Prépa-agreg 2019-2020 Université de Bordeaux
20 septembre 2019

Composition 1: Suites et séries

durée 1h45

Exercice 1. Donner la nature de la série

$$\sum_{n\geq 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right).$$

Exercice 2. Montrer que la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{[\log n]}}{n}$$

diverge. ($[\cdot]$ désigne la partie entière et $\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$.) *Indication:* On pourra montrer que le critère de Cauchy n'est pas satsifait.

Exercice 3. (Equivalent du reste d'une série de Riemann convergente).

1) Soit $\alpha > 1$, donner un équivalent de $(k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}$ pour $k \to \infty$.

2) Déterminer un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de

$$\sum_{k\geq n} \frac{1}{k^\alpha}, \text{ pour } \alpha > 1.$$

Exercice 4.

Le but de l'exercice est d'obtenir un développement asymptotique de la série harmonique:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1) Montrer que $H_n - \ln(n)$ admet une limite $\gamma \in \mathbb{R}^+$.

Indication: On pourra utiliser une comparaison série intégrale pour montrer que pour $n \geq 1$

$$H_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq H_n,$$

et que $H_n - \ln(n+1)$ est croissant en n.

2) On pose $u_n = H_n - \ln(n) - \gamma$. Déterminer un équivalent simple de $u_n - u_{n-1}$.

3) En déduire un équivalent de u_n et que

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n}).$$

Exercice 5. Dans tout l'exercice, (a_n) est une suite décroissante de nombres positifs tendant vers 0. Le but de l'exerice est de montrer que la série $\sum_{n\geq 1} a_n \sin(nt)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a_n = o(\frac{1}{n})$.

1) Soit $t \in]0;\pi]$, montrer que, pour $n \geq 1, p \geq 0$,

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} \sin(kt)\right| \leq \frac{1}{\sin(t/2)}.$$

2) En déduire que pour tout $t \in]0,\pi]$,

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k \sin(kt)\right| \leq \frac{a_n}{\sin(t/2)}.$$

Indication: Penser à faire une transformation d'Abel.

3) En déduire que la série $\sum a_n \sin(nt)$ converge uniformément sur l'intervalle $[\alpha;\pi]$ pour chaque $0 < \alpha < \pi$. En déduire également la convergence simple sur $[0,\pi]$.

4) Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $R_n(t) = \sum_{k>n} a_k \sin(kt)$. Montrer que, pour tout $t \in]0;\pi]$ et pour tout n, on a

$$|R_n(t)| \leq \frac{2\pi a_{n+1}}{t}.$$

En écrivant: $R_n(t) = R_n(t) - R_{n+p}(t) + R_{n+p}(t)$, en déduire que si $t \in]0;\pi]$ et $n, p \in \mathbb{N}$, alors

$$|R_n(t)| \leq tp \sup_{k\geq n}\{ka_k\} + \frac{2\pi(n+p)a_{n+p}}{tp}.$$

Indication: on pourra utiliser que:

$$\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x \text{ pour } x \in [0,\pi]$$

et que

$$|\sin(x)| \leq |x| \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

5) On suppose maintenant que $a_n = o(\frac{1}{n})$. Montrer que la série $\sum a_n \sin(nt)$ converge uniformément sur $[0,\pi]$ puis sur $\mathbb{R}$. La fonction obtenue est-elle continue?

6) **Bonus**: Montrer la réciproque.