UNIVERSITÉ BORDEAUX 1
Sciences Technologies

Septembre 2011

CPI 317

Exercices

Agnès Bachelot

Table des matières

1 - Séries Numériques

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathbb{K}$. Montrer que si $\sum_{p\geq 0} u_{2p}$ converge, et $\sum_{p\geq 0} u_{2p+1}$ diverge, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

Exercice 2. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} \sin(n)$ diverge.

1 - 1 Séries à termes positifs

Exercice 3. Etudier la convergence et calculer la somme des séries :
1 $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$, **2** $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$, **3** $\displaystyle\sum_{n\geq 3} \frac{2n-1}{n(n^2-4)}$,

Exercice 4. **1** Montrer que $\frac{1}{3} = 0.333\,333\,333\,\cdots$
2 Calculer le réel $\alpha = 0.102\,102\,102\,\cdots$

Exercice 5. Etudier la convergence des séries :
1 $\displaystyle\sum \frac{1}{1+\sqrt{n}}$, **2** $\displaystyle\sum \sqrt{\frac{n^2-1}{n^5+5}}$, **3** $\sum e^{-n^a}$.

Exercice 6. Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x)$. Ecrire la formule de Mac-Laurin pour f. Etudier la convergence, et calculer éventuellement la somme de la série

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

Exercice 7. Etudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$.

Exercice 8. (voir H-Prepa 13)
Pour tout entier k on pose : $u_k = \dfrac{3}{2^{2k+3}+5k+2}$.
1 En majorant u_k par le terme général d'une série géométrique montrer que $\sum u_k$ est convergente. On note R_n le reste d'ordre n de cette série.

2 Trouver n tel que $|R_n| \leq 10^{-2}$.

3 Sans faire les calculs, donner l'expression d'une valeur approchée à 10^{-2} près de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

H-Prépa : Lire exercice 6.

H-Prépa : exercice 10.

Exercice 9. Séries de Bertrand

Etant donnés deux réels a et b, on considère la série

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^a (\ln n)^b}.$$

1 On suppose $a = 1$. En utilisant le théorème de comparaison avec une intégrale, montrer que la série converge si et seulement si $b > 1$. **2** On suppose $a \neq 1$. En comparant cette série à une série de Riemann, montrer qu'elle converge si et seulement si $a > 1$.

Exercice 10. **1** H-Prepa 11

2 Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}$

Exercice 11. Déterminer la nature des séries de terme général

$$\frac{\ln n}{\sqrt{n^3+n-1}},\quad \frac{(n!)^3}{n^{n^2}},\quad \frac{n^2}{\sqrt{(n-1)!}},\quad \frac{(n!)^2}{(2n)!},\quad \left(1-\frac{1}{\ln n}\right)^n,\quad \frac{n^n}{2^{n^2}}.$$

1 - 2 Séries quelconques

Exercice 12. On considère les séries suivantes de terme général noté u_n. Dire, en le justifiant, si elles sont convergentes, divergentes ou si on ne peut pas déterminer leur nature.

1 $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ **2** $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$

3 $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\dfrac{1}{n}\right)$ **4** $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

H-Prépa : exercice 16 .

Exercice 13. **1** La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{3+2n^2}}$ est-elle convergente ? absolument convergente ? **2** Pour quelles valeurs du réel a, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{1+n^2}$ est-elle absolument convergente ? convergente ? divergente ? **3** Pour quelles valeurs du réel $\alpha > 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n \left(1-\cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)$ est-elle absolument convergente ? convergente mais non absolument convergente ?

Exercice 14. Déterminer la nature de la série de terme général

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right),\quad \alpha \in \mathbb{R}_+^*.$$

Exercice 15. Déterminer la nature des séries de terme général

$$\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right),\quad \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}},\quad \sqrt{n^3+n+1}-\sqrt{n^3+n-1},\quad e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Exercice 16. Déterminer la nature des séries de terme général

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}},\quad \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cos\left(\frac{1}{n}\right),\quad \frac{(-1)^n}{n-\ln n},\quad \frac{(-1)^n\sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}+(-1)^n},\quad \frac{(-1)^n}{(\ln n+(-1)^n)^2},\quad \frac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}.$$

H-Prépa : 17.

Exercice 17. **1** Déterminer les réels a et b tels que la série de terme général $u_n = (n^3+n^2+n+1)^{\frac{1}{3}} - (n^2+1)^{\frac{1}{2}} + a + \dfrac{b}{n}$ soit convergente.

2 Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $u_n = \sqrt[4]{n^4+3n^2} - \sqrt[3]{P(n)}$ soit le terme général d'une série convergente.

H-Prépa : 19.

$\boxed{1 - 3}$ Autres exercices

Exercice 18. Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs de la forme $u_n = f(n)$ avec f décroissante, continue par morceaux. Montrer que

$$\lim_{N \mapsto +\infty} \int_{n+1}^{N+1} f(t)\, dt \leq R_n \leq \lim_{N \mapsto +\infty} \int_{n}^{N} f(t)\, dt$$

H-Prépa : 20.

Exercice 19. (Examen 2008)

Pour tout entier n on pose :

$$a_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \quad , \quad w_n = (-1)^n a_n$$

1 Montrer que $(a_n)_n$ est une suite décroissante.

2 Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n$ où $v_n = -\ln\left(\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\right)$. En déduire la nature de la suite $(\ln(a_n))_n$ puis de la suite $(a_n)_n$.

3 En déduire la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} w_n$.

Exercice 20. (Deug Partie I 2004) *Etude d'une série dont le terme général est le reste d'une série convergente*

Soit n_0 un entier naturel fixé. Soit $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} a_n$ une série numérique convergente. On définit pour n entier naturel supérieur ou égal à n_0, r_n son reste de rang n : $r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

1 *Cas* 1 *:* On pose pour $n \geq 0$, $a_n = \dfrac{1}{2^n}$.

Calculer r_n puis montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} r_n$ converge et calculer sa somme.

2 *Cas* 2 *:* On pose pour $n \geq 1$, $a_n = \dfrac{1}{n^2}$.

a Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a :

$$\frac{1}{n+1} \leq r_n \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

b Donner alors un équivalent de (r_n) lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
Que peut-on en conclure sur la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} r_n$.

3 *Cas* 3 *:* On pose pour $n \geq 1$, $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

a Justifier la convergence de $\sum\limits_{n \geq 1} a_n$.

b Soit n un entier naturel non nul. On définit la suite (I_n) par $I_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx$.

- Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.
- Montrer que $I_n = \ln 2 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$. (*indication : calculer* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k$).
- En déduire la valeur $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$, puis exprimer r_n en fonction de I_n.

c En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$I_n = \frac{(-1)^n}{a(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

où a et $\alpha > 1$ sont des réels à déterminer.

d En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n \geq 1} r_n$.

2 - Espaces Vectoriels Normés

2 - 1 Normes

Exercice 21. Normes sur un produit fini de $\mathbb{K}$-evn.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(E_k, N_k)_{1 \leq k \leq n}$ des $\mathbb{K}$-evn, $E = \prod_{k=1}^{n} E_i$. Considérons pour tout $x = (x_1, \cdots, x_n)$ de E les réels $\|x\|_1$, $\|x\|_2$, $\|x\|_\infty$ définis par :

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} N_k(x_k), \qquad \|x\|_2 = \left[\sum_{k=1}^{n} (N_k(x_k))^2\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} N_k(x_k).$$

Montrer que les applications $\|.\|_1, \|.\|_2, \|.\|_\infty$ sont des normes sur E.

Exercice 22. Les applications suivantes sont-elles des normes sur E ?
1 $E = \mathbb{R}^2$: $\quad (x, y) \mapsto |5x + 3y|, \qquad (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + xy + 2y^2}$
2 $E = \mathcal{C}^1([0, 1]; \mathbb{R})$: $\quad f \to |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| \, dt, \qquad g \to \int_0^1 |g'(t)| \, dt.$

Exercice 23. $E = \left\{f \in \mathcal{C}^1([0, 1]; \mathbb{R})\ ;\ f(0) = 0\right\}$. On note $N_\infty(f) = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$ et $N'_\infty(f) = \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)|$.
Montrer que ce sont des normes sur E mais pas équivalentes.

Exercice 24. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$, et $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. On considère les normes $\|\ \|_1$,$\|\ \|_2$, et $\|\ \|_\infty$ définies par :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| \, dt, \qquad \|f\|_2 = \left[\int_a^b |f(t)|^2 \, dt\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|.$$

1 Montrer que $\forall f \in E\ \|f\|_1 \leq (b - a)^{\frac{1}{2}}\ \|f\|_2$ et $\forall f \in E\ \|f\|_2 \leq (b - a)^{\frac{1}{2}}\ \|f\|_\infty$.
2 Démontrer que $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$, $\|\ \|_\infty$ sont deux à deux non équivalentes.

H-Prépa : lire exercice 15.

H-Prépa : exercice 16 (dernière question à lire)

H-Prépa : exercices 3, 4.

2 - 2 Autres exercices

Exercice 25. Ouvert ou fermé ?
1 $(]0, 1[)^2$ dans $\mathbb{R}^2$ $\qquad$ **a** $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ $\qquad$ **2** $\{(x, y)/xy = 1\}$ dans $\mathbb{R}^2$

Exercice 26. Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Montrer que $\sup A \in \bar{A}$.

H-Prépa : exercices 8, 11, 20.

Exercice 27. (DS 2006)
1 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$.
Quelle est la définition d'une norme N définie sur E ?

2 Dans la suite $E = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.
On considère la base canonique $\mathcal{B}$ de E formée des matrices B_{ij} ne possédant qu'un élément non nul situé sur la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne.
On note m_{ij} les composantes d'une matrice M dans cette base.
On considère les applications N et $\|.\|$ définies sur E par :

$$N(M) = n \max_{1\leq i,j\leq n} |m_{ij}| \quad et \quad \|M\| = \max_{1\leq i,j\leq n} |m_{ij}|.$$

a Montrer que N et $\|.\|$ sont des normes sur E.
b Montrer que :

$$\forall A \in E \quad \forall B \in E \qquad N(AB) \leq N(A)\, N(B).$$

c N et $\|.\|$ sont-elles équivalentes ?

3 Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels. On considère la suite de matrices

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, A^k\right)_{n\geq 0}$$

a Montrer que c'est une suite de Cauchy pour N.
b En déduire qu'elle converge pour N. On note e^A sa limite.
c Converge-t-elle pour $\|.\|$? Si oui, quelle est sa limite ?
d Comment faire pour calculer e^A à partir des composantes de A ?

4 Application 1 : Expliciter e^A dans le cas $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5 Application 2 : Soit θ un réel fixé. Expliciter e^B dans le cas $B = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$.

3 - Continuité

3 - 1 Exercices basiques

H-Prépa : exercice 2, Application 2.

Exercice 28. Etudier la continuité de l'application $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par : $g(z) = z^n$

Exercice 29. Déterminer si les applications suivantes sont continues sur leur ensemble de définition :

1 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par : $f(x,y,z) = \left(\dfrac{x \sin y}{y}, z + y^2\right)$ si $y \neq 0$, et $f(x,0,z) = (x,z)$.

2 $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $g(x,y) = \left(\dfrac{x \sin xy}{x^2 + y^2}\right)$ si $(x,y) \neq (0,0)$, et $g(0,0) = 0$.

Exercice 30. Montrer que l'application $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $h(x,y) = \left(\dfrac{\tan xy}{x^2 + y^2}\right)$ si $(x,y) \neq (0,0)$, et $h(0,0) = 0$ n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 31. Soit u une application continue $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Les ensembles suivants sont-ils ouverts ? fermés ?

1 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \geq u(x)\}$, **2** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y < u(x)\}$.

Exercice 32. Representer graphiquement les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ et, pour chacune d'elle dire si elle est ouverte, fermée, ou bien ni ouverte ni fermée.

1 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x| \neq 1 \ et \ |y| \neq 1\}$, **2** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 1 - xy > 0\}$.

Exercice 33. Les ensembles suivants sont-ils fermés ? bornés ?

1 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^4 + 3y^6 = 1\}$, **2** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^3 = 1\}$.

H-Prépa : Application 5. Exercices 9, 10c).

H-Prépa : Exercice résolu 2 p. 88 : 1) et 2).

Exercice 34. (Examen 2009)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient B et C deux éléments de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

1 Montrer que l'application g définie sur $\mathcal{M}_{n\times n}$ par : $g(M) = BMC$ est continue sur $\mathcal{M}_{n\times n}$.

Dans la suite de l'exercice on considère $n = 3$.

2 Soit k un entier non nul. Soit M_k la matrice de $\mathcal{M}_{3\times 3}$ définie par :

$$M_k = \begin{pmatrix} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^k & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2k} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que la suite $(M_k)_k$ converge. Déterminer sa limite.

