CPP - la prépa des INP (1 ème année). Bordeaux, 18/02/2014.

Probabilités discrètes: DS 1.

durée 1h - la calculatrice Casio collège est autorisée.

EXERCICE 1. On lance 6 dés équilibrés (à 6 faces).

1. Décrire l'univers de l'expérience et donner son cardinal.

   On considère que les dés sont discernables. Dans ce cas:

   $$\Omega = \{w = (w_1, \ldots, w_6), w_i \in \{1, \ldots, 6\}, i = 1, \ldots, 6\} = \{1, \ldots, 6\}^6.$$

   Son cardinal est donc: $|\Omega| = 6^6$. La probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω est la probabilité uniforme.

2. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un 6 sur les 6 dés.

   On note A l'évènement: "obtenir au moins un 6 parmi les 6 dés". Son complémentaire est l'évènement: "n'obtenir aucun 6". On a donc:

   $$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \simeq 0,67.$$

3. Calculer la probabilité de voir apparaître toutes les valeurs de 1 jusqu'à 6 lors du lancer. On note B l'évènement: "obtenir les 6 valeurs différentes".

   $$\mathbb{P}(B) = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6} = \frac{5}{324} \simeq 0,015.$$

EXERCICE 2. Dans un jeu de 52 cartes, on tire au hasard 5 cartes (sans remise).

1. Décrire l'univers de l'expérience et donner son cardinal.

   Il s'agit d'un tirage sans remise. Ici on a le choix de considérer les tirages discernables (l'un après l'autre) ou indiscernables (à la fois). Ici je considère que les tirages sont indiscernables. Dans ce cas:

   $$\Omega = \left\{w = \{w_1, \ldots, w_5\}, w_i \in \mathscr{C}, i = 1, \ldots, 6 \text{ et } w_i \neq w_j \text{ si } i \neq j\right\}$$

   où $\mathscr{C}$ désigne l'ensemble des cartes. Son cardinal est donc :

   $$|\Omega| = \binom{52}{5} = \frac{52!}{5!47!} = \frac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}{5!}.$$

   La probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω est la probabilité uniforme.

2. Calculer la probabilité que les 5 cartes soient des coeurs. On note A l'évènement: "les 5 cartes tirées sont des coeurs". L'évènement A revient à choisir 5 cartes parmi les 13 coeurs, d'où:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9}{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48} \simeq 5,0 \times 10^{-4}.$$

3. Calculer la probabilité d'obtenir les 4 as.

   On note B l'évènement: "obtenir les 4 as parmi les 5 cartes". Etre dans B revient à avoir les 4 as fixés et une carte restante. Donc $|B| = 48$ et

$$\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{48 \times 5!}{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48} \simeq 1,8 \times 10^{-5}.$$

4. Calculer la probabilité d'obtenir un full, (c'est-à-dire obtenir 3 cartes d'une même valeur et 2 cartes d'une même valeur). On note C l'évènement: "obtenir un full". Pour décrire un full, il faut choisir la valeur a présente 3 fois, la valeur b présente 2 fois puis le choix des 3 cartes de la valeur a et le choix des 2 cartes de la valeur b. On a donc

$$|C| = 13 \times 12 \times \binom{4}{3} \times \binom{4}{2} = 13 \times 12 \times 4 \times 6$$

   et

$$\mathbb{P}(C) = \frac{13 \times 12 \times 4 \times 6 \times 5!}{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48} \simeq 1,4 \times 10^{-3}.$$

EXERCICE 3. On dispose de 3 urnes. Toutes les urnes ont 6 boules. Les compositions des boules dans les 3 urnes sont différentes.
L'urne 1 contient 1 boule rouge et 5 boules grises. L'urne 2 contient 2 boules rouges et 4 boules grises. L'urne 3 contient 3 boules rouges et 3 boules grises.

