Stochastics and Stochastics Reports, Vol. 44, pp. 43–63
Reprints available directly from the publisher
Photocopying permitted by license only

DÉDOUBLEMENT DES VARIÉTÉS À BORD ET DES SEMI-MARTINGALES

MARC ARNAUDON

Département de Mathématiques, Université Louis Pasteur, 7, rue René Descartes, 67084, Strasbourg, Cedex, France

(Received 24 July 1992, in final form 8 October 1992)

We are interested in doubling a manifold with boundary N, and in defining semi-martingales with values in the doubled manifold. When N is endowed with a connection, reflected martingales with respect to a field of transverse directions on the boundary are defined. A construction of Barlow is used to associate to a semi-martingale on N, a semi-martingale on the doubled manifold whose drift on ∂N belongs to $T\partial N$. When the first semi-martingale is a reflected martingale, the second one is a martingale for a certain connection, and this allows us to say whether the first semi-martingale is a semi-martingale up to infinity. When N is a Riemannian manifold, these results are extended to other types of reflection at the boundary.

KEY WORDS Manifold with boundary, reflected semi-martingale.

On s'intéresse au dédoublement d'une variété à bord N et à la définition de semi-martingales à valeurs dans la variété dédoublée. Lorsque N est munie d'une connexion, on définit dans N des martingales réfléchies suivant un champ de directions transverses au bord. Avec une méthode de Barlow, on construit à partir d'une semi-martingale à valeurs dans N, une semi-martingale à valeurs dans la variété dédoublée dont le drift sur ∂N appartient à $T\partial N$. Si la semi-martingale de départ est une martingale réfléchie, la semi-martingale obtenue est une martingale pour une certaine connexion, et cela permet de déterminer si la première semi-martingale est une semi-martingale jusqu'à l'infini. Lorsque N est une variété riemannienne, ces résultats sont étendus à d'autres types de réflexion au bord.

INTRODUCTION, NOTATIONS ET DÉFINITIONS

L'objet de ce travail est l'étude des semi-martingales continues dans une variété à bord, à l'aide du langage du second ordre défini par Meyer et Schwartz ([8], [10]) et du dédoublement de la variété et des processus, ceci afin de donner des résultats sur le comportement asymptotique des martingales réfléchies.

Le problème de réflexion dans $\mathbb{R}_+$ de Skorohod a été étudié par N. El Karoui et M. Chaleyat Maurel ([4]), conduisant à la résolution d'équations différentielles stochastiques réfléchies dans $\mathbb{R}_+$ pour des semi-martingales générales. L'existence et l'unicité de diffusions réfléchies, solutions d'équations différentielles stochastiques dans un domaine convexe de $\mathbb{R}^n$ ont été démontrées par Tanaka ([11]).

Une construction du brownien réfléchi dans un cône a été effectuée par S. R. S. Varadhan et R. Williams ([12]), et son comportement a été étudié en fonction des angles de réflexion sur les parois et de l'angle d'ouverture du cône.

E. B. Davies ([3]) a obtenu dans des variétés à bord, des majorations pour le semi-groupe de la chaleur avec conditions de Neumann au bord.

Soit N une variété C^∞ à bord, de dimension n. On notera τN le fibré vectoriel des vecteurs tangents d'ordre 2 défini dans [8], et τ^*N son dual. Si N' est une autre variété C^∞ à bord et φ est un morphisme C^∞ de N dans N', on notera φ_* l'application tangente de TN dans TN', ainsi que l'application tangente de τN dans $\tau N'$.

Soit $TN \odot TN$ le produit tensoriel symétrique de TN. Il existe une application linéaire canonique b, de τN dans $TN \odot TN$, telle que si A et B sont deux champs de vecteurs d'ordre 1, l'on ait

$$b(A) = 0 \quad \text{et} \quad b((AB)_x) = \frac{1}{2}(A_x \otimes B_x + B_x \otimes A_x)$$

pour tout x dans N. Si L est un élément de τN, on dira que $b(L)$ est la partie bilinéaire de L.

Si X est une semi-martingale continue à valeurs dans N, on notera $\mathscr{D}X$ sa différentielle d'ordre 2. Celle-ci admet la décomposition $\mathscr{D}X = \overset{m}{dX} + \mathscr{D}\tilde{X}$, où $\mathscr{D}\tilde{X}$ est un vecteur formel d'ordre 2 qui désigne les caractéristiques locales de la martingale ([10], [8]), et $\overset{m}{dX}$ est un vecteur formel d'ordre 1. En coordonnées locales, si on note $X^i = M^i + A^i$ la décomposition de X^i en somme d'une martingale locale et d'un processus à variation finie, on a

$$\mathscr{D}X = dX^i D_i + \frac{1}{2}\, d\langle X^i, X^j\rangle D_{ij},$$

$$\mathscr{D}\tilde{X} = dA^i D_i + \frac{1}{2}\, d\langle M^i, M^j\rangle D_{ij}, \quad \text{et} \quad \overset{m}{dX} = dM^i D_i.$$

Si $f \in C^\infty(N)$, on notera $d^2f(x)$ l'élément de τ_x^*N qui vérifie $\forall \lambda \in \tau_x N$, $\langle d^2f(x), \lambda\rangle = \lambda(f)$. On a la décomposition

$$f(X) - f(X_0) = \int_0 \langle d^2f(X), \mathscr{D}X\rangle = \int_0 \langle df(X), \overset{m}{dX}\rangle + \int_0 \langle d^2f(X), \mathscr{D}\tilde{X}\rangle$$

en somme d'une martingale locale et d'un processus à variation finie.

Si S_1 et S_2 sont deux semi-martingales réelles continues, on conviendra de noter $dS_1 dS_2$ ou $d\langle S_1, S_2\rangle$ la différentielle de leur crochet. La notation $\overset{m}{dX} \otimes \overset{m}{dX}$ prend alors un sens. Nous écrirons plus simplement $dX \otimes dX$. Il est important de remarquer que la partie bilinéaire de $\mathscr{D}\tilde{X}$ est égale à $\frac{1}{2} dX \otimes dX$.

Si N est munie d'une connexion sans torsion ∇, on notera F l'opérateur qui à un vecteur d'ordre 2 associe sa partie d'ordre 1; F préserve les champs d'ordre 1 et vérifie $F(AB) = \nabla_A B$, et ces proprétés déterminent entièrement F à partir de ∇. En coordonnées locales, on a $F(D_i) = D_i$ et $F(D_{ij}) = \Gamma_{ij}^k D_k$. Réciproquement, on peut montrer que la donnée d'un opérateur F, application linéaire de $\tau_x N$ dans $T_x N$ pour tout $x \in N$, qui dépend de façon C^∞ de x et dont la restriction à $T_x N$ est l'identité, détermine une unique connexion sans torsion ∇ vérifiant les propriétés énoncées plus haut. On pourra donc appeler F connexion sur N. Si $f \in C^\infty(N)$, on note Hess f l'application ∇df. On dira que f est convexe lorsque pour tout x dans N, Hess $f(x)$ est une forme bilinéaire positive. Si A et B sont deux champs de vecteurs d'ordre 1, on a

$$\text{Hess } f(A \otimes B) = ABf - \nabla_A Bf = ABf - F(AB)f,$$

ce qui donne Hess $f(b(L)) = Lf - F(L)f$, et en appliquant ceci aux semi-martingales, on a

$$\begin{aligned}\langle d^2f(X), \mathscr{D}\tilde{X}\rangle &= \langle d^2f(X), \mathscr{D}\tilde{X} - F(\mathscr{D}\tilde{X})\rangle + \langle df(X), F(\mathscr{D}\tilde{X})\rangle \\ &= \frac{1}{2}\text{ Hess } f(dX \otimes dX) + \langle df(X), F(\mathscr{D}\tilde{X})\rangle.\end{aligned}$$

Si X est une semi-martingale réelle sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), P)$ et $A \in \mathscr{F}$, on dira que X est une semi-martingale jusqu'à l'infini sur A si son crochet et la variation totale de sa partie à variation finie convergent sur A. Ceci est encore équivalent à: X est une semi-martingale jusqu'à l'infini pour la probabilité $P[\cdot|A]$ ([6]). Si X est une semi-martingale à valeurs dans N, on dira que X est une semi-martingale jusqu'à l'infini sur A si pour toute fonction $f \in C^\infty(N)$, $f(X)$ est une semi-martingale jusqu'à l'infini sur A. Si on a une semi-martingale jusqu'à l'infini sur un ensemble, le calcul stochastique usuel s'applique sur cet ensemble jusqu'à l'infini compris. On peut par exemple définir sur A des intégrales d'Itô ou de Stratonovitch jusqu'à l'infini, de formes bornées par rapport à cette semi-martingale.