3 Montrer que la suite $(BM_kC)_k$ converge. Déterminer sa limite.

Exercice 35. (Examen 2008)
1 Montrer que la fonction $f : (x, y, z) \mapsto (x^2 + y^2, \sin(xyz))$ est continue sur $\mathbb{R}^3$.

2 Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels. On note $< .,. >$ le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^n$.
Montrer que l'application $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $h(u, v) =< Au, v >$ est continue sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Exercice 36. (Examen 2008)
Soient $E = \mathcal{C}([0, 1])$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$, à valeurs réelles, et l'application de E dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$f \in E \longmapsto ||f|| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \ .$$

1 Démontrer (convenablement) que $|| \cdot ||$ est une norme sur E.

On munit E de cette norme.
Soit ϕ l'application de E dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$f \in E \longmapsto \phi(f) = f(0) \ .$$

2 Démontrer que ϕ est une forme linéaire continue sur l'espace normé E.

3 Démontrer que Ker $\phi = \{\mathrm{f} \in \mathrm{E} \ ; \ \phi(\mathrm{f}) = 0\}$ est un sous-espace fermé de E.

3 - 2 Autres exercices

Exercice 37. Soient Φ une application continue de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, et u une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $y \mapsto \Phi(x, y, u(y))$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 38. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On considère $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par : $h(x, y) = f(x) + g(y)$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
1 Montrer que si f est continue en a et si g est continue en b, alors h est continue en (a, b).
2 On suppose que h est continue en (a, b). L'application f est-elle continue en a ? g est-elle continue en b ?

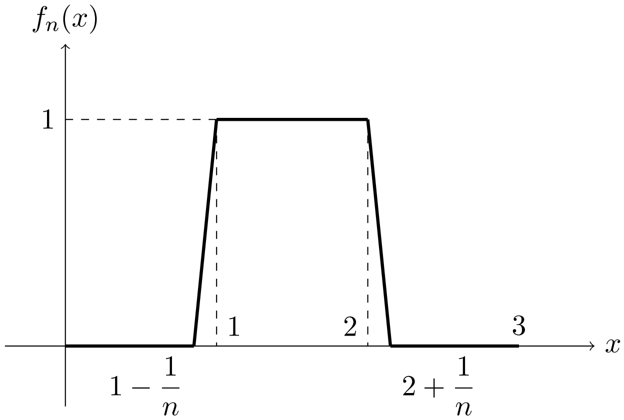
H-Prépa : exercice 24. Lire exercices 6 et 23.

4 - Suites et Séries de Fonctions

4 - 1 Suites de fonctions

Exercice 39. Soient $(f_n)_n$ une suite de fonctions croissantes convergeant simplement vers f sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction f est croissante sur I.

Exercice 40. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur $[0,3]$. On suppose que le graphe est le suivant :



Etudier la convergence de cette suite $(f_n)_n$ et la nature de la convergence.

Exercice 41. Pour tout entier non nul n on considère la fonction f_n de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n & x \in [0,n] \\ 0 & x \in]n,+\infty[\end{cases}$$

Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers une fonction f que l'on déterminera.

H-Prépa : exercice 2.

Exercice 42. Soit f_n une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \dfrac{1}{1+(x-n)^2}$.

1 Montrer que $(f_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f que l'on déterminera.

2 Déterminer $M_n = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$.

3 La suite $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

a Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.

b Que peut-on dire de la continuité de f ?

4 - 2 Séries de fonctions

Exercice 43. Soit f_n des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que $\sum f_n$ converge simplement sur l'intervalle J de $\mathbb{R}$. On pose $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$. Montrer que :

1 Si, pour tout n, les fonctions f_n sont croissantes sur J alors f est croissante sur J.
2 On suppose que J est centré en 0. Si, pour tout n, les fonctions f_n sont paires alors f est paire.
3 On suppose que $J = \mathbb{R}$. Si, pour tout n, les fonctions f_n sont périodiques de même période T, alors f est périodique de période T.

Exercice 44. **1** Chercher le domaine de définition des fonctions :

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad g : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} x(1-x)^n, \qquad h : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+x^2}}.$$

2 Etudier la convergence normale de :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} x(1-x)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+x^2}}.$$

H-Prépa : exercices 10, 11.

Exercice 45. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-e^{-x})^n}{n^2}$. Montrer que f est définie, continue et dérivable sur $[-\ln 2, +\infty[$. Déterminer sa limite en $+\infty$.

Exercice 46. Etudier D_f, continuité, limite en $+\infty$ de $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} xe^{-nx}$.

Exercice 47. **1** Etudier le domaine de définition de $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{n^2+x^2}$.
2 Montrer que f est continue sur D_f et donner ses limites aux bornes de D_f.

Exercice 48. Etude de la fonction : $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sinh^2(nx)}$, c'est-à-dire domaine de définition, sens de variation, continuité, limite aux bornes de son domaine de définition.

Exercice 49. Etude de ζ (fonction de Riemann) : $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$

1 Etudier le domaine de définition, la continuité, la limite en $+\infty$.
2 Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et calculer ses dérivées successives.
3 Etude en 1^+. Montrer que : $\zeta(x) \sim_{1^+} \frac{1}{x-1}$

H-Prépa : exercices 5, 12.

5 - Séries Entières

5 - 1 Rayon de convergence

Exercice 50. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$.

1 Montrer que la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ converge pour tout x.

2 Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n^2 x^n$.

3 Déterminer le rayon de convergence de $\sum b_n x^n$ avec, pour tout p, $b_{2p+1} = 0$ et $b_{2p} = a_p$.

Exercice 51. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum \frac{z^n}{n^{10}+n+1}, \qquad \sum \frac{z^n}{4^n+1}, \qquad \sum \left(\sqrt[3]{n^3+n+2} - \sqrt{n^2+1}\right) z^n,$$

$$\sum \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-\sqrt[3]{n}} z^n, \qquad \sum \frac{a^n}{1+b^n} z^n \ a \in \mathbb{R}^{+*},\ b \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad \sum \sin(\sqrt{n}) z^n$$

$$\sum (\ln n)^n z^n, \qquad \sum q^{n^2} z^n,\ |q| < 1, \qquad \sum \frac{z^n}{n 2^n}, \qquad \sum \frac{z^n}{n^n}.$$

