Université Bordeaux 1 — Année 2011/2012
Parcours MISMI DOM PHY. ING. — Code UE: Q1MI2M21
Solution du DS de Math.

Solution de l'exercice 1
1. On calcule la dérivée de $x \times e^{-2x} \times (2+x)^{-1}$ (dérivée d'un produit):

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-2x} \times (2+x)^{-1} - 2x \times e^{-2x} \times (2+x)^{-1} - x \times e^{-2x} \times (2+x)^{-2} \\ &= \frac{(1-2x)(2+x) - x}{(2+x)^2} e^{-2x} \\ &= 2\frac{1-2x-x^2}{(2+x)^2} e^{-2x}. \end{aligned}$$

Ainsi, f' est du signe de $1-2x-x^2$ dont les racines sont $-1+\sqrt{2} > 0$ et $-1-\sqrt{2} < 0$ donc $1-2x-x^2 = -(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})$. Comme on n'étudie f que sur $[0,+\infty)$, seul le deuxième facteur change de signe, donc

x	0		$\sqrt{2}-1$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f(\sqrt{2}-1)$	$\searrow$	0

2. Ainsi f a un maximum global en $\sqrt{2}-1$ et un minimum global en 0.

Solution de l'exercice 2
1. f est définie tant que $1+x \neq 0$ donc sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. De plus $f(x) = (1+x)^{-1}$ donc $f'(x) = -(1+x)^{-2}$ puis $f''(x) = +2(1+x)^{-3}$, $f^{(3)}(x) = -2 \times 3(1+x)^{-4}$, et $f^{(n)} = (-1)^n n!(1+x)^{-n-1}$.
2. On en déduit que $f^{(n)}(0) = (-1)^n n!$. D'après la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 4, pour tout $x \geq 0$, il existe $c \in [0,x]$ tel que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4 \\ &= 1 - x + x^2 - x^3 + (1+c)^{-5}x^4. \end{aligned}$$

Comme $0 \leq c \leq x$ et $x^4 \geq 0$, $(1+x)^{-5}x^4 \leq (1+c)^{-5}x^4 \leq x^4$. On en déduit bien que

$$1 - x + x^2 - x^3 + \frac{x^4}{(1+x)^5} \leq f(x) \leq 1 - x + x^2 - x^3 + x^4.$$

3. On déduit de cette inégalité que $|f(x) - (1-x+x^2-x^3)| \leq x^4$, donc $|f(x)-(1-x+x^2-x^3)| \leq 10^{-6}$ sur $[0,a]$ si $a^4 \leq 10^{-6}$ soit $a \leq 10^{-6/4} = 10^{-3/2}$.

Solution de l'exercice 3
1. D'après le cours

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$.
2. On a $\exp(2+2x-x^2) = e^2\exp(2x-x^2) = e^2e^t$ avec $t = 2x - x^2 \to 0$ quand $x \to 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} \exp(2+2x-x^2) &= e^2\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}\right) + o(t^3) \\ &= e^2\left(1 + 2x - x^2 + \frac{(2x-x^2)^2}{2!} + \frac{(2x-x^2)^3}{3!}\right) + o(x^3) \\ &= e^2\left(1 + 2x - x^2 + \frac{4x^2-4x^3}{2} + \frac{2^3x^3}{2 \times 3}\right) + o(x^3) \\ &= e^2\left(1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3\right) + o(x^3). \end{aligned}$$

3. Ainsi, la tangeante à la courbe représentative de f au voisinage du point $x = 0$ est la droite d'équation $y = e^2(1+2x)$ (termes d'ordre ≤ 1 dans le DL) et la courbe est au-dessus de la tangeante (terme suivant dans le DL: $e^2x^2 \geq 0$).

Solution de l'exercice 4

1. On a une forme indéterminée 0/0, on fait donc des DL au premier ordre non nul:

$$\begin{array}{ccccccc}
\sin x & = & & x & & -\frac{x^3}{3!} & +o(x^3) \\
\cos x & = & 1 & & -\frac{x^2}{2!} & & +o(x^3) \\
x\cos x & = & & x & & -\frac{x^3}{2!} & +o(x^3) \\
\hline
\sin x - x\cos x & = & & & & \frac{x^3}{3} & +o(x^3) \\
\ln(1+x) & = & & x & -\frac{x^2}{2} & +\frac{x^3}{3} & +o(x^3) \\
\ln(1+x^2) & = & & & x^2 & & +o(x^3) \\
x\ln(1+x^2) & = & & & & x^3 & +o(x^3)
\end{array}$$

Ainsi

$$\frac{\sin x - x\cos x}{x\ln(1+x^2)} = \frac{\frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_1(x)}{x^3 + x^3\varepsilon_2(x)} = \frac{1/3 + \varepsilon_1(x)}{1+\varepsilon_2(x)} \to \frac{1}{3}$$

puisque $\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x) \to 0$ quand $x \to 0$.

2. En posant $t = 1/x$, on voit qu'on veut la limite quand $t \to 0^+$ de

$$\frac{1}{t^3}\sin t - \frac{1}{t^2} = \frac{\sin t - t}{t^3}.$$

Mais, le développement limité à l'ordre 3 de $\sin t - t = t - \frac{t^3}{3!} - t + t^3\varepsilon(t) = -\frac{t^3}{3!} + t^3\varepsilon(t)$ donc

$$\frac{\sin t - t}{t^3} = -\frac{1}{3!} + \varepsilon(t) \to -\frac{1}{3!}.$$

Ainsi

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 \sin\frac{1}{x} - x^2 = -\frac{1}{3!}.$$