1 DÉDOUBLEMENT DES VARIÉTÉS À BORD

Soient N une variété à bord de classe C^∞ et de dimension n, et N' une variété disjointe de N et difféomorphe à N. Notons s le difféomorphisme de N sur N'. Nous allons recoller les variétés N et N' suivant le bord, et déterminer un atlas sur l'ensemble $M = \mathring{N} \cup \partial N \cup \mathring{N}'$. Ici comme dans la suite, les bords de N et N' sont identifiés au moyen de l'application s, et on peut écrire $M = N \cup N'$. Cet atlas comportera d'une part les cartes C^∞ de $\mathring{N}$ et $\mathring{N}'$ et d'autre part les bijections d' un sous-ensemble de M dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dont les restrictions à N et N' sont des difféomorphismes C^∞ d'ouverts de N et N' sur leurs images. Il est facile de montrer que les applications de changements de cartes sont des homéomorphismes. Pour montrer que ces cartes définissent une structure de variété topologique sur M, il reste à vérifier que leurs domaines recouvrent ∂N. Soient donc x un élément de ∂N et φ une carte de N définie sur un voisinage U de x dans N, telle que $\varphi(U)$ soit inclus dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}$ et $\varphi(\partial N \cap U)$ soit inclus dans $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$. A partir de cette carte, on définit une carte φ' sur N' par l'application $\sigma \circ \varphi \circ s^{-1}$ de $s(U)$ dans $\sigma(\varphi(U))$, où σ est la symétrie de $\mathbb{R}^n$ qui change le signe de la première coordonnée. Nous appellerons dédoublée de φ l'application ψ de $U \cup s(U)$ dans $\varphi(U) \cup \varphi'(s(U))$ qui à y associe $\varphi(y)$ si y appartient à U et $\varphi'(y)$ si y appartient à $s(U)$. L'application ψ est bien dans l'atlas défini plus haut car son image est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. De plus son domaine contient le point x. Une carte ψ construite de cette façon sera aussi appelée carte symétrique. Nous avons la preuve que M possède avec cet atlas une structure de variété topologique.

Si nous restreignons les domaines des cartes de notre atlas à des ouverts inclus dans $\mathring{N} \cup \mathring{N}'$, les changements de cartes sont de classe C^∞. Sachant qu'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et localement différence de convexes transforme une semi-martingale vectorielle continue en une semi-martingale réelle continue, il nous suffit de montrer que les changements de cartes de l'atlas défini sur M ont leurs coordonnées localement différences de convexes pour pouvoir définir des semi-martingales à valeurs dans M.

LEMME 1 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, Ω' un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $u: \Omega \to \mathbb{R}^p$ et $f: \Omega' \to \mathbb{R}$ deux applications localement différences de convexes telles que $u(\Omega)$ soit inclus dans Ω'. Alors $f \circ u$ est localement différence de convexes.*

Ce lemme est dû à Kiselman ([7]) dans le cas où p est égal à 1.

Démonstration La démarche est identique à celle de Kiselman. On peut supposer que f est convexe. Soit x un point de Ω. On choisit un ouvert convexe V, voisinage de x, tel que chaque coordonnée de u soit différence de convexes sur V et tel que $u(V)$ soit inclus dans un ouvert V' convexe dans lequel f est lipschitzienne de rapport c. On considère la fonction g de $V' \times V'$ dans $\mathbb{R}$ qui au couple (x, y) associe $f(x-y) + c\Sigma(x^i + y^i)$. Cette fonction est convexe. On écrit $u = v - w$ avec v^i et w^i convexes et on pose $h(z) = g(v(z), w(z))$. Alors $f \circ u \doteq h - c\Sigma(v^i + w^i)$, et il suffit de montrer que h est convexe pour avoir le résultat du lemme. Soit donc $\gamma: [0, 1] \to V$ un segment. Si t appartient à $[0, 1]$, on a

$$(1-t)h(\gamma(0)) + th(\gamma(1)) \geq g((1-t)v(\gamma(0)) + tv(\gamma(1)), (1-t)w(\gamma(0)) + tw(\gamma(1)))$$

et ce dernier terme est supérieur ou égal à $g(v(\gamma(t)), w(\gamma(t)))$ en raison de la convexité de chaque coordonnée de v et w et de la définition de c. La démonstration est achevée.

LEMME 2 *Soient $f: M \to \mathbb{R}$ une fonction continue dont les restrictions à N et N' sont localement différences de convexes, et ψ une carte de M dont le domaine rencontre ∂N. Alors l'application $f \circ \psi^{-1}$ est localement différence de convexes.*

Démonstration Soit U le domaine de ψ. L'ensemble $\psi(\partial N \cap U)$ est une sous-variété C^∞ de dimension $n-1$ de $\mathbb{R}^n$, donc il existe pour tout élément x de $\partial N \cap U$ un voisinage W de $\psi(x)$ inclus dans $\psi(U)$ et un difféomorphisme ϕ de W dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tels que $\phi(\psi(\partial N \cap U) \cap W)$ soit inclus dans $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$. L'application $\phi \circ \psi$ est encore une carte, et on peut supposer que l'image récipropque de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}$ est dans N et que l'image réciproque de $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}$ est dans N', quitte à diminuer son ouvert de définition. En utilisant le lemme 1 et le fait que les applications C^∞ sont localement différences de convexes, il suffit de montrer que $f \circ \psi^{-1} \circ \phi^{-1}$ est localement différence de convexes. Appelons g cette application. Elle est continue sur son domaine de définition que nous appellerons V et localement différence de convexes sur $V \cap \{x^1 \geq 0\}$ et $V \cap \{x^1 \leq 0\}$. On peut supposer quitte à le restreindre, que V est de la forme $]-a, a[\times V'$ avec V' convexe inclus dans $\mathbb{R}^{n-1}$ et a réel strictement positif. Alors d'après Kiselman [7], la restriction g^+ (resp. g^-) de g à $V \cap \{x^1 \geq 0\}$ (resp. $V \cap \{x^1 \leq 0\}$) est différence de convexes. Notons $g^+ = g_1^+ - g_2^+$ (resp. $g^- = g_1^- - g_2^-$) la décomposition en différence de convexes. On peut supposer que g_1^+ et g_1^- sont lipschitziennes de rapport inférieur à c. Notons g_1 (resp. g_1') la fonction qui vaut $g_1^+ + cx^1$ (resp. $g_1^- - cx^1$) sur $V \cap \{x^1 \geq 0\}$ (resp. $V \cap \{x^1 \leq 0\}$) et qui vaut $g_1^+(0, x^2, \ldots, x^n)$ (resp. $g_1\,(0, x^2, \ldots, x^n)$) sur $V \cap \{x^1 \leq 0\}$ (resp. $V \cap \{x^1 \geq 0\}$). Montrons que g_1 est convexe. La restriction de cette application à $V \cap \{x^1 \geq 0\}$ et $V \cap \{x^1 \leq 0\}$ est convexe, et il suffit de montrer que pour un chemin γ de la forme $\gamma(t) = (1 - t)x + tx'$ avec x dans $V \cap \{x^1 < 0\}$ et x' dans $V \cap \{x^1 > 0\}$, la dérivée à gauche de l'application $g_1 \circ \gamma$ est inférieure à la dérivée à droite au point t_0 tel que $\gamma(t_0)$ appartienne à $V \cap \{x^1 = 0\}$. Notons π la fonction qui à $(x^1, \ldots, x^n)$ associe $(0, x^2, \ldots, x^n)$. L'application $g_1^+ \circ \pi$ est convexe, inférieure ou égale à g_1 en raison de l'hypothèse sur c et égale à g_1 sur $\{x^1 \leq 0\}$. Cela implique qu'en t_0, la dérivée à gauche de $g_1 \circ \gamma$ soit égale à la dérivée à gauche de $g_1^+ \circ \pi \circ \gamma$, que cette dernière soit inférieure ou égale à la dérivée à droite de $g_1^+ \circ \pi \circ \gamma$, elle même inférieure ou égale à la dérivée à droite de $g_1 \circ \gamma$. On en déduit que g_1 est convexe. De même, la fonction g_1' est convexe, ainsi que les fonctions g_2 et g_2' définies de façon identique. Il est facile de vérifier que g est égale à $g_1 + g_1' - g_2 - g_2' - g_1^+ \circ \pi + g_2^+ \circ \pi$ et on sait maintenant que chaque élément de la décomposition est convexe, ce qui achève la démonstration.

D'après le lemme 2, si nous avons un changement de cartes $\psi' \circ \psi^{-1}$ défini sur $\psi(U)$, il sera localement différence de convexes au voisinage de $\psi(\partial N \cap U)$. Nous avons montré le résultat suivant.

Proposition 3 *L'atlas comportant d'une part les cartes C^∞ de $\mathring{N}$ et $\mathring{N}'$, d'autre part les bijections d' un sous-ensemble de M dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dont les restrictions à N et N' sont des difféomorphismes C^∞ d'ouverts de N et N' sur leurs images, définit une structure de variété sur M qui est C^∞ sur N et N', et localement différence de convexes au voisinage de ∂N.*

Nous appellerons $C_0^\infty(M)$ l'ensemble des fonctions continues sur M dont les restrictions à N et N' sont C^∞.

Il est possible de prolonger l'application s en une involution continue sur M, dont la restriction à $\mathring{N} \cup \mathring{N}'$ est un difféomorphisme C^∞, en posant $s(x) = s^{-1}(x)$ si x est dans N'. Nous adopterons désormais cette définition de s.

Examinons maintenant le cas où N est munie d'une connexion C^∞ et d'un champ de vecteurs r transverse sur le bord, dirigé vers l'intérieur de la variété.

Proposition 4 *Sous ces hypothèses, il existe une structure canonique de variété C^∞ sur M, qui ne dépend que de la direction de r, et telle que pour $x \in \partial N$, la courbe*

$$t \mapsto \begin{cases} \exp_x tr(x) & si \quad t \geq 0 \\ s(\exp_x - tr(x)) & si \quad t \leq 0 \end{cases}$$

définie pour $|t|$ petit soit C^∞.

