CPP-la prépa des INP 2 ème année
lundi 10 décembre 2012

Examen de Probabilités

Exercice 1. (8 points environ) La loi triangulaire est beaucoup utilisée en traitement du son. Sa densité est donnée par,

$$f_X(x) = \frac{1}{a^2}\,(a - |x|)\,\mathbf{1}_{[-a,a]}(x)$$

où a est un paramètre réel strictement positif.
1) Vérifier que f_X est bien une densité de probabilité et représenter cette densité.
2) Calculer son espérance et sa variance.
3) Calculer $\mathbb{P}(2|X| \geq a)$.
4) On considère ici $a = 1$. Donner la loi de la variable aléatoire $Y = \sqrt{|X|}$. On pourra commencer par déterminer l'ensemble de ses valeurs, sa fonction de répartition puis sa densité.

Exercice 2. Les deux parties sont indépendantes.

On considère n "menteurs" $I_1, I_2, \ldots I_n$. Le menteur I_1 reçoit une information sous la forme de "oui" ou "non" et la transmet à I_2 et ainsi de suite jusqu'à I_n. Chaque menteur transmet ce qu'il a entendu avec probabilté p $(0 < p < 1)$ et transmet l'information contraire avec probabilité $1 - p$. On suppose que chaque menteur ment ou transmet fidèlement l'information de manière indépendante des autres menteurs.

Pour $i = 1, \ldots n$, on note A_i l'évènement: "le menteur I_i transmet ce qu'il a entendu" et B_i l'évènement: "le menteur i transmet l'information initiale.

On note p_n la probablité que le menteur I_n transmette l'information initiale.

Partie A (6 points environ)

1) Que valent $\mathbb{P}(B_{i+1}|B_i)$ et $\mathbb{P}(B_{i+1}|B_i^c)$?
2) Calculer p_{n+1} en fonction de p_n.
3) On pose $v_n = p_n - \frac{1}{2}$. Montrer que $v_{n+1} = cv_n$ avec $c \in \mathbb{R}$ à déterminer. En déduire l'expression de v_n et de p_n.
4) Quelle est la limite de p_n quand $n \to +\infty$?

Partie B (6 points environ)
On note maintenant Y_n le nombre de menteurs parmi les menteurs $I_1, \ldots, I_n$ qui ont transmis l'information fidèlement (c'est-à-dire celle qu'ils ont entendue).

5) Quelle est la loi de Y_n?

6) Que peut-on dire de la quantité $\frac{Y_n}{n}$ quand n tend vers $+\infty$?

7) On souhaite déterminer une taille d'échantillon suffisante n_0 telle que à partir de n_0, on ait

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{Y_n}{n} - p\right| \geq 0.01\right) \leq 0,05.$$

On utilisera ici le théorème central limite et on rappelera que $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ et que $\mathbb{P}(|Z| \geq 1,96) \simeq 0,05$ si Z suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.