Exercice 52. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum \frac{2^n}{3^n+n} z^{4n}, \qquad \sum \frac{1}{n^2+1} z^{2n}, \qquad \sum \frac{1}{2^n} z^{2^n}, \qquad \sum a^n z^{2n+1},\ ,a \in \mathbb{C}^*,$$

$$\sum \frac{2^{n-1} z^{2n-1}}{(4n-3)^2}, \qquad \sum \frac{z^{3n}}{8^n(n+1)}, \qquad \sum a_n z^n\ ,a_{2n} = 1,\ a_{2n+1} = \frac{1}{n}.$$

5 - 2 Fonction somme

Exercice 53. Déterminer le rayon de convergence et calculer à l'intérieur du disque ouvert de convergence :

$$\sum_0^{+\infty} n x^n, \qquad \sum_0^{+\infty} n^2 x^n, \qquad \cdots, \qquad \sum_1^{+\infty} (-1)^n n^2 x^{2n-1}, \qquad \sum_1^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}, \qquad \sum_0^{+\infty} \frac{n^2-n+4}{n+1} x^n$$

$$\sum_0^{+\infty} \frac{x^n}{n!(n+2)}, \qquad \sum_0^{+\infty} \frac{(-x)^n}{(2n+1)(2n+3)}, \qquad \sum_0^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sum_0^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$$

Exercice 54. Déterminer le rayon de convergence et la somme à l'intérieur du disque ouvert de convergence des séries de terme général :

$$(a+2n+3n^2)\frac{x^n}{n!}, \qquad \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) x^n, \qquad \left(1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) x^n$$

Exercice 55. Soient a un réel > 0 et $(a_n)_n$ la suite réelle définie par :

$$a_n = \begin{cases} a^{2p} & \text{si } n = 3p, \quad p \in \mathbb{N} \\ -a^{2p+2} & \text{si } n = 3p+1, \quad p \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } n = 3p+2, \quad p \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ et calculer sa somme à l'intérieur du disque ouvert de convergence.

H-Prépa : Exercices 2, 6, 4.

Exercice 56. Montrer que : $\ln 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ et $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

5 - 3 Développement en série entière

Exercice 57. Calculer le DSE (au voisinage de 0) des fonctions suivantes. Preciser l' intervalle ouvert sur lequel le résultat est obtenu.

$$\frac{1}{(x-x_0)^4}, \qquad \frac{-3}{x^2+7x+10}, \qquad \sin 3x \ + \ x\cos 3x, \qquad \cos(x+a), \qquad \sinh x,$$

$$e^{2-x^2}, \qquad \sqrt[3]{8-x^3}, \qquad \ln(2+x), \qquad \ln(x^2+3x+2), \qquad \frac{1}{4-x^4}$$

Exercice 58. Calculer le DSE (au voisinage de 0) des fonctions suivantes. Preciser l' intervalle ouvert sur lequel le résultat est obtenu.

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt, \qquad \frac{x^2}{(x-1)(2-x)^2}, \qquad \frac{x}{9+x^2}, \qquad \ln(x+\sqrt{1+x^2}), \quad \arcsin x, \qquad \frac{e^{-x}}{1-x}$$

H-Prépa : Exercices 8.

Exercice 59. Déterminer une équation différentielle vérifiée par $f:\ x \mapsto \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. En déduire le DSE de f et l'intervalle de convergence.

Exercice 60. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \frac{n!}{1.3.\cdots(2n+1)}$. On considère la SE $\sum_{n\geq 0} a_n x^{2n+1}$, et on note R son rayon, S sa somme.

1 Déterminer R.

2 Montrer que S est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, et en déduire une expression simple de S.

3 Etudier S au bord de l'intervalle de convergence.

5 - 4 Applications

Exercice 61. Montrer que l'application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$ si $x \neq 0$ et par $\frac{1}{2}$ si $x = 0$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

H-Prépa : Lire application 5.

Exercice 62. En utilisant des SE, résoudre l'équation différentielle :

$$y'(x) - 3y(x) \ = \ 0, y(0) = 1$$

H-Prépa : Exercice 15.

Exercice 63. **1** Montrer qu'il existe une solution unique f, DSE sous la forme $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$, de l'équation différentielle (E) :

$$2xy'' + y' - y \ = \ 0$$

Déterminer le rayon de convergence de cette série et calculer sa somme à l'aide de fonctions usuelles.
2 En déduire l'ensemble des solutions de E sur $\mathbb{R}^*$. On pourra effectuer le changement de fonction $y = zf(x)$. Quelles sont les solutions continues sur $\mathbb{R}$? de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 64. Soit (s_n) la suite définie par $s_0 = s_1 = 1$, et $s_n = s_{n-1} + s_{n-2}$ pour $n \geq 2$.
1 Montrer que $s_n \ \leq \ 2^n$. Montrer que le rayon de convergence R de $\sum s_n x^n$ est strictement positif.
2 Calculer $\sum_{0}^{+\infty} s_n x^n$ pour $|x| \ < \ R$.
3 Calculer R et s_n pour tout n.

5 - 5 Autres exercices

Exercice 65. Résoudre l'équation $\sum_{n=0}^{+\infty} (3n+1)^2 x^n \ = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 66. On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} \ = \ u_{n+1} + \dfrac{2}{n+2} u_n$. On note R le rayon de la SE $\sum_{n \geq 0} u_n x^n$, et S sa somme.
1 Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq u_n \leq n^2$. En déduire R.
2 Former une équation différentielle linéaire du premier ordre satisfaite par S, et en déduire l'expression de S à l'aide de fonctions usuelles.
3 En déduire u_n.

H-Prépa : Exercices 14, 18.

6 - Intégrales convergentes et fonctions intégrables

Exercice 67. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0,1]$? sur $[1,+\infty[$?

Exercice 68. Soit α un réel. Etudier l'intégrabilité de $\dfrac{1}{(x-3)^\alpha}$ sur $]3,+\infty[$.

Exercice 69. $\dfrac{1}{\ln x}$ est intégrable sur $]1,2]$? sur $[2,+\infty[$?

Exercice 70. **1** Montrer que la fonction f définie par $f(u)=ue^{-u}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et calculer

$$\int_0^{+\infty} f(u)\,du$$

2 Montrer que la fonction g définie par $g(u)=\cos\left(\dfrac{1}{u}\right)$ est intégrable sur $]0,\dfrac{\pi}{2}[$.

Exercice 71. Etudier l'intégrabilité de :

1 $x\mapsto \dfrac{x-\sin x}{x^2}$ sur $]0,2\pi]$.

2 $x\mapsto |x|(\sin x)e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

3 $x\mapsto \cos^2\dfrac{1}{t}$ sur $]0,2\pi]$.

