CPP-la prépa des INP 2 ème année
mardi 12 novembre 2013

Corrigé Examen de Probabilités

Exercice 1. (6 points environ)

Un joueur dispose d'un dé et d'une pièce. Le dé est équilibré et la pièce a une probabilité p ($0 < p < 1$) de tomber sur pile. Le joueur lance d'abord le dé, puis lance la pièce autant de fois que le résutlat du dé. Il compte enfin le nombre de piles obtenu au cours des lancers.

Les résultats de chaque lancer sont indépendants.

On note $q = 1-p$. On note également D la variable aléatoire correspondant à la valeur du dé et X celle correspondant au nombre de piles obtenus à la fin du jeu.

1. Soit $(i,j) \in \{1,\dots,6\}^2$. Que vaut $\mathbb{P}(X = j|D = i)$? La loi de X sachant que le résultat du dé est i correspond exactement à loi Binomiale de paramètre i et p. On a donc si $j > i$, $\mathbb{P}(X = j|D = i) = 0$. et si $j \leq i$, $\mathbb{P}(X = j|D = i) = \binom{i}{j} p^j q^{i-j}$.

2. Calculer $\mathbb{P}(X = 6)$ et $\mathbb{P}(X = 4)$. Par la formule des probabilités totales, on en déduit:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 6) &= \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(X = 6|D = i)\mathbb{P}(D = i)\\ &= \mathbb{P}(X = 6|D = 6)\mathbb{P}(D = 6)\\ &= \frac{1}{6}p^6\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 4) &= \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(X = 6|D = i)\mathbb{P}(D = i)\\ &= \mathbb{P}(X = 4|D = 4)\mathbb{P}(D = 4)\mathbb{P}(X = 4|D = 5)\mathbb{P}(D = 5) + \mathbb{P}(X = 4|D = 6)\mathbb{P}(D = 6)\\ &= p^4\frac{1}{6} + \binom{5}{4}p^4 q\frac{1}{6} + \binom{6}{4}p^4 q^2\frac{1}{6}\\ &= \frac{1}{6}p^4(1 + 5q + 15q^2).\end{aligned}$$

3. Montrer que

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{q}{6}\left(\frac{1-q^6}{1-q}\right).$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=0) &= \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(X=0|D=i)\mathbb{P}(D=i) \\
&= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} q^i = \frac{1}{6}(q+q^2+\cdots+q^6) \\
&= \frac{q}{6}(1+q+\cdots+q^5) = \frac{q}{6}\left(\frac{1-q^6}{1-q}\right).
\end{aligned}
$$

4. Sachant que l'on n'a obtenu aucun pile au cours du jeu, quelle était la probabilité que le résultat du dé était 1? Evaluer cette quantité quand $p=q=\frac{1}{2}$.

   Dans cette question on demande de calculer $\mathbb{P}(D=1|X=0)$. On utilise ici la formule de Bayes:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(D=1|X=0) &= \frac{\mathbb{P}(\{D=1\}\cap\{X=0\})}{\mathbb{P}(X=0)} = \frac{\mathbb{P}(\{X=0\}|\{D=1\})\mathbb{P}(D=1)}{\mathbb{P}(X=0)} \\
&= \frac{\frac{q}{6}}{\frac{q}{6}\left(\frac{1-q^6}{1-q}\right)} = \frac{1-q}{1-q^6}.
\end{aligned}
$$

   Dans le cas $p=\frac{1}{2}$, on trouve

$$
\mathbb{P}(D=1|X=0) = \frac{\frac{1}{2}}{1-12^6} = \frac{2^5}{2^6-1} = \frac{32}{63} \simeq 0,508.
$$

Exercice 2. *Quelques aspects de la loi exponentielle.*
Les 3 parties sont indépendantes.

On rappelle que la densité d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est donnée par:

$$
f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{x\geq 0}.
$$

Partie A: *absence de mémoire* (4 points environ)

1. Soit A et B deux évènements. Rappeler la définition de la probabilité conditionnelle de A sachant B: $\mathbb{P}(A|B)$.

   Si $\mathbb{P}(B)>0$, $\mathbb{P}(A|B)$ est définie par: $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

2. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Calculer $\mathbb{P}(X \geq t)$ pour $t \geq 0$ et $t < 0$.

Pour $t \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq t) &= \int_{u=t}^{+\infty} f_X(u)du = \int_{u=t}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda u} du \\ &= \left[-e^{-\lambda u}\right]_t^{+\infty} = e^{-\lambda t}.\end{aligned}$$

Et pour $t < 0$, $\mathbb{P}(X \geq t) = 1$.

