Exercice 5 : Gourdon p 268 Francinou-Gianella oraux 2

0) Soit $t \in]0,\pi]$, $n \geq 1$, $p \geq 0$.

$$\sum_{k=n}^{n+p} \sin(kt) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=n}^{n+p} e^{ikt}\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(e^{int} \frac{1-e^{i(p+1)t}}{1-e^{it}}\right)$$

donc $$\left|\sum_{k=n}^{n+p} \sin(kt)\right| \leq \frac{2}{|1-e^{it}|} = \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

car $$|1-e^{it}| = \left|e^{-\frac{it}{2}} - e^{\frac{it}{2}}\right| = \left|2i \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|$$
$$= 2\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|$$
$$= 2\sin\left(\frac{t}{2}\right).$$

1) On effectue une transformation d'Abel

on pose pour $k \geq n$, $S_k = \sum_{j=n}^{k} \sin(jt)$

et $S_{n-1} = 0$.

On a : $$\sum_{k=n}^{n+p} a_k \sin(kt) = \sum_{k=n}^{n+p} a_k (S_k - S_{k-1})$$

$$= \sum_{k=n}^{n+p} a_k S_k - \sum_{k=\cancel{n-1}}^{n+p-1} a_{k+1} S_k$$

$$= \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k (a_k - a_{k+1}) + a_{n+p} S_{n+p}$$

On $|S_k| \leq \dfrac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$

d'où : $$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k \sin(kt)\right| \leq \frac{1}{\sin(t/2)}\Bigg(\overbrace{\sum_{k=n}^{n+p-1}\underbrace{(a_k - a_{k+1})}_{\geq 0} + a_{n+p}}^{= a_n}\Bigg)$$

$$\leq \frac{a_n}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}, \quad (a_n) \searrow.$$

(2)

$$\leq \frac{a_n}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad \text{si } t \in [\alpha, \pi].$$

$(a_n) \searrow 0$ quand $n \to +\infty$. La série $\sum a_k \sin(kt)$ vérifie donc le critère de Cauchy uniforme sur $[\alpha, \pi]$. donc converge uniformément sur $[\alpha, \pi]$ pour tout $0 < \alpha < \pi$

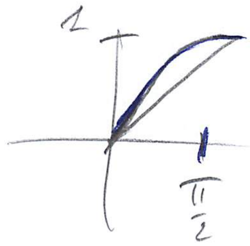
Elle converge donc simplement sur $]0, \pi]$ et en 0 (elle vaut 0) donc elle converge simplement sur $[0, \pi]$.

Rq : il suffit de l'étudier sur $[-\pi, \pi]$ par 2π périodicité et sur $[0, \pi]$ par imparité.

En faisant tendre $p \to +\infty$

on trouve : pour $t \in]0,\pi]$

$$\left| \sum_{k \geq n} a_k \sin(kt) \right| \leq \frac{a_n}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$



Or par concavité : $\sin\left(x\right) \geq \frac{1}{\frac{\pi}{2}} x$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

d'où : $$\frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \leq \frac{\pi}{2\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{\pi}{t}.$$

et $$|R_{n-1}(t)| \leq \frac{\pi a_n}{t}.$$

D'où en écrivant :

$$R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} a_k \sin(kt) + R_{n+p-1}$$

et en utilisant $\sin x \leq x$.

$$|R_n(t)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p-1} a_k\, k\, t + R_{n+p-1}$$

$$\leq p t \sup_{k \geq n} (k a_k) + \frac{\pi a_{n+p}}{t}$$

Nb de termes

$\left(\frac{n+p}{p} \geq 1.\right)$

$$\leq t p \sup_{k \geq n} (k a_k) + \frac{\pi (n+p) a_{n+p}}{p t}$$

4) On suppose $a_n = o(\frac{1}{n})$

i.e. $\sup_{k \geq n} (k a_k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

on a $|R_n(t)| \leq \left(tp + \frac{\pi}{tp}\right) \sup_{k \geq n} k a_k$.

pour $t \in]0, \pi]$ fixé, ceci est vrai pour tout entier $p \geq 1$.

On prend $p = \lfloor \frac{1}{t} \rfloor + 1$

on a alors $\left(tp + \frac{\pi}{tp}\right) \leq C$

et $|R_n(t)| \leq C \sup_{k \geq n} (k a_k)$ pour $t \in]0, \pi]$

Le résultat précédent est bien sûr valable pour $t = 0$.

La série $\sum a_k \sin(kt)$ converge donc uniformément sur $[0, \pi]$ (et donc sur $\mathbb{R}$) (vers une fonction nécessairement continue).

(5) <u>Bonus</u> : On suppose que la série converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Elle vérifie en particulier le critère de Cauchy uniforme, d'où :

$\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$.

$$\left| \sum_{k=n}^{2n} a_k \sin(kt) \right| \leq \epsilon$$

Or pour $t = \frac{\pi}{6n}$ et $n \leq k \leq 2n$

$$\frac{\pi}{6} \leq kt \leq \frac{\pi}{3} \quad \text{et} \quad \sin(kt) \geq \frac{1}{2}.$$

<u>d'où</u> : a_n étant ≥ 0, $\searrow$.

$$\frac{1}{2} n a_{2n} \leq \epsilon.$$

donc $2n a_{2n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ ~~$+\infty$~~.

a_n étant $\searrow$, on montre facilement que $n a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.