Démonstration Nous allons restreindre l'atlas de M à des cartes définies de la façon suivante. Soient η une carte de ∂N définie sur un domaine U suffisamment petit, λ une fonction C^∞ définie sur U et à valeurs strictement positives, ε un réel strictement positif suffisamment petit. Alors l'application h de $[0, \varepsilon[\times U$ dans N qui à (t, x) associe $\exp_x(t\lambda(x)r)$ est un difféomorphisme sur son image et l'application φ de $h([0, \varepsilon[\times U)$ dans $[0, \varepsilon[\times \eta(U)$ qui à $h(t, x)$ associe $(t, \eta(x))$ est une carte de N. L'atlas de M comportera toutes les cartes ψ qui sont les dédoublées des cartes φ ainsi construites, et toutes les cartes C^∞ de $\mathring{N}$ et $\mathring{N}'$. Il est clair que les domaines de ces cartes forment un recouvrement de M, et il reste à montrer que si ψ et ψ' sont deux cartes au voisinage du bord, l'application $\psi \circ \psi'^{-1}$ est C^∞. Or cette application associe au couple (t, y) le couple

$$\left(\frac{\lambda'(\eta'^{-1}(y))}{\lambda(\eta'^{-1}(y))}\, t,\ \eta \circ \eta'^{-1}(y)\right),$$

c'est donc bien une application C^∞. La démonstration est achevée.

Notons que dans une carte symétrique parmi celles que l'on vient de définir, et pour $x \in \partial N$, let vecteur $D_1(x)$ est colinéaire à r et dirigé vers l'intérieur de N, tandis que les vecteurs $D_2(x), \ldots, D_n(x)$ appartiennent à $T_x\partial N$.

On notera $M(F, r)$ la variété C^∞ obtenue avec l'atlas que l'on vient de construire, et seulement M s'il n'y a aucune ambiguïté. Une carte symétrique de $M(F, r)$ désignera une carte symétrique appartenant à cet atlas.

Dans le cas des variétés riemanniennes N à bord, on a un champ canonique transverse au bord qui est le champ des vecteurs unitaires normaux entrants, et cela permet d'obtenir une structure canonique de variété C^∞ sur la variété dédoublée M. On notera $M(g)$ la variété obtenue, ou M s'il n'y a pas d'ambiguïté. La métrique de N se prolonge au moyen de l'involution s en une métrique sur $M(g)$, non dérivable sur ∂N.

2 SEMI-MARTINGALES DANS M ET FORMULE D'ITÔ-TANAKA

Un processus X à valeurs dans M sera appelé semi-martingale si pour toute fonction f appartenant à $C_0^\infty(M)$, le processus $f \circ X$ est une semi-martingale continue. On sait qu'une semi-martingale vectorielle continue est transformée par une fonction localement différence de convexes en une semi-martingale réelle continue. Le lemme 2 nous permet donc d'affirmer que si X est un processus continu qui prend ses valeurs dans le domaine d'une carte ψ, alors X est une semi-martingale si et seulement si $\psi \circ X$ est une semi-martingale à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

On peut définir de cette façon des semi-martingales dans toute variété topologique munie d'un atlas dont les coordonnées des changements de cartes sont localement différences de convexes.

Formule d'Itô-Tanaka

Soit X une semi-martingale à valeurs dans le domaine U d'une carte ψ telle que

$\psi^{-1}(\{x^1 \geq 0\})$ soit inclus dans N et $\psi^{-1}(\{x^1 \leq 0\})$ soit inclus dans N', et soit f une application dans $C_0^\infty(M)$. Alors f est C^∞ sur ∂N et ses dérivées de tous ordres dans la carte ψ par rapport aux variables d'indice supérieur ou égal à 2 sont dans $C_0^\infty(M \cap U)$. Notons f^N (resp. $f^{N'}$) la restriction de f à N (resp. N'). Les dérivées $D_1 f^N$ et $D_1 f^{N'}$ ne coïncident pas sur $\partial N \cap U$.

PROPOSITION 5 *L'accroissement $df(X)$ est égal à*

$$1_{\{X \notin \partial N\}}\langle d^2 f, \mathscr{D}X\rangle + 1_{\{X \in \partial N\}}\left(\sum_{i \geq 2} D_i f\, dX^i + \sum_{i,j \geq 2} \frac{1}{2} D_{ij} f\, d\langle X^i, X^j\rangle\right)$$
$$+ \frac{1}{2}(D_1 f^N\, dL^+ - D_1 f^{N'}\, dL^-),$$

L^+ (resp. L^-) étant le temps local en 0 de X^1 (resp. $-X^1$).

Remarque Soit A^1 la partie à variation finie de X^1. L'expression

$$\frac{1}{2}(D_1 f^N\, dL^+ - D_1 f^{N'}\, dL^-)$$

s'écrit aussi $\frac{1}{2}(D_1 f^N - D_1 f^{N'})\, dL^+ + D_1 f^{N'} 1_{\{X \in \partial N\}}\, dA^1$ en vertu de l'égalité $dL^+ = dL^- + 2 \cdot 1_{\{X \in \partial N\}}\, dA^1$.

Démonstration de la proposition On peut supposer par localisation que $\psi(U)$ est de la forme $]-a, a[\times V$ où V est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$. Notons π' l'application $\psi^{-1} \circ \pi \circ \psi$, et si $x \in U$, notons x^+ (resp. x^-) le point de coordonnées $(x^{1+}, x^2, \ldots, x^n)$ (resp. $(-(-x^1)^+, x^2, \ldots, x^n)$). Alors si $x \in U$,

$$f(x) = f(x^+) + f(x^-) - f(\pi'(x)) = f^N(x^+) + f^{N'}(x^-) - f^N(\pi'(x))$$

donc $f(X) = f^N(X^+) + f^{N'}(X^-) - f^N(\pi'(X))$ et il reste à appliquer la formule d'Ito classique après avoir appliqué la formule de Tanaka à X^+ et X^-. Cela donne pour $\mathscr{D}X^+$ l'expression

$$\left(1_{\{X^1 > 0\}}\, dX^1 + \frac{1}{2} dL^+\right) D_1 + \frac{1}{2}\sum_j 1_{\{X^1 > 0\}}\, d\langle X^1, X^j\rangle D_{1j} + \sum_{i \geq 2} dX^i D_i$$
$$+ \sum_{i,j \geq 2} \frac{1}{2}\, d\langle X^i, X^j\rangle D_{ij},$$

alors que $\mathscr{D}X^-$ peut s'écrire

$$\left(1_{\{X^1 < 0\}}\, dX^1 - \frac{1}{2} dL^-\right) D_1 + \frac{1}{2}\sum_j 1_{\{X^1 < 0\}}\, d\langle X^1, X^j\rangle D_{1j} + \sum_{i \geq 2} dX^i D_i$$
$$+ \sum_{i,j \geq 2} \frac{1}{2}\, d\langle X^i, X^j\rangle D_{ij},$$

et $\mathscr{D}\pi'(X)$ est égal à

$$\sum_{i\geq 2} dX^i D_i + \sum_{i,j\geq 2} \frac{1}{2} d\langle X^i, X^j\rangle D_{ij}.$$

En remarquant que $1_{\{X\in\partial N\}}$ est égal à $1_{\{X^1=0\}}$ et en utilisant les dernières égalités, on obtient

$$1_{\{X\in\partial N\}} df(X) = 1_{\{X^1=0\}}\left(\sum_{i\geq 2} D_i f\, dX^i + \sum_{i,j\geq 2} \frac{1}{2} D_{ij} f\, d\langle X^i, X^j\rangle\right)$$
$$+ \frac{1}{2}(D_1 f^N\, dL^+ - D_1 f^{N'}\, dL^-),$$

ce qui conduit au résultat recherché.

Cas particuliers 1) Si en tout point x d'un ouvert V de ∂N l'ensemble $T_x\partial N$ n'est inclus ni dans Ker $df^N(x)$ ni dans Ker $df^{N'}(x)$, on peut, quitte à restreindre V, choisir une carte ψ vérifiant les conditions de la proposition 5, et telle que la restriction de f à V soit la deuxième coordonnée de cette carte.

2) Si au contraire il existe un ouvert V de ∂N tel qu'en tout point x de V, l'ensemble $T_x\partial N$ soit inclus dans Ker $df^N(x)$ et dans Ker $df^{N'}(x)$, lors l'application f est constante sur V et on obtient en choisissant une carte suffisamment petite

$$df(X) = 1_{\{X\notin\partial N\}}\langle d^2 f, \mathscr{D}X\rangle + \frac{1}{2}(D_1 f^N\, dL^+ - D_1 f^{N'}\, dL^-).$$

Si x est un élément de M, on notera $|x|$ et on appellera valeur aboslue de x l'élément de N égal à x si x est dans N et à $s(x)$ sinon. Nous allons calculer les caractéristiques locales de la valeur absolue d'une semi-martingale X en fonction de ses caractéristiques locales exprimées dans une carte symétrique.

PROPOSITION 6 *Soient X une semi-martingale à valeurs dans une carte symétrique et Y la valeur absolue de X. Alors*

$$1_{\{Y\in\partial N\}}\mathscr{D}Y = 1_{\{X\in\partial N\}}\left(\sum_{i\geq 2} dX^i D_i + \sum_{i,j\geq 2} \frac{1}{2} d\langle X^i, X^j\rangle D_{ij}\right) + \frac{1}{2}(dL^+ + dL^-)D_1,$$

L^+ (resp. L^-) étant le temps local en 0 de X^1 (resp. $-X^1$).

