

Démonstration de la proposition 1

La martingale X s'écrit $X = \varepsilon(\frac{1}{2}M)\varepsilon'(\frac{1}{2}M)$, ou encore $X = \varepsilon(\frac{1}{2}M)\varepsilon'(P)\varepsilon(-P)\varepsilon'(\frac{1}{2}M)$ pour toute semi-martingale P, ceci en vertu de l'égalité (13). nous allons chercher P afin que $\varepsilon(\frac{1}{2}M)\varepsilon'(P)$ et $\varepsilon(-P)\varepsilon'(\frac{1}{2}M)$ soient des mouvements browniens. Un calcul direct ou l'utilisation des formules (11) et (13) d'une part, (12) et (14) d'autre part nous permettent d'écrire

$$\varepsilon\left(\frac{1}{2}M\right)\varepsilon'(P) = \varepsilon\left(\int \mathrm{Ad}\,(\varepsilon(-P))\,\delta\left(\frac{1}{2}M + P\right)\right)$$

et

$$\varepsilon(-P)\varepsilon'\left(\frac{1}{2}M\right) = \varepsilon'\left(\int \mathrm{Ad}\,(\varepsilon(-P))\,\delta\left(\frac{1}{2}M - P\right)\right).$$

Si nous choisissons P orthogonal à M et si nous utilisons la proposition 7 de la partie 2, les intégrales de Stratonovitch deviennent des intégrales d'Itô et les égalités deviennent

$$\varepsilon\left(\frac{1}{2}M\right)\varepsilon'(P) = \varepsilon\left(\int \mathrm{Ad}\,(\varepsilon(-P))\,d\left(\frac{1}{2}M + P\right)\right)$$

et

$$\varepsilon(-P)\varepsilon'\left(\frac{1}{2}M\right) = \varepsilon'\left(\int \mathrm{Ad}\,(\varepsilon(-P))\,d\left(\frac{1}{2}M - P\right)\right).$$

Puisque la métrique sur G est bi-invariante, les applications $\mathrm{Ad}(g)$ sont des isométries pour tout g dans G. Par conséquent, si $\frac{1}{2}M + P$ et $\frac{1}{2}M - P$ sont des browniens, les intégrales $\int \mathrm{Ad}\,(\varepsilon(-P))\,d\left(\frac{1}{2}M + P\right)$ et $\int \mathrm{Ad}\,(\varepsilon(-P))\,d\left(\frac{1}{2}M - P\right)$ seront aussi des browniens. La démonstration de la proposition sera terminée lorsque nous aurons établi les deux résultats suivants.

Proposition 2 *Sous les conditions de la proposition 1, il existe une martingale P orthogonale à M telle que $\frac{1}{2}M + P$ et $\frac{1}{2}M - P$ soient des mouvements browniens.*

Lemme 3 *Si N est un brownien de T_eG, alors $\varepsilon(N)$ et $\varepsilon'(N)$ sont des browniens de G.*

Démonstration de la proposition 2

Remarquons qu'il suffit de trouver P tel que $\frac{1}{2}M + P$ soit un brownien, et l'orthogonalité nous permettra d'affirmer que $\frac{1}{2}M - P$ est un brownien. Cherchons P de la forme $\int \sigma\, d\beta$ avec β brownien de T_eG indépendant de M et σ processus prévisible borné à valeurs dans l'ensemble des endomorphismes de T_eG. Choisissons une base orthonormale de T_eG. La martingale $\frac{1}{2}M + P$ est un brownien si et seulement si sa matrice des crochets dans cette base est It, où I désigne la matrice identité. Soit $\mathcal{M}$ une version prévisible de la dérivée de la matrice des crochets de M par rapport à t. La dérivée de la matrice des crochets de $\frac{1}{2}M + P$ est $\frac{1}{4}\mathcal{M} + \sigma\sigma^*$, donc l'équation à résoudre est $\frac{1}{4}\mathcal{M} + \sigma\sigma^* = I$. Or l'hypothèse sur la variation quadratique de M impose à $I - \frac{1}{4}\mathcal{M}$ d'être une matrice définie positive. Elle a donc une racine carrée définie positive, et le processus $\sqrt{I - \dfrac{1}{4}\mathcal{M}}$ est prévisible et borné. Si nous choisissons σ égal à ce processus, cela résout l'équation posée plus haut et la démonstration de la proposition 2 est achevée.

Remarque

La décomposition de la proposition 2 n'est pas unique, ce qui entraîne que la décomposition de X en produit de deux browniens n'est pas unique non plus.

Démonstration du lemme 3

Il suffit d'établir le résultat avec $\varepsilon(N)$, car la démonstration pour $\varepsilon'(N)$ est identique. En utilisant la formule (1), nous pouvons écrire

$$\varepsilon(N) = \varepsilon\left(\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N\right) = \varepsilon\left(\frac{1}{2}\int \mathrm{Ad}\left(\varepsilon\left(\frac{1}{2}N\right)\right)\,\delta N\right)\varepsilon\left(\frac{1}{2}N\right).$$

Or d'après les formules (12) et (14), on a

$$\varepsilon\left(\frac{1}{2}N\right) = \varepsilon'\left(\frac{1}{2}\int \mathrm{Ad}\left(\varepsilon\left(\frac{1}{2}N\right)\right)\,\delta N\right),$$

ce qui nous donne $\varepsilon(N) = e\left(\int \mathrm{Ad}\left(\varepsilon\left(\dfrac{1}{2}N\right)\right)\,\delta N\right)$. Par un raisonnement identique à celui de la proposition 7, nous pouvons remplacer l'intégrale de Stratonovitch vectorielle par une intégrale d'Itô et nous obtenons

$$\varepsilon(N) = e\left(\int \mathrm{Ad}\left(\varepsilon\left(\frac{1}{2}N\right)\right)\,dN\right),$$

et comme les applications $\mathrm{Ad}(g)$ sont des isométries, la martingale $\varepsilon(N)$ est bien le développement d'un brownien de T_eG. Ceci achève la démonstration.

Référence :

[E1] : M. Emery : Stochastic Calculus in Manifolds, Springer Verlag 1989.