

Feuille 4

Exercice 1. Sur $\mathbb{R}[X]$, on définit les normes suivantes: pour $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$,

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^n |a_k|, \quad \|P\|_2 = \left(\sum_{k=0}^n |a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|P\|_\infty = \sup_{0 \leq k \leq n} |a_k|$$

1) Montrer que $\|P\|_\infty \leq \|P\|_2 \leq \|P\|_1$ mais que ces normes ne sont pas équivalentes.

C'est classique:

2) On considère l'endomorphisme $P \rightarrow P'$ dans $\mathbb{R}[X]$. Est-il continu pour l'une de ces normes. Non, car pour $P(X) = X^n$, on a : $\|P\| = 1$ et $\|P'\| = n..$

3) Existe-t-il une norme sur $\mathbb{R}[X]$ pour laquelle l'endomorphisme $P \rightarrow P'$ est continu?

4) On considère la forme linéaire $\phi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $P \mapsto P(c)$ est-elle continue pour l'une de ces normes. On pourra séparer les cas $|c| \leq 1$ et $|c| > 1$. Dans le cas $|c| \leq 1$, calculer la norme $\|\phi\|$. Est-elle atteinte?

Exercice 2. (Inégalité de Hardy) Soit $p \in (1, \infty)$ et q l'exposant conjugué ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Pour $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, et $x > 0$, on pose

$$Tf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

0) Vérifier que chaque $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, et $x > 0$, $Tf(x)$ est bien défini. On notera également $F(x) := Tf(x)$.

1) Soit $0 < \alpha < \frac{1}{q}$. Montrer que

$$|F(x)|^p \leq \frac{x^{-1-\alpha p}}{(1-\alpha q)^{\frac{p}{q}}} \int_0^x |f(t)|^p t^{\alpha p} dt;$$

Indication: On pourra écrire: $Tf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) t^{\alpha} t^{-\alpha} dt$.

2) Montrer que

$$\int_0^\infty |F(x)|^p dx \leq \frac{1}{\alpha p (1-\alpha q)^{p-1}} \int_0^\infty |f(t)|^p dt.$$

Indication: Utiliser Fubini-Tonelli, plutôt qu'une intégration par parties.

3) En déduire que $T \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}_+))$, puis en optimisant en α que $\|T\| \leq q$.

4) Le but de cette question est de montrer qu'en fait $\|T\| = q$.

Pour quelle fonction aurait-on égalité dans 2) (avec le choix de α dans 3))

Soit $A > 1$, on pose $f_A(x) = t^{-\frac{1}{p}} \mathbf{1}_{[1,A]}(t)$ et on notera $F_A = T(f_A)$.

Montrer que

$$\|f_A\|_p^p = \ln(A),$$

$$\|F_A\|_p^p = q^p \int_1^\infty \frac{1}{x^p} \left((x \wedge A)^{\frac{1}{q}} - 1 \right)^p dx \geq q^p \int_1^A \frac{1}{x^p} \left(x^{\frac{1}{q}} - 1 \right)^p dx$$

Montrer que

$$\int_1^A \frac{1}{x^p} \left(x^{\frac{1}{q}} - 1\right)^p dx \underset{A \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(A).$$

puis conclure.

5) Pour $n \geq 1$, on pose $f_n = n^{-\frac{1}{p}} \mathbf{1}_{[n, 2n]}$. Montrer que f_n converge faiblement vers 0 (i.e. pour tout $g \in \mathbb{L}^q(\mathbb{R}_+)$, $\int g(t)f_n(t)dt \rightarrow 0$).

Mais que $T(f_n)$ ne tend pas vers 0 dans $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+)$ (i.e. $\|T(f_n)\|_p \not\rightarrow 0$).

(En particulier T n'est pas compacte).

Exercice 3. (Inégalités de Khintchine) Le but de l'exercice va être de construire 2 normes notées $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$ qui vérifient pour tout $a \in \mathbb{R}^n$

$$\|a\|_1 \leq \|a\|_2 \leq c\|a\|_1$$

avec c une constante qui ne dépend pas de la dimension n .