Démonstration Soient f^N une fonction appartenant à $C^\infty(N)$, et f la fonction de

$C_0^\infty(M)$ qui vaut f^N sur N et $f^N \circ s$ sur N'. Alors $f^N(Y) = f(X)$, $df^N(Y) = df(X)$ donc

$$1_{\{Y \in \partial N\}} df^N(Y) = 1_{\{X \in \partial N\}} \left(\sum_{i \geq 2} D_i f \, dX^i + \sum_{i,j \geq 2} \frac{1}{2} D_{ij} f \, d\langle X^i, X^j \rangle \right)$$

$$+ \frac{1}{2} (D_1 f^N \, dL^+ - D_1 f^{N'} \, dL^-).$$

Or $D_1 f^{N'}(x) = -D_1 f^N(x)$ si $x \in \partial N$, ce qui donne le résultat.

Cas particulier Si N est munie d'une connexion et ∂N est muni d'un champ de vecteurs transverse, alors d'après la proposition 4, $M(F, r)$ a une structure de variété C^∞. La dernière formule devient dans une carte symétrique de $M(F, r)$

$$1_{\{Y \in \partial N\}} \mathscr{D} Y = 1_{\{X \in \partial N\}} \mathscr{D} X + (dL^+ - 2dA^1 1_{\{X \in \partial N\}}) D_1$$

(si on note A^1 la partie à variation finie de X^1) ou encore

$$1_{\{Y \in \partial N\}} \mathscr{D} Y = 1_{\{X \in \partial N\}} \mathscr{D} X + dL^- D_1.$$

3 DÉDOUBLEMENT DES MARTINGALES RÉFLÉCHIES

La variété N est maintenant munie d'une connexion F et d'un champ de vecteurs r entrant au bord. On définit une connexion F^M sur $M(F, r)$ par $F^M = F$ sur $\mathring{N}$, $F^M = s_* \circ F \circ s_*$ sur $\mathring{N}'$, et $F^M = \frac{1}{2}(F + s_* \circ F \circ s_*)$ sur ∂N. Cette connexion est C^∞ sur $\mathring{N}$ et sur $\mathring{N}'$, elle n'est pas continue au voisinage de ∂N, et sa restriction à la variété ∂N est une connexion C^∞. Plus précisément, dans une carte symétrique de l'atlas C^∞ de $M(F, r)$ (défini dans la démonstration de la proposition 4) et en un point x de ∂N, les symboles de Christoffel $(\Gamma^M)^k_{ij}(x)$ de la connexion F^M sont égaux aux symboles de Christoffel $\Gamma^k_{ij}(x)$ de F pour i, j, $k \geq 2$, les $(\Gamma^M)^1_{ij}(x)$ et les $(\Gamma^M)^j_{1i}(x)$ sont nuls pour $i, j \geq 2$, ainsi que les $(\Gamma^M)^k_{11}(x)$ pour tout k. Enfin les $(\Gamma^M)^1_{1j}(x)$ sont égaux aux $\Gamma^1_{1j}(x)$ pour tout $j \geq 2$.

On dira qu'une semi-martingale Y définie sur N est une (F, r)-martingale réfléchie lorsque d'une part $F(1_{\{Y \in \mathring{N}\}} \mathscr{D} \tilde{Y}) = 0$ et d'autre part $F(1_{\{Y \in \partial N\}} \mathscr{D} \tilde{Y})$ est colinéaire au champ de vecteurs r.

Une semi-martingale X définie sur $M(F, r)$ sera appelée F^M-martingale si $F^M(\mathscr{D} \tilde{X}) = 0$.

LEMME 7 *Soient X une semi-martingale à valeurs dans un carte locale symétrique de $M(F, r)$, et $Y = |X|$. Notons A^1 la partie à variation finie de X^1. Alors*

$$F(1_{\{Y \in \partial N\}} \mathscr{D} \tilde{Y}) = F^M(1_{\{X \in \partial N\}} \mathscr{D} \tilde{X}) + \left(dL^- + 1_{\{X \in \partial N\}} \frac{1}{2} \Gamma^1_{ij}(X) \, d\langle X^i, X^j \rangle \right) D_1.$$

Comme D_1 est colinéaire à r, on a en corollaire immédiat la proposition suivante.

PROPOSITION 8 *Si une semi-martingale X à valeurs dans $M(F,r)$ est une F^M-martingale, alors $|X|$ est une (F,r)-martingale réfléchie.*

Démonstration du lemme Nous pouvons considérer que N est une sous-variété C^∞ de $M(F,r)$. Nous pouvons écrire

$$1_{\{Y\in\partial N\}}\mathscr{D}Y = 1_{\{X\in\partial N\}}\mathscr{D}X + dL^- D_1,$$

ce qui implique

$$1_{\{Y\in\partial N\}}\mathscr{D}\tilde{Y} = 1_{\{X\in\partial N\}}\mathscr{D}\tilde{X} + dL^- D_1.$$

Notons A^k la partie à variation finie de X^k pour tout k. L'élément $F(1_{\{X\in\partial N\}}\mathscr{D}\tilde{X})$ s'écrit

$$1_{\{X\in\partial N\}}\left(\left(dA^1 + \frac{1}{2}\,\Gamma^1_{ij}(X)\,d\langle X^i, X^j\rangle\right)D_1 + \sum_{k\geq 2}\left(dA^k + \frac{1}{2}\,\Gamma^k_{ij}(X)\,d\langle X^i, X^j\rangle\right)D_k\right)$$

qui est égal à

$$1_{\{X\in\partial N\}}\left(\left(dA^1 + \frac{1}{2}\,\Gamma^1_{ij}(X)\,d\langle X^i, X^j\rangle\right)D_1 + \sum_{k\geq 2}\left(dA^k + \frac{1}{2}\,(\Gamma^M)^k_{ij}(X)\,d\langle X^i, X^j\rangle\right)D_k\right)$$

car les termes faisant intervenir un indice i ou j égal à 1 sont nuls ($1_{\{X^1=0\}}d\langle X^1, X^j\rangle = 0$ pour tout j [9, Ch. 6]). Comme les $(\Gamma^M)^1_{ij}$ sont nuls pour $i, j \geq 2$, on a l'égalité

$$F(1_{\{X\in\partial N\}}\mathscr{D}\tilde{X}) = F^M(1_{\{X\in\partial N\}}\mathscr{D}\tilde{X}) + 1_{\{X\in\partial N\}}\,\frac{1}{2}\,\Gamma^1_{ij}(X)\,d\langle X^i, X^j\rangle D_1.$$

D'où le résultat.

Remarquons qu'une (F,r)-martingale réfléchie Y peut avoir un drift au bord $F(1_{\{Y\in\partial N\}}\mathscr{D}\tilde{Y})$ dirigé vers l'extérieur de la variété. Choisissons une semi-martingale à valeurs dans ∂N qui est une F^M-martingale. Si ∂N est concave, alors $F(1_{\{Y\in\partial N\}}\mathscr{D}\tilde{Y})$ est dirigé vers l'extérieur, et si ∂N est convexe, $F(1_{\{Y\in\partial N\}}\mathscr{D}\tilde{Y})$ est dirigé vers l'intérieur.

Cependant, si la semi-martingale est une diffusion elliptique (avec un drift singulier au bord), alors $F(1_{\{Y\in\partial N\}}\mathscr{D}\tilde{Y})$ est toujours dirigé vers l'intérieur.

Nous allons utiliser une construction de Barlow ([1]) pour définir à partir d'une semi-martingale Y sur N, une semi-martingale X sur $M(F,r)$ pour un espace probabilisé plus gros, telle que $|X| = Y$, et dont le drift au bord est dans $T_X\partial N$. Cela permettra ensuite de donner une réciproque de la proposition 8.

Soit Y une semi-martingale de N, définie sur un espace probabilisé filtré $(\Omega', \mathscr{F}', \mathscr{F}'_t, P')$. Soit $(\Omega'', \mathscr{F}'', P'')$ un espace probabilisé disjoint de $(\Omega', \mathscr{F}', \mathscr{F}'_t, P')$, comportant une suite (ϕ_n) de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\{0, 1\}$ d'espérance $\frac{1}{2}$. Soient $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ le produit de $(\Omega', \mathscr{F}', P')$ et $(\Omega'', \mathscr{F}'', P'')$, $\overline{\mathscr{F}}$ la tribu complétée de

$\mathscr{F}' \otimes \mathscr{F}''$ pour P, $\mathscr{F}_t$ la tribu engendrée par $\mathscr{F}'_t \otimes \{\Omega'', \emptyset\}$ et les négligeables pour P de $\overline{\mathscr{F}}$. On définit Y et ϕ_n sur $(\Omega, \overline{\mathscr{F}})$ par $Y(\omega', \omega'') = Y(\omega')$ et $\phi_n(\omega', \omega'') = \phi_n(\omega'')$.

