Université de Bordeaux 1. L3 Algèbre 4. Année 2012/2013

Feuille 8. Corps. Extensions

EXERCICE 1. Soit $A = \mathbb{Q}[X]/(X^3 - X + 2)$. Montrer que A est un corps. Calculer l'inverse de $x = \bar{X} \in A$. Calculer x^4. Montrer que A est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel et donner une base. Calculer l'inverse de la classe de $X^5 + 1$.

EXERCICE 2. Quels sont les idéaux maximaux de $\mathbb{C}[X]$? de $\mathbb{R}[X]$?

EXERCICE 3. Soient $K \subset L$ deux corps. Montrer qu'un élément $\alpha \in L$ est algébrique sur K si et seulement si $K[\alpha]$ est un corps.

EXERCICE 4. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des extensions algébriques finies de $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} \oplus i\mathbb{Q},\ \ \mathbb{Q} \oplus \sqrt{5}\mathbb{Q},\ \ \mathbb{Q} \oplus \sqrt[3]{2}\mathbb{Q},\ \ \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}],\ \ \mathbb{R},\ \ \mathbb{C}.$$

EXERCICE 5.

1) Montrer que le polynôme $f(X) = X^3 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

2) Soit α une racine de $f(X)$. Montrer qu'on peut ecrire $\frac{\alpha}{\alpha^2+1}$ sous la forme $g(\alpha)$, où $g(X)$ est un polynôme de degré ≤ 2 à coéfficients dans $\mathbb{Q}$ et expliciter $g(X)$.

EXERCICE 6.

1) Montrer que le polynôme $f(X) = X^3 - 2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

1) Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ est un corps de rupture de $f(X)$. Déterminer $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}]$.

2) Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3})$ est le corps de décomposition de $f(X)$.

3) Montrer que $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 6$.

4) Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\alpha)$, où $\alpha = \sqrt[3]{2} + i\sqrt{3}$.

EXERCICE 7.

1) Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{3})/\mathbb{Q}$ sont des extensions de degré 2.

2) Montrer que $\sqrt{3}$ n'appartient pas à $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

3) Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \mathbb{Q}$.

4) Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$ est une extension de degré 4.

5) Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\alpha)$, où $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

6) Donner le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}$. Donner le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

EXERCICE 8. Soit K un corps de caractéristique $\neq 2$ et soit L/K une extension de degré 2. Montrer qu'il existe $a \in K$ tel que $L = K(\sqrt{a})$.

Montrer que le résultat est faux si K est de caractéristique 2.

EXERCICE 9. 1) Rappeler pourquoi toute extension finie est algébrique.

2) Soit $K_n = \mathbb{Q}(\sqrt[2^n]{2})$. Montrer que $K_n \subset K_{n+1}$. En déduire que $K_\infty = \cup_{n\geq 1} K_n$ est une extension algébrique infinie de $\mathbb{Q}$.

EXERCICE 10. Soit p un nombre premier et soit L/K une extension de degré p. Montrer que si M/K est une sous-extension de L/K (i.e. $K \subset M \subset L$), alors $M = K$ ou $M = L$.

EXERCICE 11. Soit $f(X) \in K[X]$ un polynôme de degré n et soit L son corps de décomposition. Montrer que $[L : K] \leq n!$.

EXERCICE 12.

1) Montrer que le polynôme $f(X) = X^3 - X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

2) Montrer que $f(X)$ possède une racine réelle et deux racines complexes.

3) Calculer le discriminant de $f(X)$ (vous pouvez utiliser la formule $d_f = -4p^3 - 27q^2$ si $f = X^3 + pX + q$).

4) Soit L le corps de décomposition de $f(X)$. Montrer que $\sqrt{-23} \in L$.

5) Montrer que $[L : \mathbb{Q}] = 6$. En déduire que $L = K(\sqrt{-23})$.

EXERCICE 13. On considère le polynôme $f(X) = X^4 - X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$. On sait qu'il est irréductible sur $\mathbb{Q}$ (voir feuille 8).

1) Soit α une racine de $f(X)$ dans $\mathbb{C}$. On pose $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Montrer que le degré de K sur $\mathbb{Q}$ est égal à 4.

2) Soit $f(X) = (X^2 + aX + b)(X^2 + a'X + b')$ une décomposition de f dans $\mathbb{C}[X]$. Montrer que $a^2 = a'^2$ et que $g(a^2) = 0$ où $g(X) = X^3 - 4X - 1$.

3) Montrer que le degré $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}]$ est égal à 3 ou 6.

4) Montrer qu'il n'existe pas d'extension de $\mathbb{Q}$ de degré 2 contenue dans K.

5) Soit L le corps de décomposition de f dans $\mathbb{C}$. Montrer que $[L : \mathbb{Q}]$ est divisible par 12.