On commence par s'intéresser au cube discret $C_n = \{-1, +1\}^n$ muni de la mesure uniforme μ_n . Pour $n \geq 1$, on définit alors pour $a \in \mathbb{R}^n$ les normes:

$$\|a\|_1 := \sum_{\varepsilon \in C_n} \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i \right| \mu_n(\varepsilon)$$

et

$$\|a\|_2 := \left(\sum_{\varepsilon \in C_n} \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i \right|^2 \mu_n(\varepsilon) \right)^{\frac{1}{2}}$$

avec $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in C_n = \{-1, +1\}^n$ et $\mu_n(\varepsilon) = \frac{1}{2^n}$.

Remarque: On peut considérer que cette mesure uniforme sur le cube C_n est elle-même obtenue comme la mesure image par n variables aléatoires indépendantes de loi de Rademacher d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:

$$\begin{array}{ccc} (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) & \rightarrow & (C_n, \mathcal{P}(C_n), \mu_n) \\ \omega & \mapsto & (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \end{array}$$

avec $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi de Rademacher (c'est-à-dire $\mathbb{P}(X_i = +1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$.)

Il est même possible de proposer un modèle explicite pour $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sur lequel on peut construire toutes les variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 0}$ à la fois.

On peut prendre $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{A}$ la tribu des boréliens sur $[0, 1]$ et $\mathbb{P}$ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$ et définir pour $\omega \in \Omega = [0, 1]$,

$$X_i(\omega) = \text{signe} [\sin(2^j \pi \omega)] .$$

On remarque donc que

$$\|a\|_1 = \mathbb{E}[|f|] \text{ et } \|a\|_2 = \mathbb{E}[|f|^2]^{\frac{1}{2}}$$

avec

$$f(\omega) = \sum_{k=1}^n a_k X_k(\omega)$$

qui appartient à l'espace vectoriel F_n de dimension n engendré par les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$.

On a clairement

$$\mathbb{E}[|f|] \leq \mathbb{E}[|f|^2]^{\frac{1}{2}}$$

Le but de l'exercice est maintenant de montrer que pour $f \in F_n$ on a

$$\mathbb{E}[|f|^2]^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{e} \mathbb{E}[|f|].$$

1) Montrer que pour $f = \sum_{k=1}^n a_k X_k$, on a

$$\mathbb{E}[|f|^2] = \sum_{k=1}^n a_k^2.$$

2) Montrer que si $g \in L^\infty(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et si $g \neq 0$,

$$\mathbb{E}[|f|] \geq \frac{|\mathbb{E}[fg]|}{\|g\|_\infty}.$$

3) On va donc essayer de minorer $\mathbb{E}[|f|]$ par “dualité” en cherchant g telle que $\|g\|_\infty$ soit “petit” et $|\mathbb{E}[fg]|$ “grand”. Posons

$$g(\omega) = \prod_{k=1}^n (1 + ia_k X_k(\omega)).$$

a) Montrer que pour tout $\omega \in \Omega = [0, 1]$,

$$|g(\omega)|^2 \leq \exp \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right).$$

b) Montrer que pour tout $1 \leq j \leq n$

$$E[gX_j] = ia_j,$$

puis que: $|\mathbb{E}[fg]| = \sum_{k=1}^n a_k^2 = \mathbb{E}[|f|^2]$.

c) En déduire que

$$\mathbb{E}[|f|] \geq \frac{\mathbb{E}[|f|^2]}{\exp \left(\frac{1}{2} \mathbb{E}[|f|^2] \right)}.$$

d) Conclure pour $\mathbb{E}[|f|^2] = 1$ puis dans le cas général.

Remarque: la constante $\sqrt{e}$ n'est pas optimale. La constante optimale est $\sqrt{2}$.

Exercice 4. *thm de Borel*

1) Montrer que la fonction:

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2) En déduire l'existence d'une "fonction plateau" $\phi \geq 0$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et telle que

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |t| \geq 2. \end{cases}$$

3) Soit $(a_k)_{k \geq 0}$ une suite quelconque de réels. Montrer qu'il existe une fonction $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et telle que

$$\forall k \geq 0, u^{(k)}(0) = a_k.$$

On pourra considérer

$$u(x) = \sum_{k \geq 0} \phi(\lambda_k x) a_k \frac{x^k}{k!}$$

avec ϕ la fonction plateau précédente et où chaque λ_k sera convenablement choisi, par exemple $(\lambda_k = \max(1, |a_k|))$.

4) En déduire qu'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur un segment peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.