On peut dénombrer les excursions de Y en dehors de ∂N: on note $e'_{(p, m, 1)}, \ldots, e'_{(p, m, k_{p,m})}$ les excursions dont la durée est dans l'ensemble $[1/(m+1), 1/m[$ et qui débutent dans l'intervalle $[p, p+1[$, pour m et p entiers naturels $(1/0 = +\infty)$, puis on renumérote pour n'avoir qu'un seul indice. On note ensuite α_n (resp. β_n) le début (resp. la fin) de l'excursion e'_n. On définit $s^0 = \mathrm{Id}$, $C_t = \sum_n \phi_n 1_{[\alpha_n, \beta_n]}(t)$, et

$$\mathscr{M}_t = \bigcap_{s > t} \sigma(\mathscr{F}_s, C_u, 0 \le u \le s).$$

Alors $\mathscr{M}_t$ et $\mathscr{F}_\infty$ sont indépendants conditionnellement à $\mathscr{F}_t$ ([1]), et toute martingale pour $(\mathscr{F}_t)$ est aussi une martingale pour $(\mathscr{M}_t)$. Cela implique que $F(\mathscr{D}\tilde{Y})$ aura la même valeur par rapport à $(\mathscr{F}_t)$ et $(\mathscr{M}_t)$.

On appellera semi-martingale dédoublée de Y la semi-martingale $X_t = s^{C_t}(Y_t)$.

PROPOSITION 9 *Dans la filtration $(\mathscr{M}_t)$, la semi-martingale X vérifie*

$$F^M(1_{\{X \in \partial N\}} \mathscr{D}\tilde{X}) \in T_X \partial N.$$

Démonstration Le problème est local, donc on peut supposer que Y prend ses valeurs dans le domaine d'une carte locale symétrique de $M(F, r)$, et que sa première coordonnée dans cette carte est une semi-martingale dont le crochet et la variation totale de la partie à variation finie sont bornés. On renumérote les excursions en fonction de leur hauteur: on note $e_1, \ldots, e_{n_m}$ les excursions de hauteur supérieure ou égale à $1/m$ pour m entier strictement positif. On a une application δ, $\mathscr{F}_\infty$-mesurable, définie par $e'_{\delta(p)} = e_p$.

Soit A^1 la partie à variation finie de X^1. On doit montrer que

$$1_{\{X \in \partial N\}}\left(dA^1 + \frac{1}{2}(\Gamma^M)^1_{ij}(Y)\, d\langle X^i, X^j\rangle\right) = 0.$$

Puisque les $(\Gamma^M)^1_{ij}$ sont nuls lorsque $i, j \ge 2$, et $1_{\{X^1 = 0\}}\, d\langle X^1, X^j\rangle = 0$ pour tout j, il reste à montrer que $1_{\{X \in \partial N\}}\, dA^1 = 0$. On sait que $1_{\{X \in \partial N\}}\, dA^1$ est aussi égal à $\frac{1}{2}(dL^+ - dL^-)$, où L^+ (resp. L^-) désigne le temps local en 0 de X^1 (resp. $-X^1$) ([9, Ch. 6]).

Il suffit de montrer que $L^+_\infty = L^-_\infty$ p.s., car on en déduit ensuite par arrêt que $L^+_t = L^-_t$ p.s. pour tout t rationnel, et par continuité que les processus L^+ et L^- sont égaux, et ce dernier point implique que $1_{\{X \in \partial N\}}\, dA^1 = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Notons d_ε le nombre de descentes de X^1 du niveau ε au niveau 0 (c'est aussi le nombre d'excursions de X^1 dont la hauteur dépasse ε [9]). Notons aussi d'_ε le nombre de descentes de Y^1 du niveau ε au niveau 0, et u_ε le nombre de montées de X^1 du niveau $-\varepsilon$ au niveau 0. On peut remarquer que $d'_{1/m} = n_m$.

La relation $Y = |X|$ implique $d'_\varepsilon = d_\varepsilon + u_\varepsilon$. De plus, $\varepsilon d'_\varepsilon$, $\varepsilon d_\varepsilon$ et $\varepsilon u_\varepsilon$ convergent dans L^2 et dans L^1 respectivement vers $\frac{1}{2}L'_\infty$ (L' désigne le temps local en 0 de Y^1), $\frac{1}{2}L^+_\infty$

et $\frac{1}{2}L_\infty^-$ ([9] théorème 1.10). Cela permet d'écrire $L'_\infty = L_\infty^+ + L_\infty^-$. On en déduit aussi que $\{L'_\infty = 0\} \subset \{L_\infty^+ = 0\}$ et $\{L'_\infty = 0\} \subset \{L_\infty^- = 0\}$. On peut donc se restreindre dans la suite au cas où L'_∞ est p.s. non-nul.

LEMME 10 *Le rapport* $1_{\{d'_{1/m} \neq 0\}} u_{1/m}/d'_{1/m}$ *converge dans* L^2 *vers* $\frac{1}{2}$ *lorsque m tend vers l'infini.*

Admettons un instant ce lemme. Nous en déduisons que

$$\frac{1}{m}\, u_{1/m} - \frac{1}{2}\frac{1}{m}\, d'_{1/m}$$

converge dans L^1 vers 0, et donc que $L_\infty^- = \frac{1}{2}L'^+_\infty$ p.s., et par suite que $L_\infty^+ = L_\infty^-$ p.s. La démonstration de la proposition est achevée.

Démonstration du lemme 10 Le rapport

$$1_{\{d'_{1/m} \neq 0\}} \frac{u_{1/m}}{d'_{1/m}} \quad \text{est égal à} \quad 1_{\{n_m \neq 0\}} \frac{1}{n_m} \sum_{i=1}^{n_m} \phi_{\delta(i)}.$$

Posons $\psi_i = 2(\phi_i - \frac{1}{2})$ et montrons que

$$1_{\{n_m \neq 0\}} \frac{1}{n_m} \sum_{i=1}^{n_m} \psi_{\delta(i)}$$

converge dans L^2 vers 0. On écrit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[1_{\{n_m \neq 0\}}\left(\frac{1}{n_m}\sum_{i=1}^{n_m} \psi_{\delta(i)}\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[1_{\{n_m \neq 0\}} \frac{1}{n_m^2}\, \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n_m} \psi_{\delta(i)} \sum_{j=1}^{n_m} \psi_{\delta(j)} | \mathscr{F}_\infty\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[1_{\{n_m \neq 0\}} \frac{1}{n_m^2}\, \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n_m} \psi^2_{\delta(i)} | \mathscr{F}_\infty\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[1_{\{n_m \neq 0\}} \frac{1}{n_m}\right].
\end{aligned}$$

D'après [9 (théorème 1.10)], n_m/m converge dans L^2 vers L'_∞, donc n_m croît p.s. vers $+\infty$. D'autre part, on a

$$1_{\{n_m \neq 0\}} \frac{1}{n_m} \leq \frac{1}{n_m \vee 1},$$

qui est bornée par 1 et converge p.s. vers 0, donc converge dans L^1 vers 0. La démonstration du lemme est achevée.

Nous pouvons maintenant donner une réciproque de la proposition 8.

PROPOSITION 11 *Les notations sont identiques à celles de la proposition* 9, *et on suppose de plus que* Y *est une* (F, r)*-martingale réfléchie. Alors la semi-martingale* $X = s^C(Y)$ *est une* F^M*-martingale.*

Dans le cas où $N = \mathbb{R}_+$ et $M = \mathbb{R}$, ce résultat a été montré par Gilat.

Démonstration Il suffit de montrer que $F^M(\mathscr{D}\tilde{X}) = 0$. Or

$$F^M(1_{\{X \in \mathring{N}\}}\mathscr{D}\tilde{X}) = F(1_{\{X \in \mathring{N}\}} 1_{\{Y \in \mathring{N}\}}\mathscr{D}\tilde{Y}) = 0$$

et

$$F^M(1_{\{X \in \mathring{N}'\}}\mathscr{D}\tilde{X}) = s_*(F(1_{\{X \in \mathring{N}'\}} 1_{\{Y \in \mathring{N}\}}\mathscr{D}\tilde{Y}))$$

car la restriction de s à $\mathring{N}'$ est affine. Le dernier terme est nul, donc il reste à montrer que $F^M(1_{\{X \in \partial N\}}\mathscr{D}\tilde{X}) = 0$. D'après le lemme 7, on a dans une carte symétrique de $M(F, r)$

$$F(1_{\{Y \in \partial N\}}\mathscr{D}\tilde{Y}) = F^M(1_{\{X \in \partial N\}}\mathscr{D}\tilde{X}) + \left(dL^- + 1_{\{X \in \partial N\}} \frac{1}{2} \Gamma^1_{ij}(X)\, d\langle X^i, X^j\rangle\right) D_1.$$

La condition $F(1_{\{Y \in \partial N\}}\mathscr{D}\tilde{Y})$ colinéaire à D_1 nous permet maintenant de dire que $F^M(1_{\{X \in \partial N\}}\mathscr{D}\tilde{X})$ est colinéaire à D_1. En utilisant la proposition 9, on déduit que $F^M(1_{\{X \in \partial N\}}\mathscr{D}\tilde{X}) = 0$, et ceci achève la démonstration.

4 CONVERGENCE DES MARTINGALES RÉFLÉCHIES

Zheng Weian ([13]) a montré qu'une martingale Y à valeurs dans une variété sans bord est une semi-martingale jusqu'à l'infini sur l'ensemble $\{Y_\infty$ existe dans la variété$\}$. Nous allons montrer que ce résultat est encore vrai d'une part pour une martingale réfléchie dans une variété à bord, d'autre part pour une semi-martingale à valeurs dans une variété riemannienne à bord, dont le drift est nul lorsque la semi-martingale prend ses valeurs dans l'intérieur, et a une direction suffisamment éloignée de l'espace tangent au bord lorsque la semi-martingale prend ses valeurs au bord.