3. Soit maintenant $t > s \geq 0$. Montrer que

$$\mathbb{P}(X \geq t | X \geq s) = \mathbb{P}(X \geq t - s).$$

On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq t | X \geq s) &= \frac{\mathbb{P}(\{X \geq t\} \cap \{X \geq s\})}{\mathbb{P}(X \geq s)} = \frac{\mathbb{P}(X \geq t)}{\mathbb{P}(X \geq s)} \\ &= \frac{e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda(t-s)}\end{aligned}$$

et cette dernière quantité correspond bien à $\mathbb{P}(X \geq t - s)$.

Partie B: *minimum de 2 lois exponentielles* (5 points environ)
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même paramètre $\lambda > 0$. On note $Z = min(X, Y)$.

1. Ecrire l'évènement $\{Z \geq t\}$ en fonction des évènements $\{X \geq t\}$ et $\{Y \geq t\}$. On a $\{Z \geq t\} = \{X \geq t\} \cap \{Y \geq t\}$.

2. Calculer $\mathbb{P}(Z \geq t)$ pour $t \geq 0$ et $t < 0$. Pour $t < 0$, $\mathbb{P}(Z \geq t) = 1$ et pour $t \geq 0$, par indépendance des variables X et Y,

$$\mathbb{P}(\{Z \geq t\}) = \mathbb{P}(\{X \geq t\} \cap \{Y \geq t\}) = \mathbb{P}(\{X \geq t\})\mathbb{P}(\{Y \geq t\}) = e^{-2\lambda t}.$$

3. En déduire la fonction de répartition de Z et conclure que Z suit une loi exponentielle de paramètre 2λ.

   La fonction de répartition de Z est donnée par $F_Z(t) = \mathbb{P}(Z \leq t), t \in \mathbb{R}$. On a donc $F_Z(t) = 0$ si $t < 0$ et si $t \geq 0$,

$$F_Z(t) = \mathbb{P}(Z \leq t) = 1 - \mathbb{P}(Z > t) = 1 - \mathbb{P}(Z \geq t) = 1 - e^{-2\lambda t}.$$

   Il s'agit de la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 2λ. La fonction de répartition caractérise la loi donc Z suit une loi exponentielle de paramètre 2λ.

   (On aurait pu aussi voir que la fonction de répartition est continue et dérivable en tout point sauf 0 et que sa dérivée est exactement $f_{2\lambda}$.)

4. Plus généralement, on considère $X_1 \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même paramètre $\lambda > 0$ et on note $Z_n = \min(X_1, \dots, X_n)$. Calculer la fonction de répartition de Z_n puis montrer que Z_n converge en loi vers 0.

   De même, par indépendance des X_i, on a pour $t \geq 0$,

   $$\mathbb{P}(\{Z_n \geq t\}) = \mathbb{P}(\{X_1 \geq t\} \cap \dots \cap \{X_n \geq t\}) = \mathbb{P}(\{X_1 \geq t\}) \dots \mathbb{P}(\{X_n \geq t\}) = e^{-n\lambda t}.$$

   La fonction de répartition de Z est donc donné par:

   $$F_{Z_n}(t) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & t < 0 \\ 1 - e^{-n\lambda t} & \text{si} & t \geq 0 \end{array} \right.$$

   Au passage, on remarque que Z_n est une loi exponentielle de paramètre $n\lambda$. Quand $n \to +\infty$, $F_{Z_n}(t) \to 0$ si $t < 0$ et $F_{Z_n}(t) \to 1$ si $t > 0$.

   On a donc que $F_{Z_n}(t)$ converge vers $F_0(t)$ avec F_0 la fonction de répartition d'une variable aléatoire constante égale à 0. (La convergence a lieu en tout point de continuité de F_0, c'est-à-dire pour tout t différent de 0). Donc Z_n converge en loi vers 0 quand $n \to +\infty$.

Partie C: *somme de 2 lois exponentielle* (5 points environ)
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. On note $S = X + Y$.

1. Montrer que $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$ et $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

   On a, par intégration par parties:

   $$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_R x f_X(x) dx = \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \Big[-xe^{-\lambda x}\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx \\ &= 0 + \left[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

   et

   $$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \int_R x^2 f_X(x) dx = \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \Big[-x^2 e^{-\lambda x}\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2x e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{2}{\lambda}\mathbb{E}[X] = \frac{2}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

   D'où $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$.

2. Calculer $\mathbb{E}[X+Y]$ et $\mathrm{Var}(X+Y)$. Par linéarité $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$.

   Par indépendance, $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2}$.

3. En déduire que la variable aléatoire $S = X + Y$ ne fait pas partie de la famille des lois exponentielles.

   Supposons par l'absurde que $(X+Y)$ suit une loi exponentielle. On remarque que pour une loi exponentielle:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X]^2.$$

   Donc si $(X+Y)$ suivait une loi exponentielle, on aurait

$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2} = \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}\right)^2$$

   Or

$$\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2} + \frac{2}{\lambda\mu},$$

   d'où la contradiction. Donc la loi de la variable aléatoire $X+Y$ n'est pas une loi exponentielle.