

Une feuille d'exercices:

Un peu d'équations différentielles

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentielle $x' = f(x)$ définie sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'on a $\varphi(1) = \varphi(\sqrt{3})$.

- 1) Montrer que φ est périodique.
- 2) Le résultat reste-t-il vrai si on suppose seulement f continue.

Exercice 2. Soit $f : (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow f(t, x)\mathbb{R}$. On suppose que f est globalement K Lipschitzienne par rapport à x uniformément à t ($K > 0$):

$$\forall t \in \mathbb{R}, x, x' \in \mathbb{R}, |f(t, x) - f(t, x')| \leq K|x - x'|.$$

Soient x_1 et x_2 deux fonctions continues, $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On suppose que x_1 et x_2 sont deux ε -solutions approchées de l'équation différentielle: $x'(t) = f(t, x(t))$, au sens où pour $i = 1, 2$:

$$|x'_i(t) - f(t, x_i(t))| \leq \varepsilon, \text{ là où } x_i \text{ est dérivable.}$$

On note $\delta = |x_1(0) - x_2(0)|$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a:

$$|x_2(t) - x_1(t)| \leq \delta e^{K|t|} + 2\varepsilon \left(\frac{e^{K|t|} - 1}{K} \right)$$

On pourra commencer par montrer que pour $t \geq 0$,

$$|x_2(t) - x_1(t)| \leq \delta + 2\varepsilon|t| + K \int_0^t |x_2(s) - x_1(s)| ds.$$

Exercice 3. On considère l'équation différentielle:

$$(E) \quad y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0.$$

On suppose que p et q sont développables en série entière en 0 de rayon de convergence $R > 0$. On a donc $p(x) = \sum_{n \geq 0} p_n x^n$ et $q(x) = \sum_{n \geq 0} q_n x^n$ pour $x \in]-R, R[$. On admet que pour tout $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$, (E) possède une unique solution maximale telle que $\begin{cases} y(0) = c_0 \\ y'(0) = c_1 \end{cases}$, définie sur $] -R, R[$. Le but de l'exercice est de montrer que la solution correspondante est développable en série entière sur $] -R, R[$.

1) Supposons le problème résolu. Soit y une fonction développable en série entière. On notera $y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

Montrer que y est une solution de (E) si et seulement si pour tout $n \geq 0$,

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = - \sum_{j=0}^n (n+1-j)a_{n+1-j}p_j - \sum_{j=0}^n a_{n-j}q_j.$$

En déduire que, si elle existe, il existe une unique série entière solution du problème de Cauchy correspondant à $y(0) = c_0, y'(0) = c_1$.

La suite de l'exercice consiste à montrer que la "série formelle" obtenue ci-dessus a un rayon de convergence $\geq R$.

2) Soit $0 < r < R$ fixé, justifier qu'il existe une constante $C := C_r$ telle que pour tout $n \geq 0$,

$$(n+2)(n+1)|p_n| \leq \frac{C}{r^{n-1}} \text{ et } |q_n| \leq \frac{C}{r^n}.$$

On va maintenant chercher M tel que pour tout $n \geq 0$,

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n}. \quad (1)$$

3) Soit $n \geq 0$ supposons que (1) est satisfaite pour tout $0 \leq k \leq n+1$. Montrer qu'alors

$$(n+2)(n+1)|a_{n+2}| \leq 2(n+1) \left(\frac{CM}{r^n} \right).$$

4) En déduire qu'il existe un entier $N := N_r$ indépendant de la valeur de M telle que si (1) est satisfaite pour tout $0 \leq k \leq n$ pour un certain $n \geq N$ alors (1) est aussi vérifiée pour $n+1$.

5) En déduire une valeur de M pour laquelle (1) est satisfaite pour tout $n \geq 0$.

6) Conclure.

Exercice 4. On considère l'équation différentielle de Riccati sur $[0, +\infty)$ $(E) : y'(t) = y^2(t) - \alpha(t)$ où α est une fonction continue de $[0, +\infty)$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que z_0 est une solution définie globalement sur $[0, +\infty)$ et qu'elle est positive: $z_0(t) > 0$, pour $t \geq 0$.

On note $a = z_0(0)$.

1) Soit $b > a$ et soit z_1 la solution maximale de (E) telle que $z_1(0) = b$. Elle est définie sur un intervalle $[0, \beta[$. Justifier que pour tout $t \in [0, \beta[$, $z_1(t) \geq z_0(t)$.

2) On note $u = z_1 - z_0$, montrer que $u'(t) \geq u^2(t)$. En déduire que la solution maximale z_1 n'est pas globale.

3) Soit $0 < c < a$ et soit z_2 la solution maximale de (E) telle que $z_2(0) = c$. Montrer que z_2 s'annule.

