Université de Bordeaux 1. L3 Algèbre 4. Année 2012/2013

Feuille 1. Anneaux

EXERCICE 1.

1) Soit $A = \{a/2 \mid a \in \mathbb{Z}\}$. A est-il un sous-anneau de $\mathbb{Q}$?

2) $2\mathbb{Z} = \{2a \mid a \in \mathbb{Z}\}$ est-il un sous-anneau de $\mathbb{Z}$?

3) Soit $B := \cup_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}\mathbb{Z}$. B est-il un sous-anneau de $\mathbb{Q}$?

3) Déterminer tous les sous-anneaux de $\mathbb{Z}$.

4) Les ensembles $\mathbb{Z}[i] = \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}[i] = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ sont-ils des sous anneaux de $\mathbb{C}$. Si oui, quels sont leurs éléments inversibles?

EXERCICE 2.

Soient A et B deux anneaux commutatifs. On définit deux lois de composition sur $A \times B$ en posant

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2), \qquad (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2).$$

i) Montrer que $A \times B$ est un anneau commutatif.

ii) Est-il intègre?

iii) Déterminer le groupe des unités (ensemble des éléments inversibles) de $A \times B$.

iv) Quels sont les éléments nilpotents de $A \times B$?

EXERCICE 3.

Déterminer tous les homomorphismes d'anneaux $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

EXERCICE 4.

Soit A un anneau. On dit que $a \in A$ est nilpotent s'il existe $n \geq 1$ tel que $a^n = 0$.

1)Montrer que si a est nilpotent, l'élément $1 + a$ est inversible.

2)Montrer que si a et b commutent alors ab et $a + b$ sont nilpotents.

EXERCICE 5.

1) Trouver les éléments inversibles, les diviseurs de zéro et les éléments nilpotents des anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour $n = 18, 81, 17$.

2) Sous quelle condition sur n, l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

- est-il intègre?
- n'admet-il pas d'éléments nilpotents?
- admet-il pour diviseurs de 0 uniquement les éléments nilpotents?

3) Quel est le groupe multiplicatif de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

EXERCICE 6. Soit X un élément de l'anneau des matrices $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1) Montrer que lés énoncés suivants sont équivalents:

- X est dégénéré.
- X est non inversible (à droite et à gauche).
- X est diviseur de 0 (à droite et à gauche).

2) Que se passe-t-il pour $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$?

EXERCICE 7. Soit A un anneau fini. Montrer que si A est intègre, alors A est un corps.

EXERCICE 8. Soit A un anneau commutatif unitaire. On dit qu'un élément $e \in A$ est un idempotent si $e^2 = e$. Soit e un élément idempotent.

i) Montrer que $eA = \{ea \mid a \in A\}$ est un sous-anneau de A possédant un élément neutre.

ii) Montrer que $e' = 1 - e$ est un idempotent de A et que $ee' = 0$.

iii) Montrer que A est isomorphe à $eA \times e'A$.

iv) Montrer que réciproquement si $A = B \times C$ est la somme directe des anneaux B et C, alors il existe deux idempotents e et e' tels que $ee' = 0$, $B = eA$ et $C = e'A$.

v) Trouver les éléments idempotents de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et montrer qu'il est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

vi) Montrer que le résultat de cet exercice est faux si on ne suppose pas A commutatif (regarder par exemple dans l'anneau $M_2(\mathbb{R})$ des matrices réelles de taille 2×2).