4 $x\mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 72. Etudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}\,dt,\quad \int_1^{+\infty}\frac{1}{t}(e^{\frac{1}{t}}-1)\,dt,\quad \int_1^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{t+1}-\sqrt[3]{t}}{\sqrt{t}}\,dt,\quad \int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}\,dt$$

Exercice 73. Etudier l'intégrabilité sur I des fonctions suivantes :

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{t}(t+1)},\ I=]0,+\infty[;\qquad g(t)=\frac{1}{t^a|\ln t|^b},\ I=[2,+\infty[,\ ]0,\frac{1}{2}],\ [\frac{1}{2},2],\ ]0,+\infty[$$

$$f(t)=\frac{\sin 5t-\sin 3t}{t^{\frac{5}{3}}},\ I=]0,+\infty[;\qquad g(t)=\frac{\sin\frac{1}{t^2}}{\ln(1+\sqrt{t})},\ I=]0,+\infty[;\qquad h(t)=\sin(\ln t),\ I=]0,1]$$

Exercice 74. On note

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,dx,\quad J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)\,dx,\quad K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin 2x)\,dx$$

1 Démontrer que les intégrales I,J,K sont absolument convergentes.

2 Démontrer que $I+J=K-\dfrac{\pi\ln 2}{2}$.

3 Démontrer que $J=K=I$. En déduire la valeur de I.

Exercice 75. Existence et calcul de :

$$\int_0^{+\infty}\frac{1+t^2}{1+t^4}\,dt\qquad \int_0^{+\infty}x^ne^{-ax}\,dx\ (a>0)$$

Exercice 76. **1** Démontrer que $f(t) = \dfrac{\ln t}{t^2+1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, et que

$$\int_1^{+\infty} f(t)\, dt = -\int_0^1 f(t)\, dt$$

2 En déduire : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+a^2}\, dt = \frac{\pi}{2a} \ln a$, pour $a > 0$.

7 - Annales

Examen 2004

Exercice 1. Etudier la convergence des séries :

1 $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^4\, e^{-n^{\frac{1}{2}}}$, **2** $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \ln\left(\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n-1}}\right)$.

Exercice 2. $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note E l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$. Pour tout $x=(x_1,\cdots,x_n)$ de E on considère les réels $N_2(x)$ et $N_\infty(x)$ définis par :

$N_2(x) = \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right]^{\frac{1}{2}}$, $N_\infty(x) = \displaystyle\max_{1\leq k\leq n} |x_k|$.

1 Montrer que les applications N_2 et N_∞ ainsi définies sont des normes sur E.

2 Quelle est la définition de deux normes équivalentes ?

3 N_2 et N_∞ sont-elles équivalentes ? (vous justifierez votre réponse).

Exercice 3. **1** Montrer que l' application f, définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x,y,z) = \left(\frac{x^2+2y}{1+x^2+y^2}, e^{xz}, z-y-x\right)$$

est continue sur $\mathbb{R}^3$.

2 Montrer que l' application g, définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$g(x,t) = \frac{t^5 e^t}{1+2x^4+t^4}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1-nx & si \quad 0\leq x\leq \dfrac{1}{n} \\ 0 & si \quad \dfrac{1}{n}\leq x\leq 1 \end{cases}$$

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme sur $[0,1]$ de la suite de fonctions $(f_n)_n$.

Exercice 5. **1** Calculer le DSE (au voisinage de 0) de la fonction arctan. Preciser l'intervalle ouvert de convergence de la série obtenue.
2 Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 6. On considère l'équation différentielle E suivante :

$$(1-x^2)y''(x) - 6xy'(x) - 4y(x) = 0$$

1 Montrer qu'il existe une solution f, développable en série entière au voisinage de $x = 0$, de (E). Preciser un intervalle ouvert sur lequel f est solution de (E).
2 Ecrire f à l'aide de fonctions usuelles.

Examen 2005

Exercice 1. *(3 points)*
Déterminer la nature (convergence ou divergence) des séries suivantes :

1 $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{3^n + n^3}$, **2** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n\alpha)}{n^2}$, $(\alpha \in \mathbb{R})$, **3** $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \right)$.

Exercice 2. *(1,5 point)*
Montrer que l' application f, définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x,y,t) = \left(\frac{x^2 + 2y}{1 + x^2 + y^2}, e^{xt} \right)$$

est continue sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3. *(1,5 point)*
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par :

$$f_n(x) \; = \; \begin{cases} 1 - nx & si \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ 0 & si \quad \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme sur $[0,1]$ de la suite de fonctions $(f_n)_n$.

Exercice 4. *(8 points)*
On considère l'équation différentielle E suivante :

$$(1 - x^2)y''(x) - 6xy'(x) - 4y(x) \; = \; 0$$

On veut déterminer les solutions y_1 de E développables en série entière sur un intervalle ouvert I inclus dans $]-1,1[$.
On note $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ une telle solution.

1 Déterminer la relation de récurrence vérifiée par c_n.
En déduire l'expression de c_{2p} en fonction de c_0, et de c_{2p+1} en fonction de c_1.

2 Quels sont les rayons de convergence de $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} c_{2p} x^{2p}$ et de $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} c_{2p+1} x^{2p+1}$?
En déduire l'expression de y_1. Préciser I.

3 Ecrire $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} c_{2p} x^{2p}$ et $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} c_{2p+1} x^{2p+1}$ à l'aide de fonctions usuelles.
En déduire une écriture de y_1 à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 5. *(6 points)*

1 Calculer le DSE (au voisinage de 0) de la fonction arctan. Préciser l'intervalle ouvert de convergence de la série entière obtenue.

2 Déterminer le domaine de définition de cette série de fonctions.

3 Donner une expression plus simple de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+1}}$.

4 Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

Examen 2006

Exercice 1. *(6 points)*
On considère une suite bornée $(a_n)_{n\geq 1}$ de nombres complexes.
1 Démontrer la convergence de la série de terme général $\dfrac{a_n}{n(n+1)}$
2 Démontrer la relation suivante, où les entiers p et q vérifient $0 < p < q$:

$$\sum_{n=p}^{q} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q+1}$$

En déduire la somme de la série de terme général $\dfrac{1}{n(n+1)}$ où n décrit $\mathbb{N}^*$.
3 Dans cette question on pose $a_n = x^n$ pour $n \geq 1$.
a Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de terme général $\dfrac{x^n}{n(n+1)}$
b Sur un intervalle ouvert à préciser, exprimer la somme de cette série à l'aide de fonctions usuelles.
c Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$

Exercice 2. *(4 points)*
Déterminer la nature (convergence ou divergence) des séries suivantes :
1 $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{5^n + n^5}$, **2** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{2^{n^2}}$, **3** $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 3. *(5 points)* Etude d'une série dont le terme général est le reste d'une série convergente.
Soit n_0 un entier naturel fixé. Soit $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} a_n$ une série convergente. On définit pour n entier naturel supérieur ou égal à n_0, r_n son reste de rang n : $r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.
1 On pose pour $n \geq 0$, $a_n = \dfrac{1}{2^n}$.
Calculer r_n puis montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} r_n$ converge et calculer sa somme.
2 On pose pour $n \geq 1$, $a_n = \dfrac{1}{n^2}$.
a Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a :

$$\frac{1}{n+1} \leq r_n \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

b Donner alors un équivalent de (r_n) lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
Que peut-on en conclure sur la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} r_n$?

