Division d'une distribution par x

Ex 15 : Soit S une distribution tempérée ($S \in \mathcal{S}'$) et cherchons à résoudre : $xT = S$ avec $T \in \mathcal{S}'$

Soit $\theta \in \mathcal{S}$ telle que $\theta(0) = 1$

et posons
$$\boxed{\Psi(\varphi)(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\theta(x)}{x}} \quad (*)$$

On remarque pour $\varphi \in \mathcal{S}$,

la fonction : $x \longrightarrow \dfrac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}$ est $\mathcal{C}^\infty$.

(Attention, contrairement à ce que j'ai écrit elle n'appartient pas à $\mathcal{S}$).

En effet si $x \neq 0$,
$$\varphi(x) - \varphi(0) = \int_0^x \varphi'(u)\,du = \int_0^1 \varphi'(xv)\,x\,dv \quad (u = xv)$$

et
$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \int_0^1 \varphi'(xv)\,dv.$$

La formule est encore valable pour $x = 0$

et par le théorème de dérivation sous le signe intégral.

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\right) = \int_0^1 v^n \varphi^{(n+1)}(xv)\,dv$$

En effet. $\frac{d^n}{dx^n}\left(\varphi'(xv)\right) = v^n \varphi^{(n+1)}(xv)$

et $|v^n \varphi^{(n+1)}(xv)| \leq v^n \|\varphi^{(n+1)}\|_\infty$ intégrable

(indépendamment de x).

En écrivant $\Psi(\varphi)(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} - \varphi(0)\left(\frac{\theta(x) - 1}{x}\right)$

On trouve donc que $\Psi(\varphi)$ est C^∞.

Pour montrer que : $\varphi \in \mathcal{S} \longrightarrow \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\theta(x)}{x}$

est à valeurs dans $\mathcal{S}$ et est continue, on va séparer les cas $|x| \geq 1$ et $|x| \leq 1$. Soit $k, \ell \geq 0$

- Si $|x| \leq 1$

$$|x^k \Psi(\varphi)^{(\ell)}(x)| \leq |\Psi(\varphi)^{(\ell)}(x)|$$
$$= \left| \int_0^1 v^n \left(\varphi^{(n+1)}(xv)\right) dv - \varphi(0) \int_0^1 v^n \theta^{(n+1)}(xv) dv \right|$$
$$\leq \left(\|\varphi^{(n+1)}\|_\infty + \|\varphi\|_\infty \|\theta^{(n+1)}\|_\infty\right) \cdot \underbrace{\int_0^1 v^n dv}_{= \frac{1}{n+1}}$$

- Si $|x| \geq 1$, Par Leibniz

$$|\Psi(\varphi)^{(\ell)}(x)| = \left| \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} \left(\frac{1}{x}\right)^{(j)} \left(\varphi(x) - \varphi(0)\theta(x)\right)^{(\ell-j)} \right|$$

$$\left|\left(\frac{1}{x}\right)^{(j)}\right| = \left|\frac{(-1)^j j!}{x^j}\right| \leq j! \quad \text{car } |x| \geq 1$$

d'où $|x^k \Psi(\varphi)^{(\ell)}(x)| \leq \sum_{j=0}^{\ell} C_{\ell,j} \left(|x^k \varphi^{(j)}(x)| + |\varphi(0)|\, |x^k \theta^{j}(x)|\right)$

$$\leq C'_\ell \sum_{j=0}^{\ell} \|\varphi\|_{(k,j)} + \|\varphi\|_\infty \|\theta\|_{(k,j)}$$

On a donc bien $\Psi(\varphi) \in \mathcal{S}$ et $\varphi \in \mathcal{S} \to \Psi(\varphi) \in \mathcal{S}$ continue.

Cherchons maintenant à résoudre $xT = S$. ($S \in \mathcal{S}'$ donnée).