On dira qu'une semi-martingale Y de N est asymptotiquement une (F, r)-martingale réfléchie s'il existe $t(\omega)$ p.s. fini tel que pour tout $s \geq t(\omega)$, on ait d'une part

$$F(1_{\{Y_s \in \mathring{N}\}}\mathscr{D}\tilde{Y}_s) = 0$$

et d'autre part $F(1_{\{Y_s \in \partial N\}}\mathscr{D}\tilde{Y}_s)$ colinéaire au champ de vecteurs r.

PROPOSITION 12 *Soit N une variété à bord munie d'une connexion F et d'un champ de vecteurs r entrant au bord. Alors tout point de N possède un voisinage U tel que toute semi-martingale Y qui est asymptotiquement une (F, r)-martingale réfléchie soit une semi-martingle jusqu'à l'infini sur l'événement*

$$\{Il\ existe\ t'(\omega)\ tel\ que\ Y_s(\omega)\ appartienne\ à\ U\ pour\ tout\ s \geq t'(\omega)\}.$$

L'énoncé est presque identique à celui d'Emery ([5 proposition 4.46]) dans le cadre des variétés sans bord, et la démonstration qui va suivre est identique.

Démonstration Si x est dans $\mathring{N}$, on est ramené au cas des variétés sans bord.

Si x est dans ∂N, on considère la variété $M(F, r)$ dédoublée de N. Puisque toute (F, r)-martingale réfléchie de N est la valeur absolue d'une F^M-martingale de $M(F, r)$, il suffit de résoudre le problème dans $M(F, r)$. Si U' est un voisinage de x dans M qui répond à la question et si $U' = s(U')$, on pourra choisir $U = |U'|$. Il suffit de trouver des coordonnées dans $M(F, r)$ au voisinage de x, convexes pour la connexion F^m, et on pourra appliquer ensuite la démonstration d'Emery.

Considérons une carte symétrique $(y^1, \ldots, y^n)$ de $M(F, r)$ au voisinage de x telle que x ait pour coordonnées $(0, \ldots, 0)$. Pour un réel positif c suffisamment grand, et quitte à réduire l'ouvert V de définition, l'application $(x^1, \ldots, x^n)$ définie par $x^i = y^i + c \sum_j (y^j)^2$ pour tout i est une carte locale dont chaque coordonnée est convexe pour F^M (on peut considérer séparément les ensembles $V \cap N$, $V \cap N'$ et $V \cap \partial N$).

Nous pouvons énoncer en corollaire le résultat recherché. La démonstration est identique à celle d'Emery ([5 corollaire 4.48]), valable pour les variétés sans bord.

COROLLAIRE 13 *Si Y est asymptotiquement une (F, r)-martingale réfléchie dans N, c'est une semi-martingale jusqu'à l'infini sur l'événement $\{\lim_{t\to\infty} Y_t$ existe dans $N\}$.*

Démonstration Soient (U_n) un recouvrement de N par des ouverts vérifiant la condition de la proposition 12, et $A_n = \{\lim_{t\to\infty} Y_t$ existe dans $U_n\}$. En utilisant la proposition 12, on peut dire que Y est une semi-martingale jusqu'à l'infini sur A_n, donc aussi sur

$$\bigcup_n A_n = \left\{\lim_{t\to\infty} Y_t \text{ existe dans } N\right\}.$$

Darling ([2]) a montré qu'une martingale dans une variété riemannienne sans bord converge dans le compactifié d'Alexandroff si sa variation quadratique riemannienne est finie. Nous allons montrer que ce résultat est encore vrai pour une martingale réfléchie à valeurs dans une variété riemannienne à bord.

Soient N une variété riemannienne à bord de métrique g et r un champ de vecteurs au bord, non-nuls et dirigés vers l'intérieur. On notera F la connexion de Levi-Civita associée à g, et la notation (g, r)-martingale désignera une (F, r)-martingale.

PROPOSITION 14 *Soient Y une semi-martingale défine sur N, et $\hat{N}$ le compactifié d'Alexandroff de N. On note $\int_0^t \langle dY | dY \rangle$ la variation quadratique de Y entre les instants*

0 *et t. Si Y est asymptotiquement une (g, r)-martingale réfléchie, alors on a l'inclusion*

$$\left\{\int_0^\infty \langle dY|dY\rangle < \infty\right\} \subset \{Y \text{ converge dans } \hat{N}\}.$$

Démonstration Il suffit de montrer que pour tout n,

$$\{t(\omega) \leq n\} \cap \left\{\int_0^\infty \langle dY|dY\rangle < \infty\right\} \subset \{Y \text{ converge dans } \hat{N}\}.$$

Pour cela, on se place sur $M(F, r)$ (et non $M(g)$) et on considère la semi-martingale X, dédoublée de Y, qui est asymptotiquement une F^M-martingale. Si g est la métrique de N, on choisit de munir N' de la métrique $s^*(g)$, que l'on notera encore g. Soit $\hat{M}(F, r)$ le compactifié d'Alexandroff de $M(F, r)$. On cherche à montrer que

$$\{t(\omega) \leq n\} \cap \left\{\int_0^\infty \langle dX|dX\rangle < \infty\right\} \subset \{X \text{ converge dans } \hat{N}\}.$$

La démonstration dans le cas des variétés sans bord ([5 proposition 5.32]) s'applique pour X, malgré la discontinuité en ∂N de la métrique de $M(F, r)$. On remarque ensuite que X converge dans $\hat{M}(F, r)$ si et seulement si Y converge dans $\hat{N}$. Il reste à montrer que les variations quadratiques riemanniennes de X et Y sont égales. Pour cela, nous allons énoncer un lemme dont la démonstration suivra la fin de la preuve de la proposition.

LEMME 15 *Soient P une variété C^∞, Z et Z' deux semi-martingales à valeurs dans P, b une section mesurable localement bornée de $T^*P \otimes T^*P$ et H un processus réel adapté, localement borné et tel que $\{H \neq 0\}$ soit inclus dans $\{Z = Z'\}$. Alors*

$$\int Hb(Z)(dZ \otimes dZ) = \int Hb(Z')(dZ' \otimes dZ').$$

Le lemme permet de justifier la deuxième ligne du calcul qui suit.

$$\begin{aligned}\langle dX|dX\rangle &= g(dX \otimes dX) = 1_{\{X \in N\}} g(dX \otimes dX) + 1_{\{X \in \mathring{N}'\}} g(dX \otimes dX)\\ &= 1_{\{X \in N\}} g(dY \otimes dY) + 1_{\{X \in \mathring{N}'\}} s^*(g)(s_*(dY \otimes dY))\\ &= 1_{\{X \in N\}} g(dY \otimes dY) + 1_{\{X \in \mathring{N}'\}} s^*(s^*(g))(dY \otimes dY)\\ &= g(dY \otimes dY) = \langle dY|dY\rangle.\end{aligned}$$

La démonstration de la proposition est achevée.

Démonstration du lemme Il suffit de faire la démonstration avec $b = df \otimes df$, f étant une fonction dans $C^\infty(P)$. On écrit

$$\int Hd\langle f(Z), f(Z)\rangle = \int 1_{\{Z=Z'\}} Hd\langle f(Z), f(Z)\rangle$$
$$= \int Hd\left\langle \int 1_{\{Z=Z'\}}\, df(Z), \int 1_{\{Z=Z'\}}\, df(Z)\right\rangle$$

et il suffit ensuite de remarquer que $\int 1_{\{Z=Z'\}}\, d(f(Z) - f(Z'))$ est un processus à variation finie.

Les martingales réfléchies que nous avons étudiées jusqu'à maintenant ont une direction de réflexion constante au bord, et leur drift peut être dirigé vers l'intérieur ou vers l'extérieur de la variété, comme le montrent les exemples qui suivent la démonstration du lemme 7. Nous allons maintenant nous intéresser à des martingales réfléchies dont la direction de réflexion est aléatoire, mais nous aurons besoin de supposer que le drift au bord est dirigé uniquement vers l'intérieur de la variété. La remarque qui suit la démonstration de la proposition 16 explique l'utilité de cette hypothèse supplémentaire.

Dans la suite, la variété N sera munie d'une métrique riemannienne g, et la variété dédoublée sera $M(g)$, c'est à dire la variété obtenue en dédoublant N à l'aide du champ n des vecteurs normaux de ∂N, dirigés vers l'intérieur.

Si x est un élément de ∂N et α un élément de $[0, \pi/2[$, on appellera cône d'angle α en x et on notera $\mathscr{C}(x, \alpha)$ le sous-ensemble de T_xN constitué des vecteurs qui forment un angle inférieur ou égal à α avec le vecteur normal entrant $n(x)$.

On dira qu'une semi-martingale Y à valeurs dans N est asymptotiquement une g-martingale dans l'intérieur lorsqu'il existe $t(\omega) < \infty$ tel que pour tout $s \geq t(\omega)$, on ait $F(1_{\{Y_s \in \mathring{N}\}} \mathscr{D}\tilde{Y}_s) = 0$. On notera $A(\alpha)$ pour tout $\alpha \in [0, \pi/2[$, l'ensemble des ω tels qu'il existe $t'(\omega) < \infty$ vérifiant: pour tout $s \geq t'(\omega)$, $F(1_{\{Y_s \in \partial N\}} \mathscr{D}\tilde{Y}_s)$ appartient à $\mathscr{C}(Y_s, \alpha)$.