Exercice 4. *(2 points)*

1 Montrer que l' application f, définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x,y,t) = \left(1 + x^2 + y^2, e^{xt}\right)$$

est continue sur $\mathbb{R}^3$.

2 On considère une matrice A_θ définie par :

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quelle est la limite, quand θ tend vers $\dfrac{\pi}{3}$, de la fonction $f : \quad \theta \to A_\theta$?

Exercice 5. *(3 points)*

1 Développer en série entière sur un intervalle à préciser : $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

2 Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{2^n}$. On précisera pour quelles valeurs de θ ce calcul est valide.

Examen 2007

Exercice 1.
Déterminer, quand cela est possible, la nature (convergence ou divergence) des séries de terme général u_n vérifiant :

1 $\dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}}} - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, **2** $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$,

3 $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, **4** $\dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}}} - \dfrac{(-1)^n}{n} + o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{4}{3}}}\right)$.

Exercice 2.
Montrer que l' application f, définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \cos(xy)\right)$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3.
Développer en série entière sur un voisinage de 0 à préciser les fonctions suivantes :

1 $x \mapsto \dfrac{1}{(x-2)(x+1)}$, **2** $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \sin(t^2)\, dt$.

Exercice 4. Etude de la fonction : $f:\ x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sinh(nx)}$.

Pour $n > 0$ on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{\sinh(nx)}$.

1 Déterminer le domaine de définition de f.

2 Etudier la parité de f.

3 Etudier le mode de convergence de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $]0,+\infty[$.

4 Montrer que f est continue sur $]0,+\infty[$.

5 Etudier la limite de f en $+\infty$.

6 Déterminer la limite de f en 0^+.

7 Faire le tableau de variation de f.

Exercice 5.
1 Rayon de convergence et somme de la série entière : $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(n^3+1)x^n$

2 Calculer $A = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n}$.
Indication : on pourra introduire une série entière dont on calculera la somme.

Exercice 6. Hors barème.

1 Soient $x \in]-1,1[$ et $n \in \mathbb{N}$. Soient f_n les fonctions de la variable réelle t définies sur $[0,1]$ par :

$$f_n(t) = \frac{(tx)^n}{\sqrt{1+t^2}}$$

.

Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ est définie sur $[0,1]$ et converge normalement sur cet intervalle.

2 Notons $a_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\, dt$.

A l'aide d'un encadrement de a_n déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.

3 Montrer que :

$$\forall x \in]-R,R[\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1+t^2}}\, dt \right) x^n \;=\; \int_0^1 \frac{1}{(1-tx)\sqrt{1+t^2}}\, dt$$

UNIVERSITÉ BORDEAUX 1 Sciences Technologies **DISVE** Pôle Licence	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2009/20010** **SESSION 1 D'AUTOMNE** **PARCOURS :** **CODE UE : CPI 317** **Epreuve : Analyse** **Date : 7 Janvier 2010** **Heure : 14h** **Durée : 3h** Documents : Non autorisés. Epreuve de : **Mme Ag. Bachelot**	Département Licence

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Le barème est indicatif.

Exercice 1. *5 points*

1 Montrer que la fonction $f : (x, y, z) \mapsto (x^2 + yx, e^z)$ est continue sur $\mathbb{R}^3$.

2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient B et C deux éléments de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

a Montrer que l'application g définie sur $\mathcal{M}_{n\times n}$ par : $g(M) = BMC$ est continue sur $\mathcal{M}_{n\times n}$.

Dans la suite de l'exercice on considère $n = 3$.

b Soit k un entier non nul. Soit M_k la matrice de $\mathcal{M}_{3\times 3}$ définie par :

$$M_k = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^k & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2k} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que la suite $(M_k)_k$ converge. Déterminer sa limite.

c Montrer que la suite $(BM_kC)_k$ converge. Déterminer sa limite.

Exercice 2. Cet exercice n'est que pour les Concours Chimie. *5 points*

1 Soit α un réel. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si, et seulement si , $\alpha < 1$. Dans ce cas calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$.

2 Montrer que la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Calculer $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} f(x)\, dx$. (On pourra faire un changement de variable.)

3 Montrer que la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

UNIVERSITÉ BORDEAUX 1 Sciences Technologies **DISVE** Pôle Licence	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2009/20010** **SESSION 2 DE PRINTEMPS** **PARCOURS :** **CODE UE : CPI317** **Date : 6 mars 2010** **Heure : 8h30** **Durée : 3h** **Epreuve : Analyse** Documents : Non autorisés Epreuve de : **Mme Ag. Bachelot**	Département DL Licence

Exercice 1. On considère les séries suivantes de terme général noté u_n. Dire, en le justifiant, si elles sont convergentes, divergentes ou si on ne peut pas déterminer leur nature.

1 $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ **2** $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$

3 $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\dfrac{1}{n}\right)$ **4** $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Exercice 2.
On considère l'équation différentielle E suivante :

$$(1-x^2)y''(x) - 6xy'(x) - 4y(x) \ = \ 0$$

On veut déterminer les solutions y_1 de E développables en série entière sur un intervalle ouvert I inclus dans $]-1,1[$.

On note $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ une telle solution.

1 Déterminer la relation de récurrence vérifiée par c_n.
En déduire l'expression de c_{2p} en fonction de c_0, et de c_{2p+1} en fonction de c_1.

2 Quels sont les rayons de convergence de $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} c_{2p}x^{2p}$ et de $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} c_{2p+1}x^{2p+1}$?
En déduire l'expression de y_1. Préciser I.