<u>Analyse</u>: Supposons que $T \in \mathcal{S}'$ vérifie $xT = S$
Soit $\varphi \in \mathcal{S}$, on a alors d'après (*)

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, x\Psi(\varphi)(x) + \varphi(0)\theta(x) \rangle$$

$$= \langle xT, \Psi(\varphi) \rangle + \varphi(0) \langle T, \theta \rangle$$

$$= \langle S, \Psi(\varphi) \rangle + \langle T, \theta \rangle \varphi(0).$$

donc $\boxed{\langle T, \varphi \rangle = \langle S, \Psi(\varphi) \rangle + C \langle \delta_0, \varphi \rangle}$
pour une certaine constante $C \in \mathbb{R}$.

<u>Synthèse</u>: Supposons que $\langle T, \varphi \rangle = \langle S, \Psi(\varphi) \rangle + C\varphi(0)$.
pour un certain $C \in \mathbb{R}$.

Puisque $\varphi \to \Psi(\varphi)$ est continue dans $\mathcal{S}$
et que $S \in \mathcal{S}'$
T définit bien une distribution tempérée.

(4)

En posant $\langle xT, \varphi\rangle = \langle T, x\varphi\rangle$
pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$

$$= \langle S, \Psi(x\varphi)\rangle + C\underbrace{\langle \delta_0, x\varphi\rangle}_{=0}$$

$$= \langle S, \varphi\rangle$$

car
$$\Psi(x\varphi) = \frac{x\varphi(x) - \overbrace{(x\varphi(x))|_{x=0}}^{=0}\,\theta(x)}{x} = \varphi(x)$$

Donc $T \in \mathcal{S}'$ et vérifie $xT = S$.

<u>Conclusion</u> : Étant donné $S \in \mathcal{S}'$, les solutions de l'équation :

$xT = S$ sont exactement les

$$\varphi \to \langle S, \Psi(\varphi)\rangle + C\langle \delta_0, \varphi\rangle, \; C \in \mathbb{R}$$

avec $\Psi(\varphi)$ définie par $(*)$.

<u>Application à la résolution de $xT = 1$.</u>

On peut vérifier directement que $x\,vp(\frac{1}{x}) = 1$ dans $\mathcal{S}'$.

. $\langle x\,vp(\frac{1}{x}), \varphi\rangle = \langle vp(\frac{1}{x}), x\varphi\rangle$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|x|\geq \epsilon} \frac{x\varphi(x)}{x}\,dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x|\geq\epsilon} \varphi(x)\,dx$$

$$= \int \varphi(x)\,dx = \langle 1, \varphi\rangle$$

Les solutions sont donc : $vp(\frac{1}{x}) + C\delta_0$, $C \in \mathbb{R}$.

- On aurait aussi pu essayer de calculer directement $\langle T_0, \varphi \rangle$

$$:= \langle 1, \Psi(\varphi) \rangle \qquad (S = 1)$$

On a : $\langle 1, \Psi(\varphi) \rangle$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\theta(x)}{x} \, dx$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x| \geq \epsilon} \left(\frac{\varphi(x)}{x} - \varphi(0) \frac{\theta(x)}{x} \right) dx$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx - \varphi(0) \left(\int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\theta(x)}{x} \, dx \right) \right)$$

$$= \langle vp\left(\tfrac{1}{x}\right), \varphi \rangle - \varphi(0) \langle vp\left(\tfrac{1}{x}\right), \theta \rangle$$

Et donc, avec

$$\langle T_0, \varphi \rangle = \langle 1, \Psi(\varphi) \rangle$$

on a : $T_0 = vp\left(\frac{1}{x}\right) - C_\theta \, \delta_0$

(avec $C_\theta = \langle vp\left(\frac{1}{x}\right), \theta \rangle$

On a que toutes les solutions sont $T_0 + C\delta_0$, $C \in \mathbb{R}$

donc on retrouve bien que ce sont tous les

$$vp\left(\frac{1}{x}\right) + C', \quad C' \in \mathbb{R}.$$