Prépa agreg Bordeaux 2016/2017

Corrigé : Calcul Différentiel

Ex 1 : Hauchecorne (p 271)

1) Par composition f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

On a : $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) xy \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)$$

et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ est la quantité symétrique en x,y.

2) si $h \in \mathbb{R}$,

$$f(0,h) = 0 = f(0,0)$$

d'où $$\frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

donc la dérivée partielle par rapport à y existe en $(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

De même $f(h,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

3) Prenons $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}\, n\pi}$, $x^2+y^2 = \frac{1}{(n\pi)^2}$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = n\pi \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{2}}$$

Le premier terme de la dérivée converge vers 0. Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

4) Néanmoins, on a :

$$|f(x,y)| \leq |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

d'où $f(x,y) = f(0,0) + 0 + o(\|(x,y)\|)$

donc f est différentiable en $(0,0)$ de différentielle nulle.

Exercice 2 : (Donato p 94)

On a $$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \left(a_i - 2\langle a,x\rangle x_i\right)e^{-|x|^2}$$

soit encore pour $h \in \mathbb{R}^n$,

$$df_x(h) = \left(\langle a,h\rangle - 2\langle a,x\rangle\langle x,h\rangle\right)e^{-|x|^2}.$$

La différentielle de f est nulle en x si et seulement si $a - 2\langle a,x\rangle x = 0$

Si x est solution du système précédent, alors x est proportionnel à a, $x = \alpha a$, $\alpha \in \mathbb{R}$

d'où $a - 2\alpha\langle a,a\rangle \alpha a = 0$

soit $(1 - 2\alpha^2|a|^2)\, a = 0$.

et $\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}|a|}$.

On vérifie que $\pm\frac{1}{\sqrt{2}|a|}a$ sont bien des points critiques de f.

On a : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \left(-2\langle a,x\rangle \delta_{ij} - 2a_j x_i\right)e^{-|x|^2}$

$$-2\left(a_i x_j - 2\langle a,x\rangle x_i x_j\right)e^{-|x|^2}.$$

et $d^2f_x(\ell,h) = e^{-|x|^2}\Big(-2\langle a,x\rangle \sum_i \ell_i h_i - 2\sum_{i,j}(\ell_i x_i)(a_j h_j)$

$$-2\sum_{i,j}(a_i\ell_i)(x_j h_j) + 2\langle a,x\rangle \sum_{i,j}\ell_i x_i x_j h_j\Big)$$

$$= e^{-|x|^2}\Big(-2\langle a,x\rangle\langle \ell,h\rangle$$
$$-2\langle \ell,x\rangle\langle a,h\rangle$$
$$-2\langle a,\ell\rangle\langle x,h\rangle$$
$$+4\langle a,x\rangle\langle \ell,x\rangle\langle x,h\rangle\Big)$$

d'où en $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}|a|}a$ et $\ell = h$.

$d^2f_{x_1}(\ell,\ell)$

$$= e^{-\frac{1}{2}}\Big(-\sqrt{2}|a||\ell|^2 - \sqrt{2}|a|\langle a,\ell\rangle^2$$
$$\cancel{-\sqrt{2}|a|\langle a,\ell\rangle^2}$$
$$\cancel{+\frac{4}{2\sqrt{2}}|a|\langle a,\ell\rangle^2}\Big)$$

D'où $d^2f_{x_1}$ est une forme quadratique définie négative.

x_1 est donc un maximum local de f.

Pour $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}|a|} a$.

$d f_{x_2} = - d f_{x_1}$ est définie positive

donc x_2 est un minimum local.

On a enfin $f(x_2) < 0$ et $f(x_1) > 0$.

De plus $f(x) \xrightarrow[|x| \to +\infty]{} 0$

x_1 et x_2 sont donc des extrema globaux

Exercice 4 : (Donato p 114).

1) La permutation ϕ_σ est une application linéaire donc est différentiable

et $D\phi_\sigma = \phi_\sigma$

$$D\phi_\sigma(h_1, \dots, h_n) = (h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(n)}).$$

2) Par composition : $J_{\phi_\sigma \circ f} = \underbrace{J_{\phi_\sigma}}_{p \times p} \times J_f$

p lignes
n colonnes

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ & & \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

σ(n)

σ(1)

$$\text{et } J_{\phi_\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & - & 1 & - & 0 \\ 1 & & & & \\ \vdots & & \cdots & & \end{pmatrix}$$

p × p

$Jf(0)$ est de rang n, donc il existe n lignes (parmi les p lignes) linéairement indépendantes, que l'on peut placer aux n premières positions en multipliant à gauche par une matrice de permutation τ.

Pour $g = \Phi_\tau \circ f$

on a $$J_g = \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{}_{n\times n} \\ \boxed{} \end{pmatrix}}_{n} \updownarrow n-p$$

2) Soit $F : U \times \mathbb{R}^{p-n} \longrightarrow \mathbb{R}^p$

$(x,y) \longrightarrow g(x) + (0,y)$.

La matrice Jacobienne de F est donc :

$$\begin{pmatrix} J_g & \begin{matrix} 0 \\ \boxed{I_d} \end{matrix} \end{pmatrix}_{p\times p}$$

Elle est donc inversible et F est $\mathcal{C}^1$.

Par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert V de 0 dans $U\times\mathbb{R}^{n-p}$ et un voisinage ouvert W de 0 dans $\mathbb{R}^p$ tel que F réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V sur W. Notons F^{-1} la fonction réciproque.

3) On a $F^{-1}\circ F(x_1,\dots,x_n,0,\dots,0) = (x_1,\dots,x_n,0,\dots,0)$

pour $(x_1,\dots,x_n,0,\dots,0) \in V$

soit encore :

$$F^{-1}\left(g(x_1,\dots,x_n) + (0,0) \right) = (x_1,\dots,x_n, 0 - 0)$$

c'est-à-dire

$$F^{-1} \circ \Phi_c \circ f (x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_n, 0 - 0)$$

pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in V \cap \mathbb{R}^p$.

et par composition : $F^{-1} \circ \Phi_c$ est un difféomorphisme.