On réalise alors l'expérience suivante. Dans un premier temps, on lance un dé (équilibré et à 6 faces). Si le résultat du dé vaut 1,2 ou 3, on tire une boule dans l'urne 1. Si le résultat du dé vaut 4 ou 5, on tire la boule dans l'urne 2. Si le résultat du dé vaut 6, on tire la boule dans l'urne 3.

Pour $1 \leq i \leq 3$, on note U_i l'évènement:"le tirage a lieu dans l'urne i" et on note R l'évènement: "la boule tirée est rouge".

1. Calculer la probabilité que la boule tirée soit rouge.

   On applique la formule des probabilités totales:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R) &= \mathbb{P}(R \cap U_1) + \mathbb{P}(R \cap U_2) + \mathbb{P}(R \cap U_3) \\ &= \mathbb{P}(R|U_1)\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(R|U_2)\mathbb{P}(U_2) + \mathbb{P}(R|U_3)\mathbb{P}(U_3) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{18} \simeq 0,28.\end{aligned}$$

2. Sachant que la boule tirée est rouge, quelle est la probabilité que le résultat du dé valait 6.

   On demande de calculer $\mathbb{P}(U_3|R)$. On utilise ici la formule de Bayes:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U_3|R) &= \frac{\mathbb{P}(U_3 \cap R)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{\mathbb{P}(R|U_3)\mathbb{P}(U_3)}{\mathbb{P}(R)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{5}{18}} = \frac{3}{10} = 0,3.\end{aligned}$$

3. Est-il possible de choisir le nombre de boules rouges et de boules grises dans chacune des urnes de telle sorte que le fait de savoir que l'on a obtenu une boule rouge ne donne pas d'information sur l'urne dans laquelle on a effectuée le tirage? C'est-à-dire, est-il possible d'avoir:

$$\mathbb{P}(U_1|R) = \mathbb{P}(U_2|R) = \mathbb{P}(U_3|R)?$$

   Qu'en est-il lorsque le nombre de boules dans chaque urne est n ($n \neq 6$)?

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U_1|R) = \mathbb{P}(U_2|R) = \mathbb{P}(U_3|R) &\Leftrightarrow \frac{\mathbb{P}(U_1 \cap R)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{\mathbb{P}(U_2 \cap R)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{\mathbb{P}(U_3 \cap R)}{\mathbb{P}(R)} \\ &\Leftrightarrow \mathbb{P}(U_1 \cap R) = \mathbb{P}(U_2 \cap R) = \mathbb{P}(U_3 \cap R) \\ &\Leftrightarrow \mathbb{P}(R|U_1)\mathbb{P}(U_1) = \mathbb{P}(R|U_2)\mathbb{P}(U_2) = \mathbb{P}(R|U_3)\mathbb{P}(U_3) \\ &\Leftrightarrow \mathbb{P}(R|U_1) \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(R|U_2) \cdot \frac{1}{3} = \mathbb{P}(R|U_3) \cdot \frac{1}{6} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{P}(R|U_2) = \frac{3}{2}\mathbb{P}(R|U_1) \\ \mathbb{P}(R|U_3) = 3\mathbb{P}(R|U_1). \end{cases}\end{aligned}$$

   De plus, pour $i = 1,2,3$, $\mathbb{P}(R|U_i)$ est de la forme $\frac{k_i}{n}$ avec k_i un entier entre 0 et n (k_i désigne le nombre de boules rouges dans l'urne i). Si on a $\mathbb{P}(U_1|R) = \mathbb{P}(U_2|R) = \mathbb{P}(U_3|R)$, on en déduit que k_1 est pair, donc que le nombre de boules rouges dans chacune des urnes vérifie:

$$k_1 = 2m,\ k_2 = 3m,\ k_3 = 6m.$$

   Si $n \leq 5$, il n'y a donc pas de solutions. Si $n = 6$, il y a au plus une solution donnée par $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $k_3 = 6$. On vérifie que c'est bien une solution. Si $n \geq 7$, il y a (au moins) toujours une solution. (Il y en a en fait exactement $\left[\frac{n}{6}\right]$ où $[\cdot]$ désigne la partie entière).