Prépa-agreg 2015-2016 Université de Bordeaux

Composition 7

19 octobre 2015

durée 1h

Exercice 1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable. Soit $a < b$. On suppose que $f'(a) < f'(b)$. Soit k un réel vérifiant $f'(a) < k < f'(b)$. On considère g la fonction: $g(x) := f(x) - kx$.

1) Montrer que g admet un minimum sur $[a, b]$ et que ce minimum n'est pas atteint ni en a ni en b.

2) En déduire que la dérivée d'une fonction réelle vérifie le théorème des valeurs intermédiaires (théorème de Darboux).

Exercice 2. On considère l'équation différentielle

$$(E) : x''(t) + q(t)x(t) = 0$$

où q est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

On rappelle que les solutions sont globales et que les zéros d'une solution non identiquement nulle sont isolés.

1) En utilisant Cauchy-Lipshitz, justifier que l'ensemble des solutions de (E) est un espace vectoriel de dimension 2.

2) Soient f et g deux solutions de (E). On considère le Wronskien: $W(t) = f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$. Montrer que W est constant.

3) On f et g sont linéairement indépendantes et que $\alpha < \beta$ sont deux zéros consécutifs de f, montrer qu'il existe $\gamma \in (\alpha, \beta)$ tel que $g(\gamma) = 0$.

Exercice 3.

On considère l'équation différentielle:

$$x'(t) = \sin(x(t)). \tag{1}$$

et on considère ϕ **la** solution maximale de (1) vérifiant $\phi(0) = x_0$ avec $x_0 \in (0, \pi)$.

1) Justifier que ϕ est bien définie et que son ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

2) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $0 < \phi(t) < \pi$.

3) Montrer que $\phi(t) \to \pi$ quand $t \to +\infty$.