Corrigé Composition Equation Différentielle 2018/2019

Exercice 1 : 1) Posons $a = \varphi(1)$ et considérons le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x' = f(x) & (E) \\ x(1) = a. \end{cases} \qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; C^1.$$

f est C^1 donc vérifie les hypothèses de Cauchy Lipschitz.

Posons $\psi(t) = \varphi(t + (\sqrt{3} - 1))$

ψ est solution de (E)

et $\psi(1) = \varphi(\sqrt{3}) = \varphi(1) = a$.

donc φ et ψ sont solution du problème de Cauchy ci-dessus.

Par Cauchy-Lipschitz $\psi(t) = \varphi(t)$, pour tout t

c'est à dire $\varphi(t + (\sqrt{3} - 1)) = \varphi(t)$

donc φ est $\sqrt{3} - 1$ périodique.

2) Ce n'est plus vrai pour f seulement continue.

$\left\{ y' = -\sqrt{|y|} \right.$ (seau percé)

Il existe y solution avec $y(1) = y(\sqrt{3}) = 0$ mais pas périodique

Exercice 2 : Travaillons seulement pour $t \geq 0$.

x_1 et x_2 étant continues et $\mathcal{C}^1$ par morceaux,

on a $x_i(t) = x_i(0) + \int_0^t x_i'(s)\,ds$ pour $i = 1, 2$.

d'où $x_2(t) - x_1(t)$

$$= x_2(0) - x_1(0) + \int_0^t x_2'(s) - x_1'(s)\,ds$$

et
$$|x_2(t) - x_1(t)| \leq |x_2(0) - x_1(0)| + \int_0^t |x_2'(s) - f(s, x_2(s))|\,ds + \int_0^t |f(s, x_2(s)) - f(s, x_1(s))|\,ds + \int_0^t |f(s, x_1(s)) - x_1'(s)|\,ds$$

$$\leq \delta + 2\varepsilon t + \int_0^t K\,|x_2(s) - x_1(s)|\,ds$$

car f est globalement K Lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable.

*) On va maintenant utiliser (et redémontrer dans ce cas) le lemme de Gronwall.

Posons $v(t) = \int_0^t |x_2(s) - x_1(s)|\,ds$.

On a $v(0) = 0$, v est de classe $\mathcal{C}^1$

(Rq : les calculs sont en fait plus rapides si on pose $v(t) = \delta + 2\varepsilon t + K\int_0^t |x_2(s) - x_1(s)|\,ds$.)

et v vérifie l'inégalité différentielle :

$$v'(t) \leq \delta + 2\epsilon t + K v(t).$$

d'où : $v'(t) - K v(t) \leq \delta + 2\epsilon t$

et $\underbrace{\left(v'(t) - K v(t)\right) e^{-Kt}}_{= \left(e^{-Kt} v(t)\right)'} \leq (\delta + 2\epsilon t) e^{-Kt}$

d'où en intégrant : (et $v(0) = 0$.) entre 0 et t.

$$e^{-Kt} v(t) \leq \int_0^t (\delta + 2\epsilon s) e^{-Ks} ds$$

Or $\int_0^t e^{-Ks} ds = \left[-\frac{1}{K} e^{-Ks}\right]_0^t = \frac{1 - e^{-Kt}}{K}$

$$\int_0^t s e^{-Ks} ds \overset{IPP}{=} \left[-\frac{s}{K} e^{-Ks}\right]_0^t + \int_0^t \frac{e^{-Ks}}{K} ds$$

$$= -\frac{t}{K} e^{-Kt} + \frac{1}{K^2}\left(1 - e^{-Kt}\right)$$

$$= \frac{1}{K^2}\left(1 - (1+Kt) e^{-Kt}\right)$$

d'où $v(t) \leq \frac{\delta}{K}\left(e^{Kt} - 1\right) + \frac{2\epsilon}{K^2}\left(e^{Kt} - (1+Kt)\right)$

Or $|x_2(t) - x_1(t)| \leq \delta + 2\epsilon t + K v(t)$

$$= \delta e^{Kt} + 2\epsilon \left(\frac{e^{Kt} - 1}{K}\right) \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$