3 Ecrire $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} c_{2p}x^{2p}$ et $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} c_{2p+1}x^{2p+1}$ à l'aide de fonctions usuelles.
En déduire une écriture de y_1 à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 3.
1 Calculer le DSE (au voisinage de 0) de la fonction $\ln(1+x)$. Préciser l'intervalle ouvert de convergence de la série entière obtenue.
2 Déterminer le domaine de définition de cette série de fonctions.

3 Donner une expression plus simple de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n2^n}$.

4 **(Pas pour les concours chimie)** Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$.

Exercice 4. **(Pour les concours chimie)**
Déterminer si l'intégrale suivante est convergente :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

Si oui la calculer.

Exercice 5. D'après Concours Deug 2007 Partie I

1 Premiers résultats :

a Déterminer le rayon de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n} x^n$.

b Montrer que la suite de terme général $\dfrac{\ln n}{n}$ est monotone à partir d'un certain rang que l'on précisera. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$.

c Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n}$. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$ est-elle absolument convergente ?

d Calculer $\displaystyle\int_a^b \frac{\ln t}{t}\, dt$ où a et b sont des réels strictement positifs.

2 Soient n_0 un entier et f une fonction continue et décroissante sur $[n_0, +\infty[$.

a Montrer que pour tout entier $k \in [n_0, +\infty[$, on a $f(k+1) \leq \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\, dt \leq f(k)$.

b En déduire un encadrement de $\displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{n} f(k)$.

3 Détermination d'un équivalent de la somme partielle :

a Expliciter cet encadrement dans le cas où f est la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ (on calculera les intégrales et on précisera n_0).

b Déterminer, en justifiant, un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$ (on l'exprimera à l'aide de $\ln n$).

BORDEAUX 1 Sciences Technologies **DISVE** Pôle Scolarité	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2010/2011** **SESSION 1 D'AUTOMNE** **PARCOURS :** **CODE UE : CPI 317** **Epreuve : Analyse** **Date : 12 Janvier 2011** **Heure : 14h** **Durée : 3h** Documents : Non autorisés. Epreuve de : **Mme Ag. Bachelot**	Département Licence

Le barème est indicatif. Pour tous les étudiants le sujet comporte 7 exercices indépendants.

Exercice 1. (*2 points*) Les assertions suivantes, dans lesquelles $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ désignent deux séries numériques réelles, sont-elles vraies ou fausses ? En cas de réponse affirmative, vous démontrerez le résultat, et en cas de réponse négative, vous donnerez un contre-exemple.

1 $(u_n)_n$ converge vers 0 $\implies$ $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

2 $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge $\implies$ $(u_n)_n$ converge vers 0.

3 $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ $\implies$ $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.

4 (Dans cette question $\forall n,\ a_n > 0$.) $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge $\implies$ $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_n$ converge vers un réel $l < 1$.

Exercice 2. (*4 points*)

1 Montrer que la fonction $f : (x, y, z) \mapsto (sin(x^2 + yx), z^3)$ est continue sur $\mathbb{R}^3$.

2 Montrer que la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, et par $f(0, 0) = 0$ est continue en $(0, 0)$.

3 Montrer que la fonction f de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{3x^2 + xy}{x^2 + y^2}$, n'est pas prolongeable par continuité en $(0, 0)$.

Exercice 3. (*3,5 points*)

f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{-t^2}$. On pose $I = \int_0^1 f(t)dt$.

1 Démontrer que la fonction f est développable en série entière (on déterminera la série entière et on précisera son rayon de convergence).

2 En déduire avec soin que $I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2n+1}$.

3 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{2k+1}$.

Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|s_n - I| \leq \frac{1}{(n+1)!(2n+3)}$.

4 En déduire un entier N_1 tel que pour $n \geq N_1$, on a $|s_n - I| \leq 10^{-6}$.

Exercice 4. (*3 points*) Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes et calculer leur somme sur un intervalle à préciser.

1 $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^2 x^{2n}$ **2** $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!(n+2)}$

Exercice 5. (*3,5 points*) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k}$, où $\displaystyle C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

1 Calculer $2(n+1)u_{n+1} - 2(n+1)$. En utilisant le changement d'indice défini par $j = n - k$ démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \frac{n+2}{2(n+1)} u_n$$

2 Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n x^n$, où la variable x est réelle.

3 Notons S la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n x^n$. C'est-à-dire, $\forall x \in]-R, R[,\ \displaystyle S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

- **a** Que pouvez-vous dire sur la régularité de S ?
- **b** Donner en fonction de u_n l'expression de la dérivée de S sur un intervalle à préciser.
- **c** Montrer que S satisfait sur $]-1, 1[$ l'équation différentielle : $\displaystyle (2-x)S'(x) - 2S(x) = \frac{2}{(1-x)^2}$.

Exercice 6. (*3 points*) On considère la fonction $\displaystyle \zeta :\ x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

1 Etudier le domaine de définition de ζ.
2 Montrer que ζ est continue sur son domaine de définition.
3 Calculer la limite en $+\infty$ de ζ.

Exercice 7. Pour les Concours Chimie. (*4 points*)

1 Déterminer si l'intégrale suivante est convergente, et, si oui, la calculer :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

2 Montrer que la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $\displaystyle g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}(t+1)}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Exercice 8. Pas pour les Concours Chimie. (*4 points*)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies pour $a > 0$ par :

$$f_n(x) = \frac{n}{1 + n(a + x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1 Montrer que pour $a > 0$, cette suite converge simplement et uniformément sur $\mathbb{R}$.
2 Pour $a = 0$, étudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

UNIVERSITÉ BORDEAUX 1 Sciences Technologies **DISVE** Pôle Scolarité	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2010/2011** **SESSION 2 DE PRINTEMPS** **PARCOURS :** **CODE UE : CPI 317** **Epreuve : Analyse** **Date : 5 mars 2011** **Heure : 8h30** **Durée : 3h** Documents : Non autorisés. Epreuve de : **Mme Ag. Bachelot**	Département Licence

Exercice 1. On considère les séries suivantes de terme général noté u_n. Dire, en le justifiant, si elles sont convergentes, divergentes ou si on ne peut pas déterminer leur nature.

1 $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ **2** $u_n = \dfrac{-1}{\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$

3 $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ **4** $u_n = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

Exercice 2.

1 Montrer que la fonction $f : (x, y, z) \mapsto (e^{yx}, z^3)$ est continue sur $\mathbb{R}^3$.

2 Montrer que la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \dfrac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, et par $f(0, 0) = 0$ est continue en $(0, 0)$.

3 Montrer que la fonction f de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \dfrac{3x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, n'est pas prolongeable par continuité en $(0, 0)$.

