

Feuille 3

Exercice 1. (méthode de Laplace)

On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

1) Montrer que pour tout $\alpha > 0$ fixé,

$$\int_0^\alpha e^{-\frac{\lambda x^2}{2}} dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}, \text{ quand } \lambda \rightarrow +\infty.$$

2) Soit f une fonction continue en 0 (et mesurable et bornée pour que les intégrales aient un sens). Montrer

$$\int_0^\alpha e^{-\frac{\lambda x^2}{2}} f(x) dx \sim f(0) \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}, \text{ quand } \lambda \rightarrow +\infty.$$

3) Soit ϕ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, vérifiant $\psi'(0) = 0$ et $\psi'(x) > 0$ pour $x > 0$, et $\psi''(0) > 0$. Montrer que

$$\int_0^\alpha e^{-\frac{\lambda \psi(x)}{2}} f(x) dx \sim f(0) e^{-\frac{\lambda \psi(0)}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda \psi''(0)}}, \text{ quand } \lambda \rightarrow +\infty.$$

4) Application à la fonction Gamma et la formule de Stirling.
Montrer que

$$N! = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^N dx = N^{N+1} \int_0^{+\infty} e^{-N(y - \ln(y))} dy.$$

En déduire la formule de Stirling (attention on applique ce qui précède deux fois en 1 et pas en 0):

$$N! \sim \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N.$$

Exercice 2. (Rouvière exo 35)

1) Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels défini par $u_n = f(n)$ pour $n \geq 1$ avec f une fonction croissante telle que $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0.$$

Montrer que la suite u_n est dense sur le cercle.

(Pour $\theta \in [0, 2\pi]$ et k un entier ($k \geq f(1)$), on pourra considérer x_k le réel tel que $f(x_k) = \theta + 2k\pi$ et n_k sa partie entière.)

2) On considère les cas $u_n = \cos(a\sqrt{n})$, $u_n = \cos(a \ln n)$, $u_n = \cos(an)$, $a \in \mathbb{R}$. Dans quels cas a-t-on $\text{Adh}(u_n) = [-1, 1]$?

Exercice 3. (Alessandri-Exbrayat) (suites équiréparties)

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de $[0; 1]$ est *équirépartie* si pour tout intervalle $[a; b] \subset [0; 1]$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{card} \{i \in \{1; \dots; n\}; u_i \in [a; b]\} = b - a.$$

A Montrer en utilisant la définition que la suite $\{\sqrt{n}\}$ est équirépartie dans $[0, 1]$ avec $\{\cdot\}$ la partie fractionnaire ($\{x\} = x - E(x)$ avec E la partie entière.)

B Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite dans $[0; 1]$. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions mesurables bornées $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(u_k) = \int_0^1 f(t) dt.$$

Soit maintenant $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. Montrer que dans chacun des cas suivants, on peut conclure que $f \in \mathcal{E}$.

a f est limite uniforme d'une suite d'éléments de $\mathcal{E}$.

b f est limite simple d'une suite croissante d'éléments de $\mathcal{E}$ et d'une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{E}$.

C Soit $(u_n) \subset \mathbb{R}$, les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) $(\{u_n\}) \subset [0, 1]$ est équirépartie (avec $\{u_n\}$, la partie fractionnaire de u_n).

(ii) Pour toute fonction continue par morceaux 1-périodique $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(u_k) = \int_0^1 f(t) dt.$$

(ii') Pour toute fonction continue 1-périodique $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(u_k) = \int_0^1 f(t) dt.$$

(iii) Pour tout entier $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2i\pi m u_k} = 0.$$

Indication: On montrera que: $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (ii') \Rightarrow (i)$ puis que $(ii') \Leftrightarrow (iii)$.

$(i) \Rightarrow (ii)$ par limite uniforme de fonction en escaliers.

$(ii) \Rightarrow (ii')$ clair.

$(ii') \Rightarrow (i)$ On considère $0 \leq a < b \leq 1$ et $\phi_{a,b}$ la fonction 1-périodique coïncidant avec $\mathbf{1}_{[a,b]}$ sur $[0, 1]$. Pour $\varepsilon > 0$, on encadre $f_- \leq \phi_{a,b} \leq f_+$ avec f_- et f_+ linéaire par morceaux 1-périodiques de telles sorte que $\int_0^1 f_+(x) - f_-(x) dx \leq \varepsilon$.

$(ii') \Rightarrow (iii)$ clair.

$(iii) \Rightarrow (ii')$ On utilise la densité des polynômes trigonométriques dans l'ensemble des fonctions continues 1-périodiques pour la norme uniforme (Fejer, Weierstrass).

D Soit $\theta \in [0; 1]$. Montrer que la suite $(\{n\theta\})_{n \geq 1}$ est équirépartie si et seulement si $\theta \notin \mathbb{Q}$.

E Montrer que la suite $(\{ln(n)\})_{n \geq 1}$ n'est pas équirépartie. (On pourrait le faire à partir de la définition.) Montrer ici que $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2i\pi ln(k)}$ ne tend pas vers 0. On pourra comparer à $\frac{1}{n} \int_1^{n+1} e^{2i\pi ln(x)} dx$ et calculer explicitement cette expression et sa limite.