Problème (zéros des polynômes de Legendre)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le n -ième *polynôme de Legendre* L_n par la formule

$$L_n = \frac{d^n}{dX^n} ((X^2 - 1)^n).$$

A Par définition, le polynôme L_n est de degré n . Le but de cette partie est de montrer que L_n possède n racines distinctes dans l'intervalle $] -1 ; 1[$.

1 Montrer qu'on a $\int_{-1}^1 P(t) L_n(t) dt = 0$ pour tout polynôme P de degré strictement inférieur à n .

2 Soit L un polynôme à coefficients réels, soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit k le nombre de points de I où L s'annule en changeant de signe. Montrer qu'il existe un polynôme P de degré k tel que $P(t)L(t) \geq 0$ pour tout $t \in I$.

3 Conclure à l'aide de **1** et **2**.

Dans la suite, on notera $x_{1,n} < \dots < x_{n,n}$ les zéros du polynôme L_n . Pour tout intervalle $J \subset \mathbb{R}$, on notera $N_n(J)$ le nombre de zéros de L_n appartenant à J . Le but de la suite du problème est d'étudier le comportement asymptotique de $N_n(J)$ quand n tend vers l'infini.

B Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $q : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue, on note (E_q) l'équation différentielle

$$y'' + qy = 0.$$

1 Soient $q_1, q_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues. Pour $i = 1, 2$, soit y_i une solution de (E_{q_i}) .

a On pose $W = y_1 y_2' - y_2 y_1'$. Exprimer W' en fonction de q_1, q_2, y_1, y_2 .

b Soient $\alpha, \beta \in I$, $\alpha < \beta$. On suppose qu'on a $y_1(\alpha) = y_1(\beta) = 0$ et que y_1 et y_2 sont strictement positives sur $] \alpha ; \beta [$.

(i) Montrer qu'on a $W(\alpha) \leq 0 \leq W(\beta)$.

(ii) En déduire que si $q_1 \leq q_2$ sur $] \alpha ; \beta [$, alors y_1 et y_2 sont proportionnelles sur $] \alpha ; \beta [$.

c On suppose qu'on a $q_1(t) \leq q_2(t)$ pour tout $t \in I$. Montrer qu'entre deux zéros consécutifs de y_1 , il y a au moins un zéro de y_2 .

2 Soit $q : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue vérifiant $m \leq q \leq M$, où m et M sont des constantes strictement positives. En utilisant **1c**, montrer que si y est une solution de (E_q) et si α, β sont deux zéros consécutifs de y , alors

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq \beta - \alpha \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}.$$

C Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1 Montrer que L_n est solution de l'équation différentielle $(1-t^2)y'' - 2ty' + n(n+1)y = 0$. On pourra commencer par observer que le polynôme $Q = (X^2 - 1)^n$ vérifie $(X^2 - 1)Q' = 2nXQ$ et dériver cette égalité.

2 Pour $t \in] -1 ; 1 [$, on pose $\tilde{L}_n(t) = \sqrt{1-t^2} L_n(t)$. Montrer que $\tilde{L}_n$ est solution d'une équation différentielle du type (E_{q_n}) , où la fonction q_n est à expliciter.

D Soit $J = [a ; b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$.

1 Montrer qu'on a $q_n(t) \geq n(n+1)$ pour tout $t \in]-1; 1[$ et pour tout n . En déduire, à l'aide de **B** et **C**, qu'on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Max} \{x_{k+1,n} - x_{k,n}; 1 \leq k \leq n-1\} = 0.$$

BONUS: 2a Soit $\beta_0 \in [0; 1[$. Montrer qu'il existe un entier N vérifiant la propriété suivante : si $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \beta_0$, alors

$$\frac{n^2}{1-\alpha^2} \leq q_n(t) \leq \frac{(n+1)^2}{1-\beta^2}$$

pour tout $n \geq N$ et pour tout $t \in [\alpha; \beta]$.

2b On suppose que J est contenu dans $[0; 1[$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\Lambda_n = \{k; x_{k,n} \in J\}$. Déduire de **a** que si n est assez grand, alors

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{n} N_n(J) &\geq \sum_{k \in \Lambda_n} \frac{x_{k+1,n} - x_{k,n}}{\sqrt{1 - x_{k,n}^2}}, \\ \frac{\pi}{n+1} N_n(J) &\leq \sum_{k \in \Lambda_n} \frac{x_{k+1,n} - x_{k,n}}{\sqrt{1 - x_{k+1,n}^2}}. \end{aligned}$$

3 Montrer qu'on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(J)}{n} = \frac{1}{\pi} (\text{Arcsin}(b) - \text{Arcsin}(a)).$$