Exercice 3. On considère la série numérique de terme général $u_n = \dfrac{2}{3^n + n^3}$.

1 Démontrer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente.

On note S la somme de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$, et R_n son reste d'ordre n.

2 En majorant u_n par le terme général d'une série géométrique, trouver un entier naturel N tel que $|R_N| \leq 10^{-2}$.

3 En déduire l'expression d'une valeur approchée à 10^{-2} près de S.

Exercice 4. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes et calculer leur somme sur un intervalle à préciser.

1 $\sum_{n \geq 0} n^3 x^n$ **2** $\sum_{n \geq 0} \dfrac{x^n}{n + 2}$

Exercice 5.
On considère l'équation différentielle E suivante :

$$(1-x^2)y''(x) - 6xy'(x) - 4y(x) \;=\; 0$$

On veut déterminer les solutions y_1 de E développables en série entière sur un intervalle ouvert I inclus dans $]-1,1[$.
On note $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ une telle solution.

1 Déterminer la relation de récurrence vérifiée par c_n.
En déduire l'expression de c_{2p} en fonction de c_0, et de c_{2p+1} en fonction de c_1.

2 Quels sont les rayons de convergence de $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} c_{2p}x^{2p}$ et de $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} c_{2p+1}x^{2p+1}$?
En déduire l'expression de y_1. Préciser I.

3 Ecrire $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} c_{2p}x^{2p}$ et $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} c_{2p+1}x^{2p+1}$ à l'aide de fonctions usuelles.
En déduire une écriture de y_1 à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 6.
1 Montrer que la fonction arctan est développable en série entière au voisinage de 0. On note $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ la série entière obtenue.

2 Déterminer le domaine de définition de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$, où $f_n : x \mapsto a_n x^n$.

3 Donner, en le justifiant, une expression plus simple de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+1}}$.

4 **Pas pour les Concours Chimie.** Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \;=\; \frac{\pi}{4}$.

Exercice 7. Pour les Concours Chimie.
1 Déterminer si l'intégrale suivante est convergente, et, si oui, la calculer :

$$\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt$$

2 La fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(t) = \dfrac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

8 - Liens

http://www.uel.education.fr/consultation/reference/

http://wims.unice.fr/disciplines.html

D'autres exercices interactifs de mathématiques :

Pour les séries entières :
http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi?session=K5E277C29F.3&+lang=fr&+module=U2%2Fanalysis%2Foefseries.fr

Pour les séries de Fourier du semestre suivant :
http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi?session=K5E277C29F.3&+lang=fr&+module=U2%2Fanalysis%2Foeffourier.fr
et :
http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi?session=K5E277C29F.3&+lang=fr&+module=U2%2Fanalysis%2Fdevfo
fr

Pour les DL :
http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi?session=K5E277C29F.4&+lang=fr&+module=U1%2Fanalysis%2Foeftaylor.fr
et :
http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi?session=K5E277C29F.4&+lang=fr&+module=U1%2Fanalysis%2Ftaylo
fr

9 - Rappels : Développements limités

Développements limités de quelques fonctions usuelles en 0 :

$$
\begin{aligned}
&e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)\\
&\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})\\
&\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{(2n+1)})\\
&\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})\\
&\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{(2n+1)})\\
&(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)\\
&\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)\\
&\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)\\
&\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)\\
&\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)
\end{aligned}
$$

Opérations sur les développements limités
Soient f, g deux fonctions qui admettent en 0 les développements limités à l'ordre n suivants

$$
\begin{cases}
f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n)\\
g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + o(x^n)
\end{cases}
$$

On note $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ et $Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n$

• $f + g$ admet en 0 un développement limité à l'ordre n donné par :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = P(x) + Q(x) + o(x^n)$$

• fg admet en 0 un développement limité à l'ordre n donné par :

$$(f.g)(x) = f(x).g(x) = R(x) + o(x^n)$$

où $R(x)$ s'obtient en développant le produit des polynômes $P(x).Q(x)$ et en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égaux à n.

• Si $b_0 \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ admet en 0 un développement limité à l'ordre n que l'on obtient en effectuant la division suivant les puissances croissantes de x jusqu'à l'ordre n de $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ par $b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n$.

• Si $b_0 = 0$ alors $f \circ g$ admet en 0 un développement limité à l'ordre n. On a :

$$(f \circ g)(x) = a_0 + a_1[Q(x)] + a_2[Q^2(x)] + \cdots + a_n[Q^n(x)] + o(x^n)$$

où $[Q^k(x)]$ désigne le polynôme obtenu en développant le produit $Q^k(x)$ et en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égaux à n.
Exemple : Développements limités en 0 à l'ordre 5 :

$$\begin{cases} f(x) = e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^5}{5!} + o(x^5) \\ g(x) = \sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + o(x^5) \end{cases}$$

On note $P(x) = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^5}{5!}$ et $Q(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$

• $e^x + \sin x = 1 + 2x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + 2\dfrac{x^5}{5!} + o(x^5)$

$$\begin{aligned} \bullet e^x \sin x &= \left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\right]\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right] + o(x^5) \\ &= \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right] + x\left[x - \frac{x^3}{3!}\right] + \frac{x^2}{2!}\left[x - \frac{x^3}{3!}\right] + \frac{x^3}{3!}[x] + \frac{x^4}{4!}[x] + o(x^5) \\ &= x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet(\exp\circ\sin)x &= e^{\sin x} \\ &= e^{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)} \\ &= 1 + \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right] + \frac{1}{2}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right]^2 + \frac{1}{3!}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right]^3 \\ &\quad + \frac{1}{4!}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right]^4 + \frac{1}{5!}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right]^5 + o(x^5) \\ &= 1 + \left[x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{x^5}{5!}\right] + \frac{1}{2}\left[x^2 - \frac{1}{3}x^4\right] + \frac{1}{6}\left[x^3 - \frac{1}{2}x^5\right] + \frac{1}{24}\left[x^4\right] + \frac{1}{120}\left[x^5\right] + o(x^5) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

Exemple : Obtention du développement limité à l'ordre 5 de $\tan x$ par division suivant les puissances croissantes de x jusqu'à l'ordre 5 de $x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$ par $1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + 0$.

$$\begin{array}{lr|l} & x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \\ \hline - & \left[x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24}\right] & x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} \\ \cline{1-2} = & \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} & \\ - & \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6}\right] & \\ \cline{1-2} = & \frac{2x^5}{15} & \end{array}$$

D'où : $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^5)$