On dira qu'une semi-martingale Y qui est asymptotiquement une g-martingale dans l'intérieur est asymptotiquement une (g, α)-martingale réfléchie lorsque $P(A(\alpha)) = 1$.

Les (g, n)-martingales réfléchies dont le drift au bord est dirigé vers l'intérieur de la variété sont des $(g, 0)$-martingales réfléchies. Il est donc facile de vérifier que toutes les (g, n)-martingales réfléchies dans une variété à bord localement convexe sont des $(g, 0)$-martingales réfléchies, mais dans le cas général, une (g, n)-martingale réfléchie n'est pas une (g, α)-martingale réfléchie.

Notons aussi qu'une (g, α)-martingale réfléchie est une (g, n)-martingale réfléchie si et seulement si on peut choisir $\alpha = 0$.

PROPOSITION 16 *Soit* $\varepsilon \in]0, \pi/2]$. *Alors tout point de N possède un voisinage* $U(\varepsilon)$ *tel que toute semi-martingale Y qui est asymptotiquement une g-martingale dans l'intérieur soit une semimartingale jusqu'à l'infini sur l'événement*

$$A\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \cap \{\textit{Il existe } t''(\omega) \textit{ tel que } Y_s \textit{ appartienne à } U(\varepsilon) \textit{ pour tout } s \geq t''(\omega)\}.$$

Démonstration Notons $A'(\varepsilon)$ cet événement.

Si x est dans $\mathring{N}$, on est ramené au cas des martingales à valeurs dans les variétés sans bord.

Si x est dans ∂N, on définit une carte bornée $(y^1, \ldots, y^n)$ (avec $y^1 \geq 0$) au voisinage de x telle que x ait pour coordonnées $(0, \ldots, 0)$, et telle que $\{y^1 = 0\} \subset \partial N$. Pour un réel positif c suffisamment grand, et quitte à réduire l'ouvert de définition, l'application $(x^1, \ldots, x^n)$ définie par $x^i = y^i + c\sum_j (y^j)^2$ pour tout i est une carte locale dont chaque coordonnée est convexe. Il existe, quitte à réduire le domaine U de la carte, un réel c' tel que pour tout vecteur V dans le cône d'angle $\pi/2 - \varepsilon$ en un point x' du domaine, on ait $|\langle dy^i, V\rangle| \leq c'\langle dy^1, V\rangle$. Et puisque $\langle dx^1, V\rangle$ est égal à

$$\langle dy^1, V\rangle + 2\sum \langle y^j\, dy^j, V\rangle,$$

on peut encore restreindre le domaine U pour avoid $\langle dx^1, V\rangle \geq 0$ (en imposant $2\sum |y^j| < (c'c)^{-1}$).

On aura alors

$$d(x^1 \circ Y) = dS^1 + \langle d^2x^1, \mathscr{D}\tilde{Y} - F(\mathscr{D}\tilde{Y})\rangle + \langle dx^1, F(1_{\{Y\in\partial N\}}\mathscr{D}\tilde{Y})\rangle$$

où S^1 est une martingale locale. Pour des temps suffisamment grands, les deux derniers termes du membre de droite deviennent positifs sur $A'(\varepsilon)$. Notons $x^1 \circ Y = S^1 + A^1$. Le processus A^1 est croissant pour t suffisamment grand, ce qui implique que S^1 soit majorée donc converge sur $A'(\varepsilon)$, puis que A^1 converge et soit à variation totale finie. En conclusion, $x^1 \circ Y = S^1 + A^1$ est une semi-martingale jusqu'à l'infini sur $A'(\varepsilon)$.

Il reste à montrer que $x^i \circ Y$ est une semi-martingale jusqu'à l'infini sur $A'(\varepsilon)$, pour $i \geq 2$. On a toujours

$$d(x^i \circ Y) = dS^i + \langle d^2x^i, \mathscr{D}\tilde{Y} - F(\mathscr{D}\tilde{Y})\rangle + \langle dx^i, F(1_{\{Y\in\partial N\}}\mathscr{D}\tilde{Y})\rangle$$

avec S^i martingale locale. Si nous montrons que l'intégrale du dernier terme est un processus à variation total finie sur $A'(\varepsilon)$, nous pourrons nous ramener à la démonstration précédente.

Ce dernier point est obtenu en constatant que quitte à réduire encore U et à augmenter c', on peut avoir $|\langle dx^i, V\rangle| \leq c'\langle dy^1, V\rangle$, puis $\langle dy^1, V\rangle \leq 2\langle dx^1, V\rangle$, ce qui implique $|\langle dx^i, V\rangle| \leq 2c'\langle dx^1, V\rangle$. On aura donc sur $A'(\varepsilon)$ et pour t grand,

$$|\langle dx^i, F(1_{\{Y\in\partial N\}}\mathscr{D}\tilde{Y})\rangle| \leq 2c'\langle dx^1, F(1_{\{Y\in\partial N\}}\mathscr{D}\tilde{Y})\rangle$$

et on sait que l'intégrale du dernier terme est finie, ce qui achève la démonstration.

Remarque Nous avons utilisé dans cette démonstration le fait que la partie à variation finie de $x^1 \circ Y$ devenait croissante, et ceci est dû au fait que le drift au bord est dirigé vers l'intérieur uniquement. Le cas où ce drift est autorisé à prendre ses valeurs dans un cône extérieur reste non résolu.

Soit Y une semi-martingale qui est asymptotiquement une g-martingale dans l'intérieur. Notons A l'ensemble sur lequel il existe $t'(\omega)$ et $\varepsilon(\omega) > 0$ tels que pour tout $s \geq t'(\omega)$, $F(1_{\{Y_s \in \partial N\}} \mathscr{D} \tilde{Y}_s)$ appartienne à $\mathscr{C}(Y_s, \pi/2 - \varepsilon(\omega))$. L'ensemble A est aussi égal à $\bigcup_{\alpha \in [0, \pi/2[} A(\alpha)$.

La proposition précédente conduit au deuxième résultat recherché:

COROLLAIRE 17 *La semi-martingale Y est une semi-martingale jusqu'à l'infini sur l'événement*

$$A \cap \left\{ \lim_{t \to \infty} Y_t \textit{ existe dans } N \right\}.$$

Démonstration Soient pour tout p un recouvrement $(U_n(1/p))_{n \in \mathbb{N}}$ de N par des ouverts vérifiant la condition de la proposition 16, et

$$A_n^p = \left\{ \lim_{t \to \infty} Y_t \text{ existe dans } U_n\left(\frac{1}{p}\right) \right\} \cap A\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{p}\right).$$

En utilisant la proposition 16, on peut dire que Y est une semi-martingale jusqu'à l'infini sur A_n^p, donc aussi sur $\bigcup_n A_n^p = \{\lim_{t \to \infty} Y_t \text{ existe dans } N\} \cap A(\pi/2 - 1/p)$.

Comme $A \cap \{\lim_{t \to \infty} Y_t \text{ existe dans } N\} = \bigcup_p \bigcup_n A_n^p$, on a le résultat.

Soit Y une semi-martingale qui est asymptotiquement une g-martingale dans l'intérieur. Notons A' l'ensemble sur lequel il existe $t'(\omega)$ et $\varepsilon(\omega) > 0$ tels que pour tout $s \geq t'(\omega)$, $F(1_{\{Y_s \in \partial N\}} \mathscr{D} \tilde{Y}_s)$ appartienne à $\mathscr{C}(Y_s, \pi/2 - \varepsilon(\omega))$ ou $-\mathscr{C}(Y_s, \pi/2 - \varepsilon(\omega))$.

Nous allons maintenant montrer un résultat identique à celui de la proposition 14.

PROPOSITION 18 *On a l'inclusion*

$$A' \cap \left\{ \int_0^\infty \langle dY | dY \rangle < \infty \right\} \subset \{Y \textit{ converge dans } \hat{N}\}.$$

Remarque On autorise maintenant une réflexion au bord avec un drift dirigé éventuellement vers l'extérieur de la variété, car cela se produit lorsqu'un terme dépendant de la connexion et du crochet de la semi-martingale est suffisamment négatif. Mais comme les symboles de Christoffel sont localement bornés et on travaille uniquement sur l'ensemble sur lequel la variation quadratique riemannienne de Y est finie, ce terme sera bien contrôlé.

Démonstration de la proposition On définit $A = \{\int_0^\infty \langle dY | dY \rangle < \infty\}$, et

$$A_m = A \cap A' \cap \left\{ \varepsilon(\omega) \geq \frac{1}{m} \right\} \cap \{t(\omega) \leq m\} \cap \{t'(\omega) \leq m\}.$$

Il suffit de montrer que pour tout m, A_m est inclus dans $\{Y \text{ converge dans } \hat{N}\}$.

Il suffit de montrer que tout point x de N possède un voisinage compact K tel que pour toute fonction f de classe C^∞ à support dans K, la semi-martingale $f(Y)$ soit convergente sur A_m.

