Composition 1 : Éléments de corrigé

Exercice 1 :

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + O(u^3)$$ pour u proche de 0

donc $$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge par le critère des séries alternées.

La série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge

La série des restes converge absolument (série de Riemann avec $3/2 > 1$) donc converge.

Donc la série $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ diverge.

Exercice 2 :

$$[\log n] = k, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \quad k \leq \log n < k+1$$

$$\Leftrightarrow \quad 10^k \leq n < 10^{k+1}.$$

Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{[\log k]}}{n}$

et $p = 10^k - 1$, $q = 10^{k+1} - 1$ signe constant

on a : $$|S_q - S_p| = \left|\sum_{k=p+1}^{q} (-1)^{[\log k]} \frac{1}{k}\right| \geq (q-p) \times \frac{1}{q}$$

d'où $\left| S_{10^{k+1}-1} - S_{10^k} \right| \geq \dfrac{10^{k+1} - 10^k}{10^{k+1}} = \dfrac{10-1}{10} = \dfrac{9}{10}$

Donc $(S_n)_{n\geq 0}$ ne vérifie pas le critère de Cauchy (*)

donc $(S_n)_{n\geq 0}$ diverge, c'est-à-dire la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{\lfloor \log n \rfloor}}{n}$ diverge.

(*) $\left(\begin{array}{l} \text{~~Pour~~ } \varepsilon = \frac{9}{10}, \\ \text{pour tout } N \in \mathbb{N}, \text{ il existe } p, q \geq N, \ |S_p - S_q| \geq \frac{9}{10}. \end{array} \right)$

Exercice 3 :

1) Soit $\alpha > 1$

$$(k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha} = k^{1-\alpha} \left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{1-\alpha} - 1 \right]$$

$$= k^{1-\alpha} \left[\cancel{1} + (1-\alpha) \times \frac{1}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right) - \cancel{1} \right]$$

$$= \frac{1}{k^\alpha}(1-\alpha) + o\left(\frac{1}{k^\alpha}\right)$$

donc $\dfrac{1}{(k+1)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{k^{\alpha-1}} \underset{k\to+\infty}{\sim} -\dfrac{(\alpha-1)}{k^\alpha}$.

2) Les séries $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ et $\sum_{k\geq 1} \left(\frac{1}{\alpha-1}\right)\left(\frac{1}{k^{\alpha-1}} - \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}}\right)$

sont convergents ($\alpha > 1$), de signes constant et leurs termes généraux sont équivalents. Donc leur reste sont équivalents.

Or $\sum_{k\geq n} \left(\frac{1}{k^{(\alpha-1)}} - \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}} \right) = \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ $\left(\text{car } \frac{1}{k^{\alpha-1}} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \right)$

par série télescopique :

D'où : $\sum_{k\geq n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

Exercice 4 : $f(x) = \frac{1}{x}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$

d'où pour tout $k \geq 1$ $\quad \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \frac{1}{k}$

et en sommant de $k=1$ à n

$$\underbrace{\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}}_{\substack{\shortparallel \\ H_{n+1} - 1}} \underset{(*)}{\leq} \underbrace{\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx}_{\substack{\shortparallel \\ \ln(n+1)}} \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}_{\substack{\shortparallel \\ H_n}}$$

(~~De plus :~~ $\cancel{H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \ln(n+1) - \ln(n)}$) inutile

De plus : $H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} \geq \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{x}\,dx$

$$= \ln(n+2) - \ln(n+1)$$

d'où : $H_{n+1} - \ln(n+2) \geq H_n - \ln(n+1)$.

et $(H_n - \ln(n))_{n \geq 1}$ est croissante.

De plus par $(*)$ $\quad \underbrace{H_{n+1} - 1}_{\substack{\shortparallel \\ H_n + \frac{1}{n+1} - 1}} \leq \ln(n+1)$

donc $H_n - \ln(n+1) \leq 1 - \frac{1}{n+1} \leq 1$.

La suite $(H_n - \ln(n))_{n \geq 1}$ est croissante majorée donc converge vers une limite que l'on appelera γ (constante d'Euler).

De plus $H_1 - \ln 2 = 1 - \ln 2 > 0$ donc $\gamma > 0$.

2) On pose alors $u_n = H_n - \ln n - \gamma$.

on a : $u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1)$

$$= \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \cancel{\frac{1}{n}} + \left(-\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Les 2 séries sont convergentes et de termes à signe constant donc les restes sont équivalents i.e

$$u_n = \sum_{n \geq k} (u_k - u_{k+1}) \underset{n \to +\infty}{\sim} \sum_{k \geq n} \frac{1}{2k^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$$

d'après l'exercice 3.

d'où : $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Rq : Il est possible d'itérer cette méthode en posant $v_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n}$ pour obtenir un développement asymptotique à tout ordre de la série harmonique.