Si x n'est pas dans ∂N, on fait en sorte que K ne rencontre pas ∂N, et il existe une constante c telle que

$$(df \otimes df)(dY \otimes dY) < c\langle dY | dY \rangle \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{2}|\mathrm{Hess}^M f(dY \otimes dY)| < c\langle dY | dY \rangle.$$

Le premier terme est l'accroissement de la variation quadratique de $f(Y)$ et le deuxième est l'accroissement après le temps m de la variation totale de la partie à variation finie de $f(Y)$. On déduit de ces majorations que $f(Y)$ est une semi-martingale convergente sur A_m.

Si x est dans ∂N, choisissons K inclus dans un ouvert relativement compact U tel que $\bar{U}$ soit inclus dans le domaine W d'une carte φ dont on notera $(x^1, \dots, x^n)$ les coordonnées, telle que $\varphi(W) \subset \{x^1 \geq 0\}$, $\varphi(W \cap \partial N) \subset \{x^1 = 0\}$ et que pour tout y sur le bord on ait $D_1(y) = n(y)$, vecteur unitaire normal au bord. Soit ϕ une fonction de classe C^∞ à valeurs dans $[0, 1]$, valant 1 sur $\bar{U}$ et à support compact dans W. Posons $h(Y) = Y^1\phi(Y)$. Montrons que $h(Y)$ est une semi-martingale jusqu'à l'infini sur A_m. On a pour des temps supérieurs à m,

$$dh(Y) = dS + \frac{1}{2}\,\mathrm{Hess}\; h(dY \otimes dY) + 1_{\{Y \in \partial N\}}\langle dh, F(\mathscr{D}\tilde{Y})\rangle.$$

où S est une martingale locale. Or si y est dans ∂N, on a $dh(y) = \phi(y)\, dx^1$. De plus, la première composante de $1_{\{Y \in \partial N\}}F(\mathscr{D}\tilde{Y})$ est égale à

$$1_{\{Y \in \partial N\}}\left(dA^1 + \frac{1}{2}\,\Gamma^1_{jk}(Y)\, d\langle Y^j, Y^k\rangle\right)$$

si A^1 est la partie à variation finie de $x^1 \circ Y$, donc

$$dh(Y) = dS + \frac{1}{2}\,\mathrm{Hess}\; h(dY \otimes dY) + 1_{\{Y \in \partial N\}}\phi(Y)\left(dA^1 + \frac{1}{2}\,\Gamma^1_{jk}\, d\langle Y^j, Y^k\rangle\right).$$

Les quantités $dh \otimes dh(dY \otimes dY)$, $1_{\{Y \in \bar{U}\}}|\Gamma^1_{jk}(Y)\, d\langle Y^j, Y^k\rangle|$ et $\frac{1}{2}|\mathrm{Hess}^M h(dY \otimes dY)|$ peuvent être majorées par $c\langle dY | dY\rangle$ pour une constante c suffisamment grande, et on en déduit que $h(Y)$ est la somme d'une semi-martingale jusqu'à l'infini sur A_m et de $\int 1_{\{Y \in \partial N\}}\phi(Y)\, dA^1$ qui est un processus croissant. Comme h est bornée, on en déduit que $h(Y)$ est une semi-martingale jusqu'à l'infini sur A_m. Soit L son temps local en 0. On sait maintenant que L_∞ est fini sur A_m. Il est facile de vérifier que l'on a $1_{\{Y \in \partial N\}}1_{\{Y \in K\}}\, dA^1 = \frac{1}{2}1_{\{Y \in K\}}\, dL$. La première composante de $1_{\{Y \in K\}}1_{\{Y \in \partial N\}}F(\mathscr{D}\tilde{Y})$ est égale à $1_{\{Y \in K\}}1_{\{Y \in \partial N\}}(dA^1 + \frac{1}{2}\Gamma^1_{jk}(Y)\, d\langle Y^j, Y^k\rangle)$, et peut donc être majorée en valeur absolue par $dL + c\langle dY | dY\rangle$. Si y est dans ∂N, on note π la projection orthogonale de $T_y N$ sur $T_y \partial N$. La condition de réflexion dans un cône implique l'existence d'une constante C telle que l'on ait

$$\|\pi(1_{\{Y \in K\}} 1_{\{Y \in \partial N\}} F(\mathscr{D} \tilde{Y}))\| \leq C 1_{\{Y \in K\}} 1_{\{Y \in \partial N\}} \left| dA^1 + \frac{1}{2} \Gamma^1_{jk}(Y)\, d\langle Y^j, Y^k \rangle \right|$$

qui permet de déduire l'inégalité

$$\|\pi(1_{\{Y \in K\}} 1_{\{Y \in \partial N\}} F(\mathscr{D} \tilde{Y}))\| \leq C(dL + c\langle dY | dY \rangle).$$

Soit maintenant f une fonction C^∞ à support dans K. Il reste à montrer que $f(Y)$ est une semi-martingale convergente sur A_m. On a

$$\begin{aligned} df(Y) &= dS' + \frac{1}{2} \text{Hess } f(dY \otimes dY) + 1_{\{Y \in \partial N\}} \langle df, F(\mathscr{D} \tilde{Y}) \rangle \\ &= dS' + \frac{1}{2} \text{Hess } f(dY \otimes dY) + 1_{\{Y \in \partial N\}} D_1 f\left(dA^1 + \frac{1}{2} \Gamma^1_{jk}(Y)\, d\langle Y^j, Y^k \rangle \right) \\ &\quad + \langle df, \pi(1_{\{Y \in K\}} 1_{\{Y \in \partial N\}} F(\mathscr{D} \tilde{Y})) \rangle \end{aligned}$$

où S' est une martingale locale. Comme dans la première situation, on peut affirmer que S' est une martingale convergente et $\int$ Hess $f(dY \otimes dY)$ converge. Si C' est une constante qui majore le gradient de f, on peut majorer sur A_m la variation totale de la somme des deux derniers termes par $C'C \int_0^\infty (2\,dL + 2c\langle dY | dY \rangle)$. On en déduit que $f(Y)$ converge sur A_m, ce qui achève la démonstration.

Remarque Revenons au cas d'une variété à bord N munie d'une connexion F et d'un champ de vecteurs r sur le bord, dirigés vers l'intérieur. Si nous définissons une nouvelle connexion F' égale à la restriction de F^M à la variété N, alors les martingales réfléchies sont les mêmes pour F et F' car dans une carte φ définie dans la démonstration de la proposition 4, on a pour Y semi-martingale

$$F(1_{\{Y \in \partial N\}} \mathscr{D} \tilde{Y}) = F'(1_{\{Y \in \partial N\}} \mathscr{D} \tilde{Y}) + 1_{\{Y \in \partial N\}} \frac{1}{2} \Gamma^1_{ij}(Y)\, d\langle Y^i, Y^j \rangle D_1$$

et D_1 est colinéaire à r sur le bord. De plus, le drift au bord d'une martingale réfléchie Y pour F', qui est égal à $1_{\{Y \in \partial N\}}\, dA^1 D_1$ (si on note A^1 la partie à variation finie de sa première coordonnée) est toujours dirigé vers l'intérieur de la variété. On peut alors utiliser des méthodes identiques à celles employées pour démontrer la proposition 16, le corollaire 17 et la proposition 18 pour retrouver respectivement les résultats de la proposition 12, du corollaire 13 et de la proposition 14.

Références

[1] M. T. Barlow and M. Yor, Sur la construction d'une martingale continue, de valeur absolue donnée, Séminaire de Probabilités 14, Lecture Notes in Mathematics 784, Springer.

[2] R. W. R. Darling, Convergence of martingales in a Riemannian manifold, *Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ.* **19** (1983), 753–763.

[3] E. B. Davies, Heat kernel bounds for second order elliptic operators on Riemannian manifolds, *Amer. J. Math.* **109** (1987), 545–570.

[4] N. El Karoui and M. Chaleyat Maurel, Un problème de réflexion et ses applications au temps local et aux équations différentielles stochastiques sur $\mathbb{R}$. Cas continu, Astérisque 52–53, Temps locaux (1978) 117–144.

[5] M. Emery, *Stochastic Calculus in Manifolds*, Springer Verlag 1989.

[6] M. Emery, Note sur l'exposé de S. W. He, J. A. Yan, W. A. Zheng (Sur la convergence des semi-martingales continuous dans $\mathbb{R}^n$ et des martingales dans une variété), Séminarie de Probabilités 17, p. 185, Lecture Notes in Mathematics 986, Springer 1981.

[7] C. O. Kiselman, Fonctions delta-convexes, delta-sous-harmoniques et delta-plurisousharmoniques, Séminaire P. Lelong (analyse) 1975/76.

[8] P. A. Meyer, Géométrie stochastique sans larmes, Séminaire de Probabilitiés 15, Lecture Notes in Mathematics 850. Springer 1981.

[9] D. Revuz and M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer Verlag 293, 1991.

[10] L. Schwartz, Géométrie différenticlle du deuxième ordre, semimartingales et Equations Différenticlles Stochastiques sur une variété différentielle, Séminairc de Probabilités 16, LN 921, Springer 1982.

[11] H. Tanaka, Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions in convex region, *Hiroshima Math. J.* **9** (1979), 163–177.

[12] S. R. S. Varadhan and R. J. Williams, Brownian motion in a wedge with oblique reflection, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **38** (1985), 405–443.

[13] W. A. Zheng, Sur le théorème de convergence des martingales dans une variété riemannienne, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. *Gebiete* **63** (1983), 511–515.